대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.2, 155-179. Jun. 2008

초등에서의 곱셈적 사고 지도
- 초등 5학년을 위한 교수-학습 자료 개발을 중심으로 -

한 은 혜* · 류 희 수**

7차 교육과정에서 곱셈 문제들은 구구단을 암기하고 적용하여 푸는 기능적인 면에 치중하고 있어 아동들이 세거나 그리는 덧셈적 사고에 머무르고 있다. 정수, 소수, 분수, 비·비율과 같은 수의 확장에서 효율적으로 곱셈과 나눗셈을 사용하여 풀 수 있는 능력과 자신이 풀이한 방법을 정확하게 설명할 수 있는 곱셈적 사고로의 이행을 위한 다양한 연구가 부족하다. 본 논문은 초등학교 5학년을 중심으로 덧셈적 사고에 머무르는 아동의 사고가 보다 높은 수준의 곱셈적 사고로 이행하도록 하기 위한 교수-학습 자료를 개발하고, 적용한 후 그 결과를 분석하였다. 덧셈적 사고와 곱셈적 사고에 대한 새로운 틀을 제시하고 이에 알맞은 자료를 개발함으로써 개발된 자료의 타당성과 곱셈적 사고로의 용이로운 전이가 가능함을 검증할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

초등학교에서 사칙연산은 수학전반에 걸쳐 있는 내용들에 있어서 핵심적인 내용이다. 연산의 지도는 개념의 이해에 바탕을 두면서 계산의 효율성을 높이는 데 있으며 그 중 곱셈으로 그 의미를 좁혀 보면 곱셈은 동수누가라는 개념이 교과서 전반의 기초를 이루고 있다. 현행 7차 교육과정에서 곱셈은 묶어 세기와 뛰어 세기를 통해서 2학년에 도입이 되고 있어 아동들은 덧셈적 사고에만 머무르고 곱셈적인 사고로 발전하지 못하고 있다(이준자 2001; 장미라 2006). 따라서 학년이 올라갈수록 아동들의 곱셈에 대한 동수누가의 사고를 넘어선 좀 더 고차원적인 상위의 사고를 포함하는 곱셈적 사고의 지도가 필요하다.

최근의 수학 교육은 아동들이 곱셈과 같은 수학적 기능을 얼마나 많이 배우는가 보다는 수학적 개념을 어떻게 잘 이해하는가 하는 점과 이러한 수학적인 개념이 아동의 발달에 맞게 교육과정이 구성되고 수업이 이루어져야 한다고 강조한다. Hart(1981)는 학생들이 비와 비례에 대한 문제 해결에서 잘못된 덧셈 전략을 사용하여 자주 부정확하고 부적절한 사고를 하고 곱셈적인 접근을 해야 할 상황에서 덧셈적인 접근을 하는 것을 흔히 볼 수 있다.

Vergnaud(1988)는 곱셈적 개념의 장(multiplicative conceptual field)이라는 용어를 사용하여 간단하거나 복잡한 비례문제로 분석할 수 있는 모든 상황을 설명하고자 하였다. 이 상황에서 곱셈, 나눗셈, 분수, 비, 비례 그리고 일차함수와 같은 수학적 개념을 포함시키면서 이러한 개념들은 각각 별개로 발달하는 것이 아니라 오랜 기

* 오산 성호초등학교(heh1973@hanmail.net)
** 경인교육대학교(hsryu@ginue.ac.kr)

간을 거치면서 서로 연결되어 여러 상황 가운데서 발달하게 된다고 하였다. 그는 유리수의 영역을 곱셈과 나눗셈, 비례로 확대할 것을 제안하였는데 이는 곱셈적 구조의 영역을 조성한 것이다.

Siemon, Breed & Virgona (2006)는 5학년 31%, 6학년 18%, 7학년 25%, 8학년 19%, 9학년 18%의 아동이 전부 세거나 만들어 보이거나 두 배로 하는 방법인 덧셈적 사고를 하고 있다는 연구 결과를 보고 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 발전시키기 위한 목적을 가지고 연구를 하였다. 이 연구에서 곱셈적 사고는 정수, 소수, 분수, 비와 비율과 같은 수의 확장에서 효율적으로 풀 수 있는 능력과 곱셈을 사용하는 문제들과 직접적, 간접적으로 비율을 이용한 나눗셈 문제를 풀 수 있는 능력과 이러한 내용들을 여러 가지 방법으로 효과적으로 설명할 수 있는 것으로 나타난다고 하였다.

덧셈적 사고와 곱셈적 사고는 별개의 것으로 여기는 것이 아니라 더 큰 차원의 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 이행하도록 돕는 것이 필요하다. 이는 단시간에 걸쳐 완성되는 것이 아니고 수를 자유롭게 세는 덧셈에서 출발하여 곱셈적 문제의 상황을 깊이 생각하고 조금 더 효과적인 전략을 세우며 유리수와 같은 넓은 수의 개념으로 확장하는데 도움이 되는 풍부한 과제들을 제시할 수 있는 자료들이 더욱 많이 만들어져야 한다.

현재 곱셈적 사고에 관한 연구는 곱셈이 처음 도입되는 2-3학년에 대한 연구에 그치고 있어 비례 문제 해결 이전 과정에 있어서 곱셈적 사고 발달을 위한 연구가 필요하다고 생각하였다. 곱셈적 사고는 단순한 동수누가에 초점을 맞추어 지도하는 수준만이 아닌 곱셈의 여러 원리를 이해하여 고차원적인 비의 개념에까지 이르도록 연계적인 지도가 이루어져야한다. 세기나 그리기, 더하는 수준을 넘어 보다 확장된 수의 영역에서도 정확하게 곱셈식을 사용하고 원리를 이해하고 설명할 수 있도록 하기 위해, 점진적이고 단계별 심화의 형태를 통해 곱셈적 사고의 기회 제공이 필요하다. 또한 호주의 교육과정과 우리나라의 교육과정을 비교 분석하는 동시에 곱셈적 사고의 8단계와 비교하여 이러한 비교 분석의 과정을 통해 아동들의 곱셈적 사고 수준의 단계별로 사고 단계를 높이기 위한 교수-학습 자료를 개발하였다. 특히 5학년임에도 아직까지 곱셈적 사고 발달 수준이 1-4단계에 머무르는 아동을 중심으로 보다 상위단계로 나아가기 위한 효과적인 자료를 개발·검증하고자 하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 덧셈적 사고와 곱셈적 사고

Piaget가 아동들의 덧셈적 사고와 곱셈적 사고를 연구했을 때 그의 초점은 학교에서 가르쳐지는 특정한 합과 곱의 산술에 있지 않았다. 그의 관심은 아동들의 사고 과정에 있었고, 덧셈적 사고와 곱셈적 사고를 구분했을 뿐 아니라 두 산술 조작을 구분하였다. Piaget와 그의 동료들(Inhelder & Piaget, 1958)은 처음에 아동들이 수를 포함하지 않는 대상 분류와 계열 과제를 수행할 때에 나타나는 곱셈적 사고와 덧셈적 사고를 구분했다. 그들은 이런 종류의 사고를 논리적 덧셈과 논리적 곱셈으로 명명했다. 그리고 이것은 분류 과제로 설명될 수 있다. 분류 과제에서 아동들은 빨간 사각형들과 파란 사각형들 및 원들을 제시 받는데 이것들은 색에 따라서 그리고 모양에 따라서 두 가지 방법으로 이분될 수 있다.

어떤 아동들은 덧셈적 분류만은 만들 수 있는 반면에 어떤 아동들은 곱셈적 분류 또한 만들 수 있었다. 아동들의 수치적 덧셈 및 곱셈적 사고에 대한 Piaget의 이해는 40여년에 걸쳐 이루어졌는데 그의 초기 연구가 일대 다 대응에 초점을 두었다면 최근 연구(Piaget 1987)에서는 일대 다 대응을 계속 강조하고 수반된 위계적 포섭관계도 강조하였다. 그는 덧셈과 곱셈 간의 차이를 추상화 수준의 수와 아동이 동시에 만들어야 하는 포섭관계의 수에 있는 것으로 기술하였고 주목할 점은 곱셈과 덧셈의 추상화와 포섭관계이다. 곱셈은 여러 추상화 수준을 만들지만 덧셈은 하나의 추상화 수준을 만든다. 또한 곱셈은 수직과 수평적 포섭관계를 모두 갖지만 덧셈은 수평적 포섭관계만 갖는다. 즉, 곱셈은 덧셈보다 좀 더 복잡하고 고차원적인 사고를 요구한다는 것이다.

곱셈적 사고는 덧셈을 하는데 필요한 사고와는 구별되는 곱셈의 이면에 있는 사고를 말한다. 덧셈적 사고가 한 수준에서 포함관계를 만들고 일을 단위로 다루며, 한 수준에서 연속적으로 생각하며 “몇 더”로 사고할 것을 요하는 반면에 곱셈적 사고는 한 수준 이상에서 포함관계를 만들고 일 이상의 단위를 다루며 이것을 동시에 사고하며 “몇 배”에 의해 사고할 필요가 있다고 말하고 있다.

이와 대조적으로 덧셈적 사고는 더해지는 각 단위가 일로 만들어진 단위로 이루어져 있으며 포함관계 또한 1이 2로, 2가 3으로 간다는 점에서 하나의 수준만으로 만들어지며 ‘몇 더’로 사고가 이루어진다.

Sinclair(Piaget et al., 1977) 역시 물고기 과제를 고안하여 임상적 인터뷰를 하여 곱셈적 사고와 덧셈적 사고를 구분하였다. Sinclair는 우수한 학생들이 다니는 국제학교에서 34명의 아동을 인터뷰 했다. 과제에 사용한 자료는 5cm, 10cm, 15cm 물고기 모형 3개와 길이가 9mm인 플라스틱 칩 100개이며 “물고기는 뱀장어를 닮았고 모든 면에서 동일했으나 단지 길이만 달랐다. 인터뷰를 통해 분석한 결과 다음과 같이 연구 대상 아동들의 다음과 같은 4가지 수준을 확인 할 수 있었다.

수준 Ⅰ. A<B<C와 같이 받아들여지는 대부분의 임의의 수와의 내포적인(질적인) 계열적 반응이 가능한 수준.

수준 Ⅱ. +1 수열과의 수치적 대응이 가능한 수준.

수준 Ⅲ. +2 또는 3이상이 더해지는 수열과의 수치적 대응이 가능한 수준.

수준 Ⅳ A. 두 관계 A, B 또는 B, C 중 하나는 맞았으나 하나는 틀리는 수준.

수준 Ⅳ B. 두 관계를 즉시 파악하는 수준.

Clark과 Kamii(1996)는 1학년부터 5학년까지 336명의 아동을 대상으로 Sinclair의 문제를 사용하여 덧셈적 사고와 곱셈적 사고는 명확하게 구별되며, 곱셈적 사고는 일찍 나타나나 매우 느리게 발달한다는 것을 확인할 수 있었다. 2학년에서 45% 정도의 학생들이 완전하지는 않지만 곱셈적 사고를 하고 있었고, 5학년의 아동에서는 49%만이 완전한 곱셈적 사고 수준(수준 ⅣB)이었음을 확인할 수 있었다.

2. 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 이행

Steffe(1992)의 연구는 아동들이 덧셈적 사고로부터 곱셈적 사고를 구성하는 과정을 보여줌으로써 Piaget의 연구를 확장하였다. Steffe는 전형적인 실험교수 모델을 사용하였다. 그는 아동들의 수학적 인지 도식(scheme)을 확인하고 아동들의 말과 행동을 통하여 어떻게 그들이 자신들의 인지 도식을 수정하여 보다 복잡한

구조로 나아가는지를 보려는 노력으로 소수의 아동들과 개별적으로 활동하였다. 이런 방법으로 아동들이 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로 나아가는 과정을 추적할 수 있었다. Steffe의 연구에서 주목할 점은 세기도식이 덧셈에서 곱셈으로 발전된다는 것이다. 초기 수 계열 수준의 아동은 덧셈적 사고의 특징을 보여 준다. 여기에서는 수치적 합성이 하나의 묶음, 즉 한 단위로 볼 수 없고 수평적으로 세어진다는 특징을 가지고 있다. 다음으로 암묵적으로 내포된 수 계열 수준으로 발달하여 가는데 이 시기에는 하나의 묶음으로 단위를 구성하며 그 구성요소까지 파악할 수 있게 된다. 최종 수준인 명확하게 내포된 수 계열 수준은 부분-전체 추론이 가능하다. 구성 요소의 늘어난 개수를 보고 몇 묶음이 되었는지 즉시 파악할 수 있는 수준까지 발달한다는 것이다. 즉, 명확하게 내포된 수 계열 수준은 완전한 곱셈적 사고가 가능한 수준이라고 할 수 있다.

Carpenter(1999)는 곱셈의 문제 장면을 여섯 가지의 문제 상황으로 나누었는데 이것은 기초단계의 문제와 관련된 문제, 일반적 형태의 문제로 나눈 것이다. Carpenter의 곱셈문제 장면 분류는 기초적인 장면에서부터 곱셈이 확장될 수 있는 범위와 교환성질 등 대수적 구조까지 고려하여 그 수학적인 가치가 크다.

Siemon, Breed & Virgona (2006)는 곱셈적 사고의 특징을, 수의 확장과 축소에 대한 능력, 1, 2차 곱셈이나 나눗셈을 포함한 문제를 인식하고 해결할 수 있는 능력, 다양한 방법으로 효과적인 의사소통을 할 수 있는 능력으로 말하고 있다.

특히, 대부분의 학생들은 큰 수의 곱셈 문제나 비례, 혹은 익숙하지 않은 문제들도 덧셈 전략을 토대로 작은 수의 곱셈문제로 인식하여 해결할 수 있다고 시사한다.

이러한 곱셈적 사고의 특징을 통하여 Siemon (2006b)은 곱셈적 사고 발달 단계를 8단계로 나누었다. 1단계에서 4단계까지는 덧셈적 사고에 의존하여 문제를 푸는 특징이 있다고 보았고 5단계에서 8단계로 올라갈수록 수의 영역이 확장되고 자신이 푼 방법을 정당화하고 설명하는 곱셈적 사고의 능력이 발달한다고 보았다.

3. 곱셈적 사고에 대한 구조적 접근

Vergnaud(1988)는 많은 상호 연결된 개념들(곱셈, 나눗셈, 분수, 비, 선형 함수, 백터 공간 등)로 묘사한 곱셈적 구조들에 의해 문제들과 상황들을 분석했다. 비록 Vergnaud의 연구가 11-15세 아동들을 대상으로 했지만 그럼에도 불구하고 그의 모델을 고찰해 보는 것이 교훈적이다. 그는 비의 개념에 근거한 차원 모델을 사용하여 곱셈으로부터 덧셈을 구분했고 그의 연구에서 아동들에게 가장 쉬웠던 곱셈 절차를 확인했다.

Vergnaud(1988)의 분석에 따르면 개념적 장이론으로서의 곱셈의 구조는 서로 다른 세 가지 하부 구조를 갖는데 그것은 측도 사이의 동형사상, 측도의 곱, 그리고 배수비례 관계이다.

Schwartz(1998)는 곱셈 문장제에 수반된 지시대상의 유형이 내포량(Intensive quantity)인지 또는 외연량(Extensive quantity)인지에 초점을 맞추었다. 외연량은 단일의 실체 또는 차원을 말하는 반면에, 내포량은 두개의 실체를 수반한다. 예를 들어 어떤 사람이 "고양이 5마리"라고 말할 때 그 지시 대상은 단일한 실체인 고양이이고, 이것은 외연량(E)이다. 그러나 누군가 자루 당 사탕 6개라고 말할 때, 그 양은 그 지시대상이 두 실체, 사탕과 자루이기 때문에, 내포량(I)이다.

Schwartz(1998)은 덧셈과 곱셈 간의 차이는 연산이 같은 종류의 양 또는 다른 종류의 양을 만들어내는지에 있다고 주장하였다. 그는 덧셈에서 산술적인 행위가 두 양을 합성해서 자신이 '지시 대상 보존 합성(referent preserving composition)'이라고 부른, 세 번째 같은 종류의 양을 만들어내는 것이라고 했다. 예를 들어, 공깃돌 5개+공깃돌 4개= 공깃돌 9개이다. 대조적으로 곱셈과 나눗셈은 두 개의 같은 종류의 또는 다른 종류의 양들을 합성 시 보통 원래의 두 개 중 하나와 다른 변환 합성(referent transforming composition)이라고 부른다. Schwartz는 Vergnaud의 곱셈의 구조의 3가지 유형과 비교할 수 있는 3가지 범주의 곱셈 문장제를 정의 하였다.

지금까지 살펴본 선행 연구에서는 간단한 하나의 문제로 곱셈적 사고 수준을 평가하는 틀을 이용하여 연구한 것들이 있으나 본 논문에서는 곱셈적 사고 수준 조사의 구체적이고 다양한 문제 개발을 통한 곱셈적 사고 수준을 평가하여 곱셈적 사고 신장을 달성하려 하였다. 곱셈적 사고 수준에 대한 구체적인 평가가 뒷받침되어야 그에 따른 교수-학습 자료가 개발될 수 있다고 생각하여 본 연구에서는 Siemon(2006b)의 곱셈적 사고 수준을 평가하는 틀을 통하여 4, 5, 6학년의 곱셈적 사고 수준을 분석하고 5학년 아동들의 곱셈적 사고 수준의 단계를 알아보았다.

Ⅲ. 교육과정 분석

1. 호주의 교육과정 비교 · 분석

본 논문의 곱셈적 사고 수준 평가 틀은 호주의 교육과정을 바탕으로 구성되어진 것이다. 호주 교육과정 수 영역에서는 아동들의 수 세기, 대소 비교, 차례 짓기에 대한 이해력을 발달시키는데 초점을 맞춘다. 0을 포함한 자연수는 음수와 양수를 포함한 정수와 유리수까지 확대 되며, 직각삼각형이나 직사각형의 빗변 또는 대각선의 길이나 원의 호와 관련된 길이 영역은 $\sqrt{2}$와 같은 무리수까지 이어진다. 호주 교육과정에서 특징적인 것은 3학년, 5학년, 7학년을 중심으로 구성되어 단계가 명확하게 설정되어 있고, 2, 4, 6학년은 그 사이의 단계로 아래 위 단계의 중간단계로 되어 있다는 것이다.

<표 Ⅲ-1>에서 볼 수 있는 것처럼 곱셈적 사고 수준 2 단계, 호주의 교육과정 2 단계는 3학년 수준으로 같은 수준이다. 마찬가지로 곱셈적 사고의 4 단계, 호주의 교육과정의 3 단계는 5학년 수준으로 동일한 것이다. 곱셈적 사고 수준의 6 단계, 호주의 교육과정 4 단계는 동일 수준이며 7학년 수준인 것이다.

본 논문의 곱셈적 사고 단계는 호주의 교육과정 단계에 맞게 개발되었으며 의사소통의 능력을 세분화하여 개발한 것이다. Siemon (2006a)의 곱셈적 사고 단계는 수 영역 의 세분화된 확장과 확률과 비, 규칙성과 함수, 의사소통 능력까지 포괄적인 면을 바탕으로 단계가 나누어져 있다. 특히 우리나라의 교육과정에서는 곱셈을 2-4학년에서 중점 지도하나 넓이나 확률, 분수와 비, 규칙 찾고 설명하기 등의 다양한 면에서의 지도가 이루어지지 않고 있어 곱셈적 사고 수준을 신장하기 위한 다양한 시도가 필요하다고 생각한다. 우리나라에서도 Siemon의 곱셈적 사고 수준의 단계에서처럼 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 이행을 위하여 오랜 시간에 걸쳐 세분화되고 단계화된 구체적인 교수-학습이 더욱 필요하다.

<표 Ⅲ-1> 곱셈적 사고 수준과 호주의 교육과정 비교

곱셈적 사고 수준 단계		호주의 교육과정 단계		우리나라 교육과정
단계	단계별 내용	단계	단계별 내용	
1	단위가 작은 곱셈 나눗셈. 그림과 실물, 세기 방법에 의존. 5보다 작은 수 단위의 뛰어 세기. 간단한 정보와 단순한 패턴 구성. 곱셈적 사고는 나타나지 않음.	1/2	0-20까지 묶음 만들고, 크기, 세기, 나열하기, 물체의 묶음과 나눔 이용. 덧셈 뺄셈 계산에서 바로세기와 거꾸로 세기.	1-가-50까지의 수 1-나-100까지의 수 1-나-그림 그리기
2	2나 5를 단위로 세기. 가시화된 체계적인 수세기. 구체물 등분, 작은 수 기준 단위. 데카르트 곱에 부분적 경우의 수. 곱셈과 나눗셈에 부분적인 확신.	2	0-1000까지의 수(1, 10, 100씩 뛰어 세기), 0-100까지 2, 4, 5씩 뛰어세기. 1/2, 1/3, 1/4의 간단한 분수 설명. 간단한 곱셈을 동수누가로 계산, 나눠가지기로 나눗셈 설명 덧셈과 곱셈의 암산에 부분 덧셈 방법 사용, (한 자리)+(두 자리) 덧ㆍ뺄셈.	1-나-두 자리 덧, 뺄셈 2-가-1000까지의 수 2-가-분수의 도입 3-가-분수 이해
3	비와 등분에 대한 직관적인 인지. 2나 5 같은 단위 수를 효과적 사용. 곱이나 절반의 개념 이용. 설명 없이 간단한 데카르트 곱에서 모든 경우의 수. 모두 세기, 덧셈적 사고.	2/3	간단한 곱셈을 동수누가로 계산, 나눠가지기로 나눗셈 설명(2) 2, 3, 4, 5, 10, 100의 배수의 개념을 사용하여 다양한 관점에서 바로 세기 거꾸로 세기를 함(3)	4-나-비와 몫으로서 분수
4	익숙한 두 자리의 곱셈과 나눗셈. 큰 수, 낯선 문제에 덧셈적 사고. 그림, 체계적이지 않은 전략 의존. 주어진 수나 양을 등분. 문제 해결의 의도를 설명 못함.	3	올림 버림, 분수 기호와 크기 비교하기 2, 3, 4, 5, 10, 100의 배수의 개념을 사용하여 다양한 관점에서 바로 세기 거꾸로 세기를 함, 계산의 결과 예측하기, 구구단을 외기, 999까지의 덧, 뺄셈. 0과 한 자리 수 곱셈, 한 자리수로 나누기(구구단을 이용한), 소수 두 자리의 덧 뺄셈(돈 계산 상황), 구체물을 이용한 간단한 분수의 계산.	2-나-구구단표 완성 3-가-구구단을 이용한 자리 나눗셈 3-나-소수의 이해 4-가-익숙한 두 자리 곱셈과 나눗셈 4-가-분수의 크기 비교 4-가-분모가 같은 분수의 덧, 뺄셈 4-나-소수의 덧, 뺄셈
5	간단한 비율 문제를 능숙하게 풀기, 곱셈적 사고로 문제를 해석. 분수 관련 비율문제에 덧셈적 사고, 소수와 백분율 문제. 확장된 곱셈적 문제 체계적 접근.	3/4	구체물을 이용한 간단한 분수 계산(3). 정수, 일반적 분수, 소수를 나타냄(4). 곱셈의 실생활 문제 이용(4).	6-가-비와 비율
6	데카르트 곱에 조직적 리스트화. 확장된 영역의 곱셈과 나눗셈 문제 해결, 해결 전략을 설명 못함. 비율 감각이 발달, 개념 못 설명. 곱셈, 나눗셈 이용한 문제 해결에 확신.	4	천-백만 단위 크기와 단위 차례 이해. 정수, 일반적 분수, 소수를 나타냄. 정수와 소수를 수직선에 나타냄. 면적이 같은 사각형에서 인수 다양하게 지도, 소수와 합성수 정의 최대공약수를 구하기 위해 약수들의 집합 만듦, 간단한 제곱수를 계산하고 이해. 자연수의 사칙연산을 위해 암산법, 수기법 사용, 소수, 비율, 퍼센트를 사용. 소수의 덧, 뺄셈, 곱셈의 실생활 문제 이용.	4-가-천, 백만 단위의 크기와 단위 차례 이해 4-나-분수와 소수의 크기 비교 5-가-최대공약수 6-나-경우의 수와 확률
7	큰 수의 곱셈, 나눗셈 이용한 체계적이거나 비체계적인 방법 설명. 간단한 패턴, 백분율, 등분에 관계된 해법을 설명. 큰 수의 경우 해결과 설명을 못함. 문제와 해결 방법 사이의 고리를 만들기 시작하며 수학적으로 사고.	4/5	소수, 비율, 퍼센트를 사용(4). 2, 3, 5등 간단한 제곱근 구하기(5). 간단한 자연수의 비와 퍼센트 구하기(5).	6-가-비와 비율 4-가-규칙을 추측하고 설명하기
8	적절한 개념과 추상화를 사용. 소수와 분수 등 폭 넓고 낯선 곱셈 문제를 해결하고 설명. 공식을 사용하고 규칙성을 설명. 복잡하고 개방적 문제들을 체계적으로 해결.	5	자연수의 완전한 인수를 정의하고 자연수를 제곱수들로 표현. 단위분수들과 크기가 같은 소수. 분수의 크기를 비, 소수, 퍼센트로 나타냄, 분수를 소수로 나타냄. 제곱, 제곱근을 계산하고 어림할 때 완전제곱의 개념을 사용함. 자연수나 간단한 분수 제곱의 크기. 2, 3, 5등 간단한 제곱근 구하기. 세제곱과 세제곱근 계산. 계산기를 이용하여 유리수의 제곱과 세제곱근 구하기. 자연수 덧, 뺄셈 2진기수법 나타내기. 간단한 자연수의 비와 퍼센트 구하기. π 값에 어림수를 사용.	2-나-식 만들기 5-나-문제 해결의 타당성 검토하기 6-가-소수와 분수의 크기 비교 9-가 제곱근의 성질 6-나-원주율과 원의 넓이

2. 초등학교 4-6학년 교과서 분석

현행 교육과정에서 곱셈적 사고를 위한 문제들은 학년이 올라갈수록 문항 수가 많고 다양한 소재가 쓰이나 수의 영역 확장이나 체계적이 방법의 제시가 부족한 것으로 나타났다.

4학년에서는 간단한 곱셈과 간단한 숫자의 곱을 풀이 할 때 그리거나 세는 방법으로도 가능한 문제들이 많았고, 세거나 그리는 덧셈적인 기초 단계에서 점차적인 수의 확장을 통한 능숙한 곱셈적 사고를 위한 기회 적음을 확연히 알 수 있었다. 4학년부터 6학년까지 교육과정 상의 곱셈적 문제들에서 아동 스스로 규칙을 발견하고, 문제를 해결한 구체적인 방법에 대한 설명의 기회가 부족함을 보였다. 자신이 기록한 설명을 통하여 사고 수준을 본인 스스로 인식하고 교사가 도움을 줄 수 있는 의사소통의 기록 공간이 필요하다.

간단하게 그리거나 세는 문제 해결하기에서 갑자기 복잡하고 어려운 높은 수준의 곱셈적인 문제가 제시되고 있다. 여러 가지 문제에서는 학년에 따라 동일한 문제 유형이 반복되기도 하였으며 학년이 올라감에 따른 4학년에서는 1단계가 많이 나오다가 5, 6학년에서는 갑자기 단계가 올라가고 곱셈적 사고 수준의 단계가 체계적이고 순차적으로 반영될 필요가 있음을 볼 수 있다. 곱셈적 사고가 오랜 시간을 통해서 습득되는 만큼 체계적인 문항을 개발하는 것이 필요하다고 생각한다. 한 가지 문항으로도 여러 가지 곱셈 전략과 수의 확장을 경험하도록 하고, 각 단계를 고려하여 지도 되어야 한다. 곱셈적 사고 수준 단계별 신장을 위한 구체적인 자료의 개발과 점차적인 수의 영역 확장을 위한 자료, 아동의 사고를 표현할 수 있는 기회의 제공이 필요하다.

Ⅳ. 연구 방법 및 절차

1. 곱셈적 사고 수준 검사

Siemon, Breed & Virgona(2006)의 곱셈적 사고 수준을 8 단계로 분석하는 연구에서 사용하였던 문제를 사용하여 조사한 후 분석하였다. 문제의 내용 중 캠프 활동 내용을 한국 아동들에게 맞는 방과후 학교라는 명칭과 과목명(로봇공학, 종이접기, 마술, 논술)으로, 외국인 아동의 이름을 한국 아동의 이름으로 바꾼 것 외에는 그대로 적용을 해보았다. 2007년 5월 초에 Siemon(2006b)의 곱셈적 사고 수준 평가 틀을 사용하여 경기도 성남시 분당의 O초등학교 4학년에서 6학년까지 학년 당 한 반씩 총 세 학급 104명의 아동에게 평가를 실시하였다.

4학년 33명, 5학년 39명, 6학년 32명을 대상으로 적용한 결과에서 4학년은 1-2단계 아동이 94.9%나 되었으며, 5학년은 59%, 6학년은 62.5%에 머물러 4-6학년 모두 59%이상의 아동들이 1, 2단계에 머무르고 있다는 결과가 나왔다. 특히, 6학년의 경우에도 15명(46.9%)의 아동이 2단계에 머무르고 있다는 결과가 나왔다. 5학년에서도 39명중 23명(59.0%)이나 2단계의 사고에 머무르는 것으로 나왔으며 5학년에서 49%가 완전한 곱셈적 사고 수준을 보인 Clark과 Kamii(1996)의 연구 결과와는 너무나 다른 결과를 가져온 것이다. 1-4단계의 덧셈적 사고를 하는 아동이 51%를 훨씬 넘은 94.8%가 나왔는데 이는 5-8단계의 곱셈적 사고를 하는 아동이 5.2%밖에 없다는 결과가 나온 것이다.

4단계 수준 이하의 문제는 5학년에서 충분히 풀 수 있는 단계로 되어 있다. 세거나 그리는 단계인 1단계의 아동이 23.1%이고, 2단계의 아동이 35.9%나 나왔다는 것은 1-2단계의 수준의 아동들을 보다 높은 수준으로 향상하기 위한

자료 개발의 필요성을 보여주고 있다.(참조 <표 Ⅳ-1>)

<표 Ⅳ-1> 4-6학년 곱셈적 사고 수준 적용 결과

곱셈적 사고 단계	4학년 (수)	백분율 (누적)	5학년 (수)	백분율 (누적)	6학년 (수)	백분율 (누적)
1단계 (1-9점)	20	61.6	9	23.1	5	15.6
		61.6		23.1		15.6
2단계 (10-15점)	11	33.3	14	35.9	15	46.9
		94.9		59.0		62.5
3단계 (16-19점)	2	6.1	10	25.6	2	6.3
		100.0		84.6		68.8
4단계 (20-25점)			4	10.2	5	15.6
				94.8		84.4
5단계 (26-28점)			1	2.6	1	3.1
				97.4		87.5
6단계 (29-34점)			1	2.6	2	6.3
				100.0		93.8
7단계 (35-40점)					2	6.3
						100
8단계 (41-47점)						
총계	33	100	39	100	32	100

본 연구에서는 개발된 자료를 적용하여 덧셈적 사고 수준의 단계인 1-4단계의 아동들이 곱셈적 사고 수준에 해당되는 5-8단계로의 변화를 중심적으로 다루었다.

2. 연구 대상

본 연구에서 곱셈적 사고 신장을 위한 교수-학습 자료 적용에 참여한 대상은 경기도 성남시의 O초등학교의 5학년 아동 15명이다. 적용 대상자들의 사고 단계별 변화 과정을 정확히 분석하기 위해 대상 아동 수를 각 단계별 2명으로 제한하였다. 자료 적용 대상자는 2007년 9월 말에 실시한 사전 검사를 통하여 0단계 2명, 1단계 아동 2명, 2단계 아동 2명, 3단계 아동 2명, 4단계 아동 2명, 5단계 2명, 6단계 2명, 7단계 1명으로 총 15명을 선정하였다.

3. 연구 절차

곱셈적 사고 신장을 위한 활동 자료의 적절성과 효용성을 검증하기 위하여 사전 검사지를 통하여 각 학생들의 곱셈적 사고 단계를 검사하고, 개발된 교재를 실제로 적용한 후 사후 검사를 통해 보다 높은 곱셈적 사고로의 변화 정도를 검증하였다.

자료 적용 학생들은 본 연구자의 학급 학생들로 정규 시간이 아닌 방과 후의 시간을 통하여 지도하였다. '다 주제 통합형'을 기본으로 하여 학생 스스로 주어진 자료를 통하여 문제를 해결해 가는 방법으로 적용되었다. 교사는 간단한 조언 정도만 하였고 학생이 주도가 되어 궁금한 것을 질문을 하였고 스스로 문제를 풀어가게 하였다. 각 활동별로 기초부터 심화로 진행되도록 되어 있어 개인마다 진행 속도, 자료의 적용, 선택이 다르다. 개발 된 자료의 적용 기간은 2007년 10월 1일부터 11월 9일까지 진행하였으며, 개인마다 시간을 따로 정하였고 개인의 사정에 따라 시간을 내어 문제를 풀어나가는 방법으로 하였다.

4. 자료 개발 방향

가. 다주제 통합형 교수-학습 자료

최종현(2004)은 개발 연구에서 학생들의 수학적 사고 과정을 구체적으로 표현할 수 있는 충분한 공간을 제공하여야 하고 학생들의 능력과 개인차, 적성을 고려하여 수준별로 구성하여야 하며 너무 자세한 안내는 안 된다고 말하고 있다. 본 연구에서도 학생들의 사고 과정을 충분히 표현할 수 있는 공간을 제공하며 수준별 개인차를 지켜 볼 수 있는 다주제 통합형 프로그램의 장점을 적용하여 개발하였다. 본 연구는 우리나라 초등학교 5학년 아동들의 곱

셈적 사고 수준을 분석하여 정답률이 낮은 문항을 중심으로 곱셈적 사고의 특성을 살려 수 영역의 확장과 정당화의 내용을 고려하여 자료를 직접 개발하였다.

나. 곱셈적 사고 단계 수준 고려

평가는 교수-학습에 중요한 재구성의 근거가 되므로 5학년 아동의 곱셈적 사고 수준 조사 결과를 분석하여 자료 개발 시 활동의 내용과 문제에 반영하였다.(<표 Ⅳ-2> 참조) 표에서 a, b, c, d로 진행하는 것은 곱셈적 사고 단계가 올라가며 수의 확장과 정당화의 수준이 올라감을 의미한다.

본 연구의 개발 자료인 가게 살리기와 스프 만들기, 비즈공예의 활동에서는 곱셈적 사고 수준 조사 문항의 정답 인원수가 25% 이하로 낮았던 문항인 식탁과 의자-g, k, l, m과 나비박물관-d와 스테인드 글래스-c 문항의 곱셈적 사고 수준을 높이기 위한 방향으로 자료를 개발하였다.

곱셈적 사고 수준 평가의 틀은 사고의 각 단계를 판별할 수 있도록 문항이 제시되어 있으므로 자료 개발에서 이러한 평가 틀의 특성을 살려서 자료를 구성하였다. 곱셈적 사고 수준

<표 Ⅳ-2> 개발 자료 곱셈적 사고 단계 적용

	단계명	단계별 곱셈적 사고 평가 문항	개발된 자료의 단계별 수준 분석
1단계	원시적 모델링 (Primitive Modelling)	**나비 박물관**-a, b **식탁**-a, b, c, d, e, f **방과후 활동**-a	**재미있는 숫자 나라**-1. 뒤집힌 숫자 맞추기 **타일**-1. 대각선 타일 **가게 살리기**-1. 양말가게 2. 아이스크림 가게 **스프 만들기**-1. 크림스프 **공예품 만들기**-1. 목걸이 2. 비즈
2단계	직관적 모델링 (Intuitive Modelling)	**식탁**-j **나비 박물관**-d **타일**-a	**재미있는 숫자 나라**-1. 뒤집힌 숫자 맞추기 **스프 만들기**-1. 크림스프 2. 브로컬리스프 **타일**-1. 대각선 타일 **가게 살리기**-1. 양말가게 2. 아이스크림 가게
3단계	감지하기 (Sensing)	**스테인드 글래스**-a, b **타일**-b	**재미있는 숫자 나라**-2. 지그재그 카드 게임 **타일**-2. 엄마 타일 아기 타일 **가게 살리기**-1. 양말가게 2. 아이스크림 가게 **공예품 만들기**-3. 퀼트
4단계	전략 탐색하기 (Strategy Exploring)	**식탁**-g, h **나비 박물관**-c, d **스테인드 글래스**-a, b	**스프 만들기**-2. 브로컬리스프 3. 야채스프 **타일**-2. 엄마 타일 아기 타일 3. 가장자리 타일 **공예품 만들기**-1. 목걸이 3. 퀼트
5단계	전략 정비하기 (Strategy Refining)	**식탁**-i, k, l **타일**-c **스테인드 글래스**-c	**재미있는 숫자 나라** -2. 지그재그 카드 게임 **스프 만들기**-3. 야채스프 **가게 살리기**-1. 양말가게 2. 아이스크림 가게 **공예품 만들기**-2. 비즈 3. 퀼트
6단계	전략 확장하기 (Strategy Extending)	**방과후 활동**-a, b **스테인드 글래스**-b, c **식탁**-h **타일**-b	**스프 만들기**-3. 야채스프 **가게 살리기**-1. 양말가게 2. 아이스크림 가게 **공예품 만들기**-3. 퀼트
7단계	연결하기 (Connecting)	**식탁**-g, l, k **타일**-a, b, c **방과후 활동**-b **스테인드 글래스**-a	**재미있는 숫자 나라**-2. 지그재그 카드 게임 **가게 살리기**-1. 양말가게 2. 아이스크림 가게 **공예품 만들기**-2. 비즈 3. 퀼트
8단계	반성적 지식 (Reflective Knowing)	**방과후 활동**-b 식탁과 의자-m, k	**가게 살리기**-1. 양말가게 2. 아이스크림 가게 **공예품 만들기**-2. 비즈

의 발달 단계에 따른 활동과 문항의 개발을 통하여 수의 영역 확장과 간단한 규칙에서 복잡한 규칙으로, 여러 가지 다양한 식을 세워보고 자신의 풀이 방법을 설명하도록 자료를 구성하였다. 특히, 곱셈적 사고의 최하 단계인 1단계부터 8단계까지 단계별로 곱셈적 사고로의 발전을 경험할 수 있고, 각 단계를 반영하도록 자료를 개발하였다.

다. 낮은 단계에서 높은 단계로의 이행

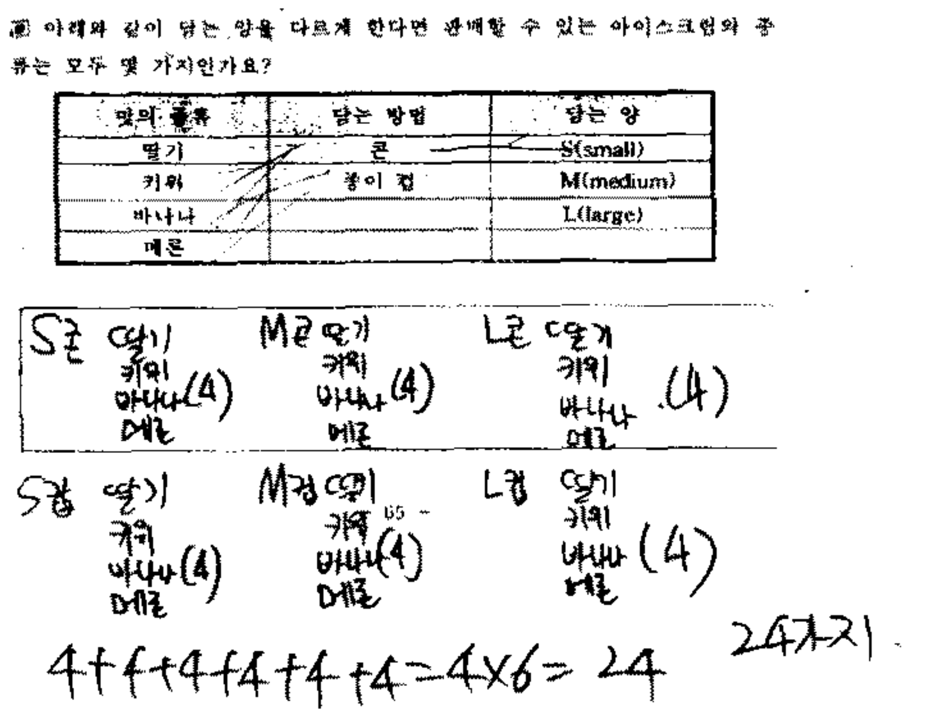
본 연구에서는 덧셈적 사고 수준에서 곱셈적 사고 수준으로의 단계별 이행에 초점을 맞추고 있다. 곱셈적 사고 수준의 단계별 이행을 위해 주제에 따라 활동 이름을 정하고 활동 내용을 구체적으로 나누어야 함을 인식하였다. 곱셈적 사고 수준의 단계를 고려하여 각 문항을 개발하되 각 문항별, 내용별로 점차 심화되고 수의 확장이 되도록 하여 곱셈적 사고 수준의 단계도 낮은 단계에서부터 높은 단계로 점차 경험할 수 있도록 반영하였다. 예를 들면, 곱셈적 사고 수준이 낮은 1단계 아동은 각 활동과 활동 내용 1과 문항 ①에서 그리거나 세는 방법을 통하여 문제를 풀 수 있도록 고려하였다. 이러한 곱셈적 사고 수준의 단계를 고려한 자료의 개발을 통하여 각 단계에서 보다 상위의 곱셈적 사고 단계로의 이행을 도울 수 있도록 하여 교사가 필요한 자료를 단계에 따라 수준을 예상하고 투입할 수 있도록 하였다.

라. 단계별 심화를 통한 자료 선택

개발된 곱셈적 사고 단계를 신장하기 위한 자료는, 한 가지 활동 안에 기본 수준에서 중간 수준으로 그 다음에 심화 수준으로 진행하는 단계별 심화의 구조를 띄고 있다. 즉, 각 활동이 기본-중간-심화의 내용으로 되어 있거나 기본-심화의 순서로 문제가 제시 되어 있어 아동들의 곱셈적 사고 수준의 단계에 맞게 자료를 선택하여 사용할 수 있도록 되어 있다. 활동 내용의 각 단계 안의 문제들도 수의 영역이나 규칙이 점차 확장되도록 되어 있어 각 단계별 아동의 특성에 따라 선택할 수 있도록 구성되어 있다. 즉, 그리거나 세는 단계인 덧셈적 사고의 단계에서 출발하여 점차 규칙을 발견하고 곱셈을 적용하며, 아동 나름대로의 식을 세워보는 곱셈적 사고로의 이행 효과를 위해 개발되었다. 활동 4의 가게 살리기를 제외한 각 활동에서 1⇒2⇒3⇒4로 번호가 증가할수록 심화된 내용으로 진행되도록 하였다. 활동 내용의 각 번호에서 ①⇒②⇒③⇒④의 순으로 수 영역이 점차 확장 되고 곱셈적 사고 수준이 높은 문제로 되어 있어, 개인별 곱셈적 사고 수준에 따라 문항을 선택하여 풀 수 있도록 개발된 자료이다.

마. 현실 상황을 통한 흥미 유발

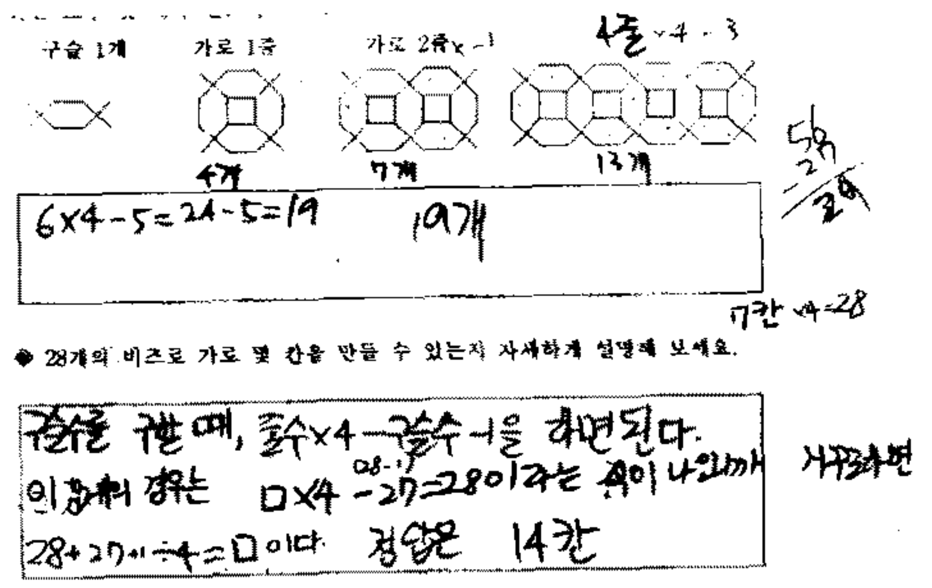
아무리 힘들게 개발한 자료라도 아동들이 풀고 싶은 마음이 들지 않는다면 아동들의 부족한 부분의 학습을 도울 수 없다. 본 연구에서 개발한 자료는 [그림 Ⅳ-1]에서 볼 수 있는 것처럼 곱셈적 사고 수준을 신장하기 위한 문제 상황의 제시를 아동들이 실제 생활에서 겪어나가는 환경을 통하여 접하게 함으로써 친근감과 호기심, 흥미를 유발하였다. 특히 아이스크림 가게 문제나 게임 형식의 숫자 카드를 이용한 활동은 아동들에게 반응이 좋았다. 음식을 만드는 실제적인 재료를 바탕으로 만든 여러 가지 스프 만들기는 아동들 대부분 관심을 많이 보였고 스프의 이름을 들으며 즐거워하는 모습도 보였다. 실생활에서 볼 수 있고 만들 수 있고, 판매가 되고 있는 비즈나 퀼트, 타일을 소재로 한 활동 역시 아동들에게 호기심과 친근감을 주었다.



[그림 Ⅳ-1] 현실적인 문제 상황의 예

바. 의사소통 기회 제공

덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 변화를 발견하는 것은 쉬운 과제는 아니다. 그 변화를 민감하게 알아내기 위해 자세한 설명을 할 수 있는 기록의 공간이 여유 있게 제시 되어야 한다. 사고의 변화를 가장 크게 알 수 있는 것은 자신이 만든 규칙을 설명하여 기록하는 것에서 두드러지게 드러난다. [그림 Ⅳ-2]에서처럼 각 문항마다 자세한 풀이 과정을 적도록 하여 아동의 사고를 표출하도록 하였고 이를 통해 곱셈적 사고 수준 단계별 변화를 명확히 알 수 있었다. 자신이 발견한 규칙이나 패턴에 확신을 가지고 확장된 수의 영역에서 사용하며, 그 방법을 기록한 내용에서 아동의 곱셈적 사고 수준에 따라 차이를 발견할 수 있다. 본 연구에서 개발한 자료는 각 문항마다 자신이 푼 문항의 풀이 과정을 자세하게 설명하도록 유도하고 있어 아동들이 자신의 곱셈적 사고에서 부족한 부분에 대한 자각과 자신 있어 하는 문제에 대한 확신을 갖게 하도록 하기 위해 개발되었다. 자료를 적용하며 자신이 설명을 못하는 문제에서 아동들의 즉각적인 반응과 태도를 볼 수 있었고, 막히는 문제를 명확히 설명해 나가고자 시도하는 모습을 보였다. 덧셈적 사고를 하는 아동은 자연스럽게 덧셈으로 설명하였고, 곱셈적 사고를 하는 아동은 곱셈을 사용한 방법을 통하여 설명을 하였다. 또한 문제를 얼마나 잘 이해하고 있으며 어떤 활동에서 이해를 못하고 있는지도 알 수 있었다.



[그림 Ⅳ-2] 공간을 통한 의사소통의 예

Ⅴ. 연구 결과

성남시 O초등학교 5학년 0점-2명, 1단계-2명, 2단계-2명, 3단계-2명, 4단계-2명, 5단계-2명, 6단계-2명, 7단계-1명으로 총 15명을 대상으로 개발한 자료를 사례연구를 통해 적용 하였다.

1. 사전·사후 검사 결과 및 단계 변화 분석

사전 검사 점수와 자료 적용 후 사후 검사 점수 변화와 단계의 변화는 <표 Ⅴ-1>과 같다.

사전 검사에서는 평균 18.2점 이였으며 사후 검사 결과 30.3점으로 평균 12.1점의 향상을 보였다. 곱셈적 사고 단계에서도 사전 검사의 결과 2.7 단계에서 사후 검사 결과 5.6 단계로 총 2.9 단계의 향상을 보였다. 3단계 아동과 4단계 세 명의 아동에서 평균 3.5점의 변화로 가장 점수 및 단계의 변화가 많았고 5명의 아동은 18점 이상의 점수 변화가 있었다. 10점 이상의 점수 향상을 보인 아동은 9명이었다.

[그림 Ⅴ-1]에서 알 수 있듯이 2단계 아동 F에서 5단계의 아동 K까지 15점 이상의 변화가 있음을 볼 수 있다. 0단계의 아동 B까지 포함

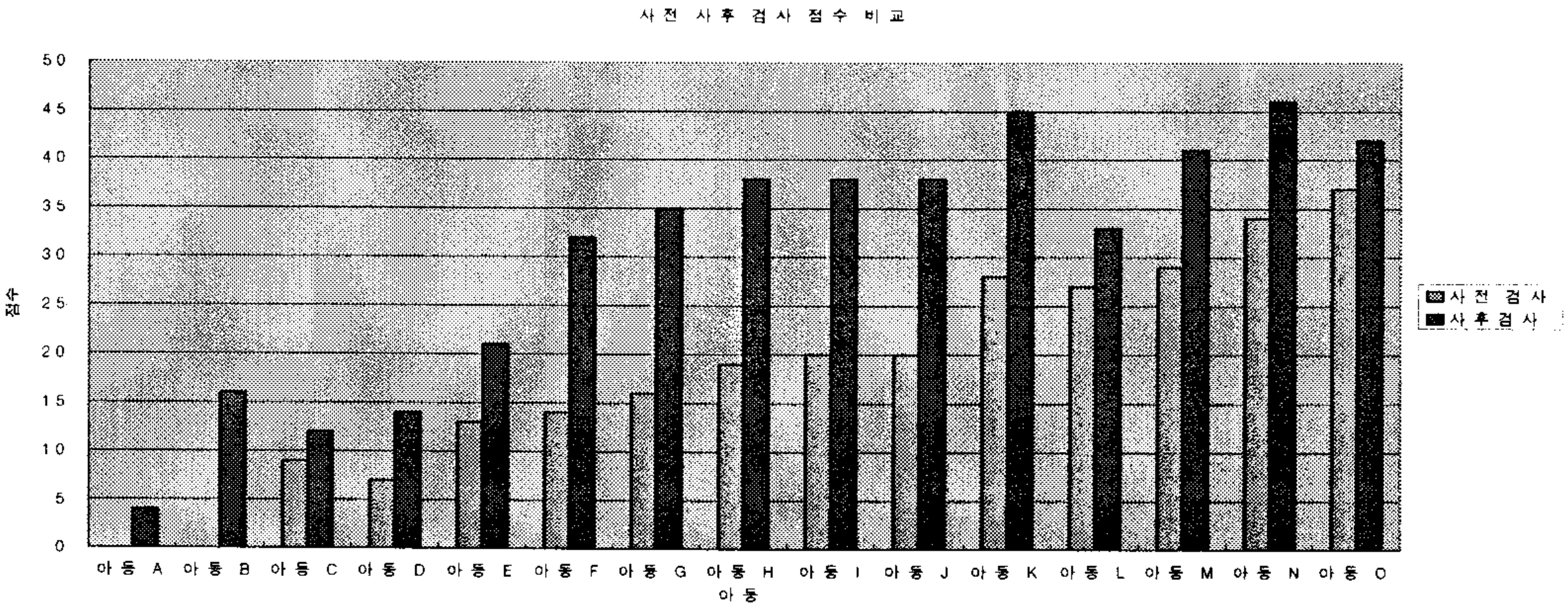
하면 15명 중에 7명(46.7%)의 아동에서 15점 이상의 점수 변화가 있었다.

[그림 V-2]의 단계 변화를 보면 한 단계가 오른 아동이 5명(33.3%)으로 나타났으며, 두 단계가 오른 아동은 3명으로 20%의 아동으로 나타났다. 나머지 7명의 46.7%의 아동에서 3단계의 변화가 나타났다.

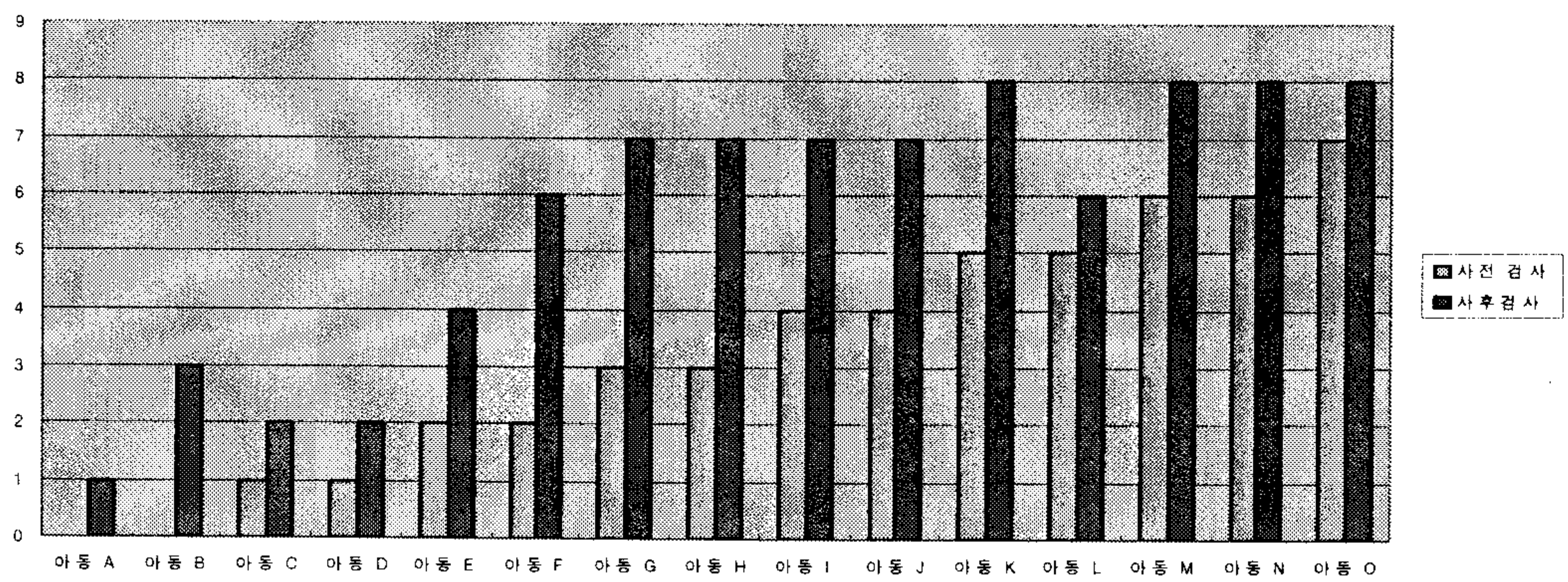
사전 검사에서 0에서 4단계까지의 덧셈적 사고를 하는 아동이 10명(66.7%)에서 사후 검사 결과 5명(33.3%)으로 나타났으며, 본격적으로 곱셈적 사고를 하는 5단계에서 8단계의 아동이 사전 검사에서는 5명(33.3%)이었으나 사후 검사 결과 10명(66.7%)으로 나타났다. 사후 검사 결과 4단계까지의 아동이 5명 줄었으며, 5에서 8단계의 아동은 5명 늘어난 것으로 나타났다.(<표 V-2>)

<표 V-1> 사전 · 사후 검사 결과 비교

단계	아동	사전 검사		사후 검사		변화 비교	
		점수	단계	점수	단계	점수 변화	단계 변화
0	A	0	0	4	1	4	1
	B	0	0	16	3	16	3
1	C	9	1	12	2	3	1
	D	7	1	14	2	7	1
2	E	13	2	21	4	8	2
	F	14	2	32	6	18	4
3	G	16	3	35	7	19	4
	H	19	3	38	7	19	4
4	I	20	4	38	7	14	3
	J	20	4	38	7	18	3
5	K	28	5	45	8	17	3
	L	27	5	33	6	6	1
6	M	29	6	41	8	10	2
	N	34	6	46	8	12	2
7	O	37	7	42	8	5	1
평균		18.2	2.7	30.3	5.6	12.1	2.9



[그림 V-1] 사전 · 사후 검사 점수 변화



[그림 V-2] 사전 · 사후 단계 변화

본 연구는 곱셈적 사고로의 이행에 중점을 두고 있다. 이에 따라 곱셈적 사고로의 이행을 구체적인 상황으로 제시하였다. 사고하는 것은 아동이 밖으로 표출하지 않으면 쉽게 알 수 없는 것이기에 아동 스스로 사고의 변화를 기록하는 방법을 통하여 알아보았다.

덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 이행을 보기 위하여 개발된 자료를 적용한 후, 아동들이 자신이 처음 풀다가 막혔던 내용과 자신이 스스로 발견한 내용을 기록해 보도록 하였고 처음 자료를 접하였을 때 해결 방법을 고민하다 발견해 낸 내용을 비교하여 보도록 하였다.

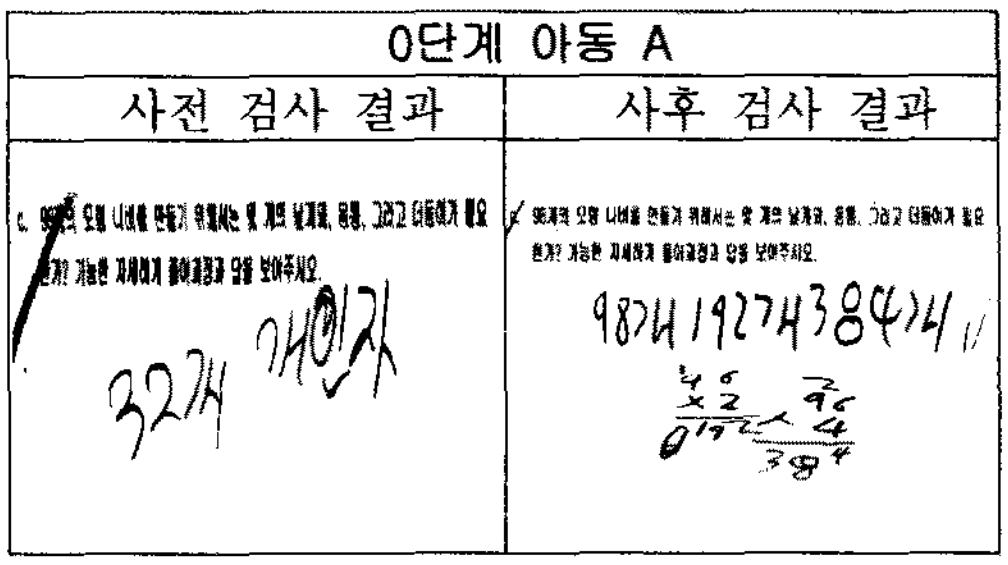
다음은 각 단계별 사전·사후 단계별 변화 분석의 내용을 몇 단계만 뽑아 정리하였다.

가. 0 단계

아동 A와 아동 B는 사전 점수가 모두 0점으로 학습지를 4장을 적용한 아동 A보다 16장을 적용한 아동 B에게서 많은 사후 검사의 차이를 나타내었다.

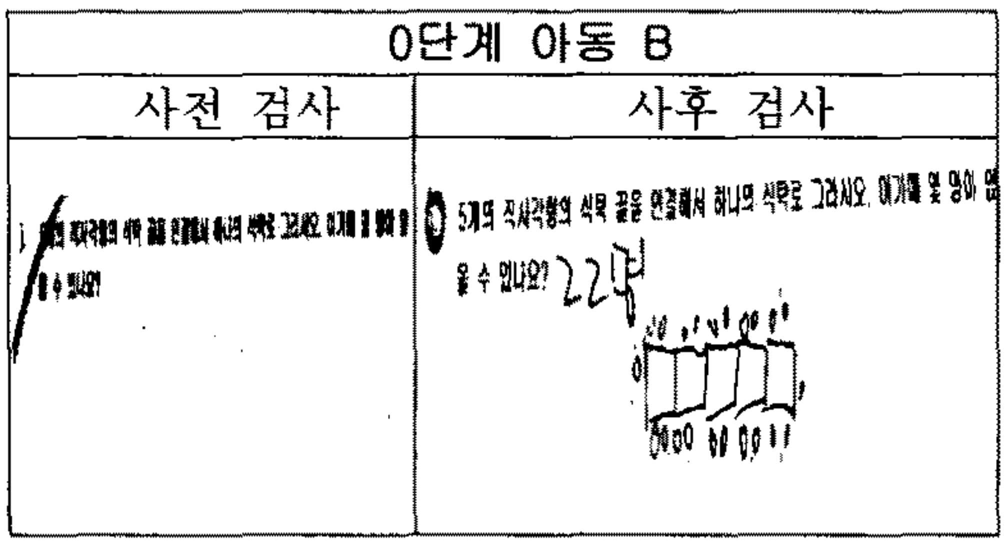
아동 학습태도 면이나 학업 성적이 비슷한 아동이나 개발된 자료의 문제를 풀며, 여러 가지 활동을 진행하는데 아동 B의 태도가 더욱 적극적이고 흥미와 관심을 보였다.

[그림 V-3]과 같이 아동 A는 근거 없이 아무 답이나 적었던 사전 검사에 비해 사후 검사에서는 표를 채우거나 설명은 없으나 정답을 제시하였고, 세는 방법을 사용하거나 곱셈의 상황을 인식하고 곱셈을 하기 시작하였다.



[그림 V-3] 0 단계 아동 A 결과

[그림 V-4]와 같이 아동 B는 사전 검사에서 거의 대부분의 문제를 풀지 않았다. 사후 검사에서는 식탁과 의자 문제(a, b, c, d, e, f, I, j)와 나비 박물관 문제(a, b, c, d), 타일 문제(a, b, c)에서 [그림 VI-4]처럼 그림을 그려 문제를 정확하게 풀었다. 정확히 표를 채우거나 곱셈이 필요한 상황에서 적절하게 곱셈을 사용하였고 세기 역시 정확하였다.



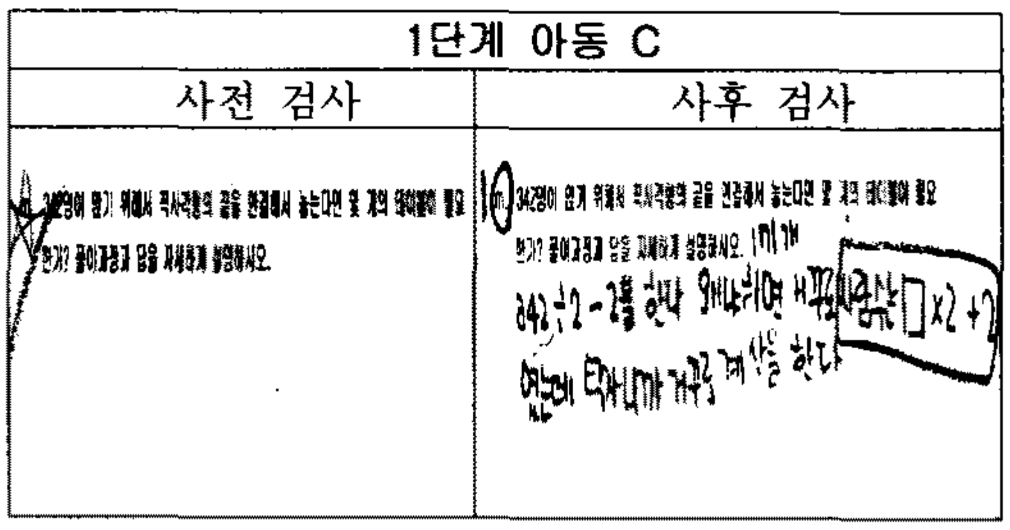
[그림 V-4] 0 단계 아동 B 결과

<표 V-2> 사후 검사 후 단계별 인원수 변화

점수 \ 단계		0단계	1단계	2단계	3단계	4단계	5단계	6단계	7단계	8단계
사전 검사	명	2	2	2	2	2	2	2	1	0
	누계(%)	10명 (66.7%)					5명 (33.3%)			
사후 검사	명	0	1	2	1	1	0	2	4	4
	누계(%)	5명 (33.3%)					10명 (66.7%)			

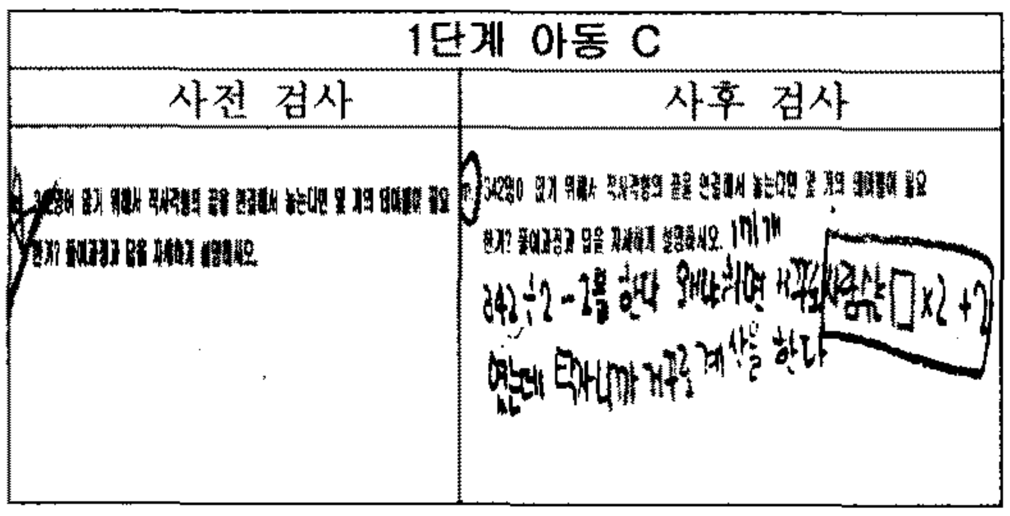
나. 1 단계

[그림 V-5]와 같이 아동 C는 사후 검사 결과 식탁과 의자의 문제(h, m)와 나비 박물관(a, b)에서 규칙을 발견하였다. 스테인드 글래스 문제에서는 보이지 않는 부분을 그려 넣어 세고자 하는 시도를 하였다.



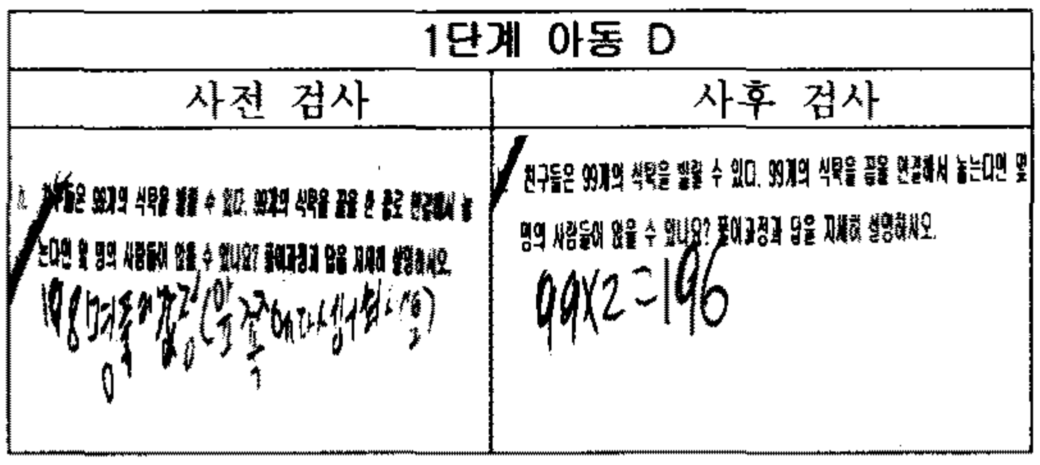
[그림 V-5] 1 단계 아동 C 결과

또한 [그림 V-6]과 같이 자신의 생각을 구제적인 식으로 표현함을 알 수 있었다.



[그림 V-6] 1 단계 아동 C 결과

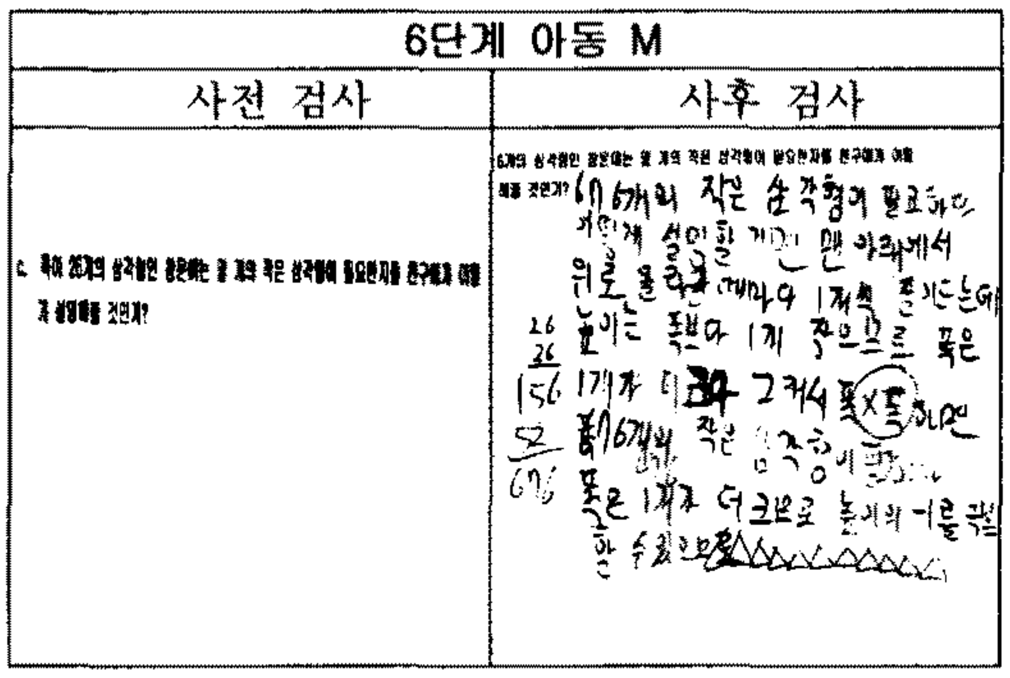
[그림 V-7]과 같이 아동 D는 식탁과 의자 문제(d, e, f)에서 정확한 그림과 표 그리기를 통하여 해결하였고, 나비 박물관(a, b, c)에서 곱셈을 이용하여 문제를 정확하게 풀었다. 방과후활동 문제(a, b)에서는 주어진 자료에서 간단한 정보를 얻어 낼 수 있음을 보였다. 타일 문제에서는 정확한 답을 맞추지는 못했지만 기본 타일의 크기를 정확히 알고 곱셈을 시도하고자 하였다.



[그림 V-7] 1 단계 아동 D 결과

다. 6 단계

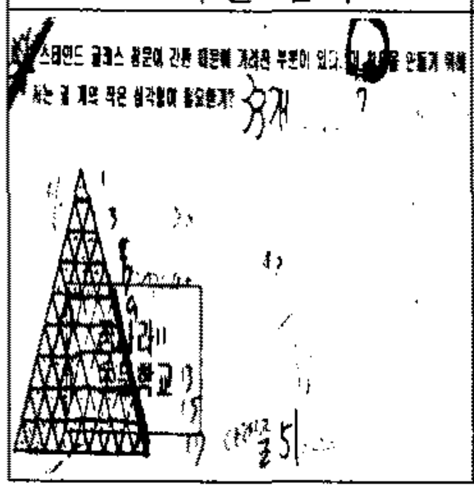
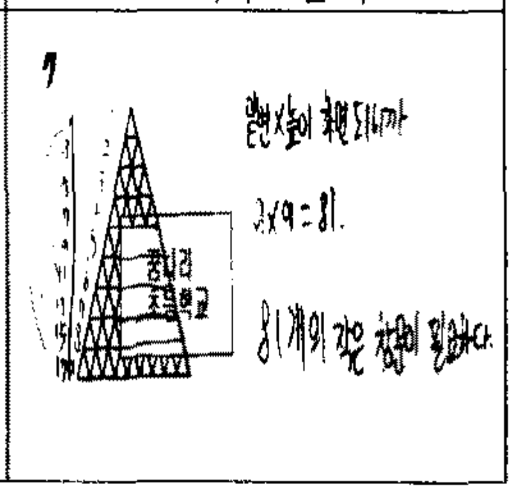
[그림 V-8]과 같이 아동 M은 사후 검사 결과 타일 문제(a, b, c)와 방과후 문제(b), 스테인드글래스 문제(a, b, c)에서 정답을 보였다. 타일 문제에서는 풀이 과정을 정확하게 설명하였고, 방과후활동 문제에서는 전체와 부분의 의미를 파악하고 분수를 이용하여 자신의 생각을 정당화하였다. 스테인드글래스 문제에서는 작은 수의 영역에서는 덧셈을 사용하였고 수의 확장된 영역에서는 <그림 V-15>와 같이 정확하게 곱셈식을 사용하여 설명하였다.



[그림 V-8] 6 단계 아동 M 결과

[그림 V-9]와 같이 아동 N은 사후 검사 결과 식탁과 의자(k)와 타일 문제(a, b, c) 방과후활동(a, b), 스테인드 글래스(a, b, c)문제에서 많은 변화를 보였다. 식탁과 의자의 문제에서는 복잡한 상황에서도 덧셈적인 규칙을 찾아내었고, 정답만 적고 설명하였던 것에서 정확한 곱

셈식을 사용하여 설명을 하였다. 방과후활동에서 전체 수에 차이가 있음을 발견하고 분수를 통하여 자신의 생각을 정확히 설명하여 정당화 하였다. 스테인드글래스에서는 문제 a부터 c까지 덧셈적인 규칙을 발견하였고, 확장된 수의 영역에서 곱셈적인 규칙을 찾아내어 정확하게 설명하고 있다.

6단계 아동 N	
사전 검사	사후 검사
	

[그림 V-9] 6 단계 아동 N 결과

2. 곱셈적 사고로의 이행 효과

가. 그리거나 세어 보기에서 곱셈식으로 변화

활동 1은 뒤집힌 숫자 맞추기에서는 덧셈과 곱셈을 혼용해서 풀 수 있는 가장 기본적인 문제인데 처음 게임을 하기 전에 연습을 할 때는 칸 수가 작을 때 세는 방법을 통하여 문제를 해결하다가 가로와 세로의 칸수가 많아지고 수 영역이 확대되면서 세는 방법보다 곱셈을 이용하는 것이 빠르고 정확하다는 것을 알게 되었음을 [그림 V-10]을 통하여 알 수 있다.

	활동 1-1.뒤집힌 숫자 맞추기	
	처음 적용시	자료 적용 후 변화
아동 G 3→7 단계	세어보았다	가로가 9개인 경우 세로 2 칸에서 가로 3칸이면 1×9= 9+3=12 (참고로 첫칸은 ×0을 해야한다)

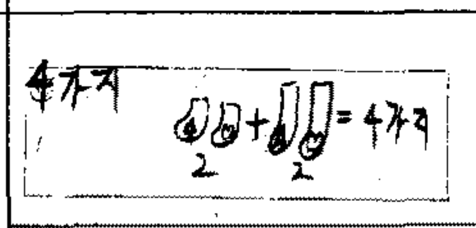
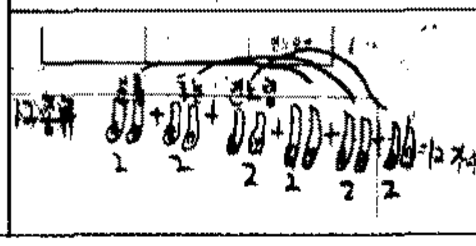
[그림 V-10] 수 맞추기에서 곱셈적 사고로의 이행

[그림 V-11]과 같이 많은 아동들이 세거나 그려 넣기를 하던 방법에서 정확하게 곱셈식을 사용하여 설명하게 되었음을 알 수 있다.

	활동 4-1. 양말 가게	
	처음 적용 시	자료 적용 후 변화
아동 H 3→7 단계	넥타이 그림을 그려서 확인해 보고 한번 세어보기도 하였다.	2가지 무늬 마지막의 3가지의 색깔이다. 즉 다 나올 수 있으므로 2×3=12
아동 G 3→7 단계	그림으로 표현 했다 하지만 시간이 너무 소요된다.	모양이 3가지 길이도 3가지 색깔도 3가지 3×3×3=27 총27가지

[그림 V-11] 세기와 그리기에서 곱셈적 사고로의 이행

[그림 V-12]와 같이 왼쪽의 활동 4-1인 양말 가게 살리기에서는 그리기와 더하기, 세기를 사용하던 아동이 활동 4-2인 아이스크림 살리기를 풀면서 규칙을 발견하게 되고 곱셈식으로 풀기 시작하였다. 활동 4에서는 다른 활동들과는 다르게 활동 내용이 단계 심화적인 것보다 내용을 반복하는 것을 중심으로 되어있어 대부분의 아동들에게 같은 효과가 나타났다.

	활동 4. 가게 살리기	
	활동 4-1 양말 가게	활동 4-2 아이스크림 가게
아동 M 6→8단계		8종류 = 담는 방법 X 맛
		맛X담는 상X방법 = 24가지

[그림 V-12] 그리기와 덧셈에서 곱셈적 사고로의 이행

[그림 V-13]에서도 세기를 하던 아동들이 자료를 적용하며 규칙을 찾아내어 정확한 곱셈식으로 표현하고 있음을 알 수 있다.

	활동 3-1 대각선 타일의 갯수	
	처음 적용 시	자료 적용 후 변화
아동 G 3→7단계	세어 보았다.	20개이면 20×2 40

[그림 V-13] 세기에서 곱셈 규칙으로의 이행

나. 정확한 곱셈식으로의 변화

처음 적용 시 [그림 V-14]와 같이 활동2의 심화 단계인 야채 스프 만들기에서 머뭇거리며 자신이 푼 방법에 확신을 가지지 못하였다. 문제를 풀며 고민한 결과, 활동 2-1, 2-2와는 다르게 기본 1인분을 주었을 때와 4인분을 주었을 때 풀이 방법이 다름을 알고 비의 개념인 나눗셈을 사용하여 문제를 해결하였다.

	활동 2-3 야채 스프 만들기	
	처음 적용 시	자료 적용 후 변화
아동 H 3→7단계	모든수에 ×4를 하여 1인분을 만들고 2인분을 구해서 하려고 했다.	[illegible] 1인분을 구해야 하니까, 모든수에 ÷4를 하여 계산 하였다
	그냥 무조건 다 ÷2를 했었다.	양파 12개는 [illegible] 즉 양파 12개로 [illegible] 만들 수 있다 그런 다음 [illegible] 14인분 또 토마토 24분 [illegible] 재료가 가장 [illegible] 부족한 재료가 [illegible] 가장 작은 재료로 [illegible] 14인분

[그림 V-14] 비의 개념을 통한 곱셈적 사고로의 이행

다. 더하는 것에서 분수를 통한 정당화로의 변화

	활동 4-1. 양말 가게	
	처음 적용 시	자료 적용 후 변화
아동 H 3→7단계	그냥 10세용숫자를 다 더함 12세용을 다 더하고 비교	전체 중의 하나이므로 [illegible] 그럼 [illegible] 약분하면 [illegible] 이므로 난 분수로 비교하였다.

[그림 V-15] 덧셈에서 분수를 통한 정당화로 이행

[그림 V-15]에서는 처음 자료를 적용하였을 때 주어진 정보에서 찾은 수를 비교하거나 더하였으나 자료를 적용한 후에는 분수를 통하여 자신의 생각을 정당화하는 것으로 변화를 보였다. 또한 처음에는 전체와 부분의 비에 대한 개념을 어려워하였으나 자료 적용 후 통분을 이용하여 비교하는 것으로 자신의 풀이 방법을 설명하였다.

라. 확장된 수 영역에 따른 알맞은 곱셈식 찾기

[그림 V-16]의 아동에서는 자신이 찾아낸 규칙이 수의 확장에서 적용되지 않음을 깨닫고 확장된 수의 영역에도 적용되는 규칙을 발견하여 곱셈식으로 나타내며 설명하고 있다.

	활동 5-2 한 줄 비즈 만들기	
	처음 적용 시	자료 적용 후 변화
아동 G 3→7단계	가로 한줄이 구슬 4개이다 가로 2줄은 4×2=8 여기서 겹쳐진 부분을 빼야 한다 가로 2줄이니 2-1=1 8-1=7 구슬은 7개이다. 틀린생각 (이규칙은 [illegible])	이규칙은 [illegible] 이렇게 나눠보면 삼삼삼 [illegible] 이런식이 된다 그러니까 4줄이면 4×3=12 +1=13 [illegible] [illegible] 반대로 25-1= [illegible] [illegible] 9칸이다

[그림 V-16] 수 영역 확장에서 정확한 곱셈식으로 이행

3. 2차 자료 개발

가. 1차 자료 적용 진도표 분석

개인별로 과제 집착력과 흥미를 가지고 지속적으로 꾸준히 학습을 한 아동들은 학습지를 17장 이상 풀어간 아동들이다. 특히 2단계 아동 F와 3단계 아동 G, H와 6단계 아동 M, N은 꾸준히 학습지를 풀고 문제에 대한 과제집착력을 가지고 성실하게 학습지를 푼 아동이며 10점 이상의 점수 향상을 보였다.

2, 3단계의 아동들은 활동 2의 야채스프 만들기의 내용 중에 곱셈과 비의 관계를 인식하는 것을 어려워하였다. 활동 4의 소수와 분수 백분율을 이용하는 문제에서는 7단계의 아동을 제외한 대부분의 단계의 아동들은 많이 머뭇거리고 어려워하였다. 활동 5의 비즈공예 문제에서는 3단계의 아동 H와 6단계의 아동 N은 자신만의 방법으로 공식을 유도해 내고 정당화하는 면을 보였다. 아동마다 곱셈적 사고의 수준에 따라 문제를 푸는 속도, 활동지를 풀어 해결하는 능력과 설명 능력에 차이를 보였다.

많은 활동지를 풀은 아동들은 같은 단계의 아동들보다 단계의 향상 정도와 점수의 향상이 단계마다 모두 높게 나타났다.

개발 자료의 초안에서 아동들이 문제를 풀이하는 과정에서 대다수의 아동이 너무 어려워하고 진도가 나가지 않는 것이나 지나치게 복잡하여 곱셈적 사고를 적용하기에 부적합한 문제들이 나타났다. 이러한 문제점들을 수정하고 보완하여 최종 완성된 자료를 개발하였다.

나. 2차 자료 적용 후 수정 및 보완

1) 1차 자료 적용 후의 문제점

활동 1에서 수 영역의 지나친 확장으로 아동들이 문제를 푸는 과정에서 풀이의 의욕이 떨어지는 것을 확인하여 가로의 칸 수를 지나키게 늘려가며 모양을 만들며 게임을 하는 심화 및 연습의 단계가 생략 되어도 좋다고 보고 생략하였다.

활동 3의 계단 타일의 경우 5학년의 수준에서 지나치게 어려워서 다음 활동으로 진행해 나가는데 방해가 되었다. 규칙을 찾기 어렵고 시간이 너무 많이 걸려서 아동들이 풀기를 거의 포기하였으므로 삭제하기로 하였다.

활동 5에서 비즈 목걸이 두 번째 문제가 지나치게 복잡하여 생략하는 것이 좋다고 보았고, 활동 6의 퀼트 이불 만들기를 활동 5와 같은 공예품으로 보고 활동 5와 묶는 것이 좋다고 생각되어 활동을 다섯 가지로 줄였다.

즉, 지나치게 5학년 아동 수준에 어렵고 패턴이나 공식을 발견하기 어려운 문제는 아동들의 흥미를 떨어뜨리고 활동의 진행을 막는 상황이 나타나므로 복잡하고 난이도가 높은 문제를 수정하거나 삭제할 필요가 있었다.

2) 수정된 교수-학습 자료

본 연구에서 개발한 자료는 최종 5개의 활동을 중심으로 완성되어 퀼트 이불 만들기를 공예품 만들기에 포함시켜 활동의 수를 줄였으며 활동 1에서의 심화 및 연습 내용은 게임에서 가로의 카드 개수를 늘려가며 게임을 하는 것으로 보충하였다. 활동 3의 색 타일의 개수 구하기에서의 계단 모양의 타일은 5학년 수준에서 규칙을 발견하기가 어렵다고 판단하여 삭제하기로 하였다.

Ⅵ. 논의 및 결론

본 연구는 초등학교 5학년 곱셈적 사고 지도를 위한 교수-학습 자료 개발 준거를 설정하고 교수-학습 자료 개발의 원형을 개발하여 적용한 후 결과를 분석함으로써 원형 및 자료 개발의 타당성을 확인하는 것이 주된 목적이다.

지금까지 국내의 곱셈적 사고에 관한 연구는 곱셈이 도입되는 2학년과 3학년을 중심으로 연구 되어왔다. 그러나 본 연구에서는 Vergnaud의 연구에서 곱셈적 개념의 장이라는 용어를 사용하여 간단하거나 복잡한 비례문제로 분석할 수 있는 모든 상황을 설명하고자 한 이론을 통하여 곱셈, 나눗셈, 분수, 비, 비례 그리고 일차함수와 같은 수학적 개념을 포함시키면서 이러한

개념들은 각각 별개로 발달하는 것이 아니라 오랜 기간을 거치면서 서로 연결되어 여러 상황 가운데서 발달하게 된다는 것을 인식하였다. 곱셈적 사고가 학생들에게 긴 시간 아주 느리게 습득되고 특히 곱셈적 사고에 어려움을 겪는 아동들이 성인이 되어서도 곤란을 겪고 있다는 것을 여러 논문에서 밝히고 있다. 곱셈적 사고의 발달을 위한 연구는 조금 더 폭넓고 구체적인 연구가 필요하며 비와 비례, 함수의 개념으로의 발달을 위한 기반으로 곱셈적 사고에 대한 중요성을 인식하고 아동들의 곱셈적 사고 수준을 분석하여 덧셈적 사고를 벗어나 곱셈적인 사고로의 이행을 위한 교수·학습의 자료가 필요하여 선행 연구를 분석한 결과 곱셈이 도입되는 2, 3학년을 중심으로 연구가 진행되어 왔으며 곱셈적 사고 수준에 대한 조사는 덧셈적 사고와 곱셈적 사고 수준을 구분하는데 그치고 있다. 본 연구는 Siemon의 곱셈적 사고 8단계를 소개하고, 곱셈적 사고 수준의 단계를 높이기 위한 자료를 개발하였다.

먼저, 곱셈적 사고 수준을 높이기 위한 교수-학습 자료의 개발을 위하여 곱셈적 사고 수준 8단계의 특성을 알아보고 호주의 교육과정과 우리나라 교육과정을 비교·분석 해보았다. 그 결과 호주에 있는 5학년 아동들의 곱셈적 사고 수준 단계는 4단계에 해당하며, 호주의 교육과정 단계에서는 3단계에 해당한다는 것을 알 수 있었다. 호주의 교육과정은 3, 5, 7학년을 중심으로 단계가 나뉘어 있으며, 각 2, 4, 6학년은 3, 5, 7학년을 거치기 위한 중간 단계로 되어있었다. 곱셈적 사고 수준 검사 틀은 수의 확장, 곱셈과 나눗셈의 정확한 사용, 풀이를 식으로 표현하는 것, 정확하게 곱셈을 사용하여 설명하였는가를 통하여 단계를 나누었다. 우리나라 교육과정에 나타난 곱셈적 문제 상황들을 분석한 결과 4학년에서는 1단계 수준에 해당하는 세기나 그리기, 표 채우기 등의 덧셈적 사고 내용이 대부분이었다. 4학년, 5학년, 6학년으로 올라감에 따라 곱셈적 사고 단계에 대한 점차적이고 구체적인 지도에 중점을 두는 것이 필요함을 알 수 있었다. 수의 영역이 확장되면서 단계적이고 심화되는 문제의 경험이 부족하고, 자신의 생각을 정당화하고 풀이과정을 설명하여 보는 기회 역시 부족한 것으로 나타났다.

자료 개발에 앞서 초등학교 5학년의 곱셈적 사고 수준을 조사하였다. Siemon의 곱셈적 사고 수준 조사의 틀을 4-6학년에 적용한 결과, 1-2단계에 해당하는 아동이 4학년은 94.9%, 5학년은 59%, 6학년은 62.5%로 나타났다. 즉, 1-2단계에 해당하는 아동이 4-6학년에서 모두 59% 이상 나온다는 것은 곱셈적 사고 수준의 신장을 위한 교수-학습 자료의 개발의 필요하다는 것을 보여 주었다.

곱셈적 사고 단계를 높이기 위한 교수-학습 자료는 다음과 같이 개발하였다.

첫째, 주제 탐구형 교수-학습의 장점을 살리고 생활 속의 여러 가지 곱셈적 상황을 경험할 수 있는 '다주제 통합형 교수-학습 자료'로 개발하였다. 여러 가지 주제에 따라 활동을 정하고 실생활에서 아동들이 쉽게 접하는 소재를 통하여 활동 내용을 정하였다.

둘째, 곱셈적 사고 단계의 각 수준을 고려하여 개발하였다. 평가는 교수-학습에서 너무나 중요한 방향을 제시하므로 곱셈적 사고 수준 조사의 결과를 분석하고 그 내용을 반영하여 개발하고자 하였다.

셋째, 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 이행을 위해 곱셈적 사고 수준이 낮은 단계에서 높은 단계로의 변화를 나타낼 수 있도록 개발하여야 한다. 각 단계별로 아동 수준에 맞추어 자료를 효과적으로 선택하고 사용할 수 있도록 하는 것에 중점을 두었다.

이러한 개발의 관점을 가지고 개발한 교수-학습 자료를 각 단계별로 현장에 적용하여 다음과 같은 결과를 갖게 되었다.

첫째, 2단계 아동 F에서 5단계의 아동 K까지의 아동에서 15점 이상의 변화가 많음을 볼 수 있다. 0단계의 아동 B까지 포함하여 15명 중에 7명(46.7%)아동에서 15점 이상의 점수 변화가 있었다.

둘째, 1단계가 오른 아동이 5명(33.3%)으로 나타났으며 2단계가 오른 아동은 3명으로 20%의 아동으로 나타났으며 나머지 7명의 46.7%의 아동에서 3단계의 변화가 나타났다.

셋째, 사전 검사 결과 0단계에서 4단계까지의 덧셈적 사고를 하는 아동이 10명(66.7%)이었으며 사후 검사 결과 5명(33.3%)으로 나왔다. 본격적으로 곱셈적 사고를 하는 5단계에서 8단계의 아동이 사전 검사에서 5명(33.3%)이었으나 사후 검사 결과 10명(66.7%)으로 나타났다. 즉, 4단계까지의 아동이 5명 줄었으며, 5에서 8단계의 아동은 5명 늘어난 것으로 나타났다.

마지막으로 곱셈적 사고 지도를 위한 교수-학습 자료의 개발 · 적용 결과는 다음과 같다.

첫째, 덧셈적 사고의 수준에 머무르던 아동이 곱셈적 사고 수준으로 이행을 보였다. 단순히 세거나 더하는 방법을 사용하여 자신이 푼 문제를 설명하던 아동이 자료 적용 후 곱셈식을 이용하여 문제를 정확히 풀고, 자신의 풀이 방법을 정확하게 설명할 수 있었다. 또한 수의 작은 영역에서 덧셈적 사고를 가지고 풀이를 하던 아동들이 확장된 수 영역 상황에서 곱셈적 사고가 필요함을 발견하고 배수나 인수를 이용하거나 비의 개념과 분수를 이용하여 문제를 풀고 정당화하는 것으로 나타났다.

둘째, 수준별 단계 심화를 통한 단계별 자료의 선택이 가능하게 되었다. 각 단계별 아동들을 2명씩 선발하고 적용하여 각 단계의 아동들의 수준에 맞는 자료가 무엇인지 확인하였고, 그에 따른 자료를 선택할 수 있는 예를 보여주었다. 개발된 다섯 개의 각 활동 안 소제목은 문항별로 기본-중간-심화의 단계를 거치도록 개발하여 아동들이 수 영역 확대에 대한 기회와 수준별 학습의 기회를 마련하였다.

셋째, 아동들의 흥미와 관심을 높이기 위해 실생활에서 접할 수 있는 소재를 선정하여 사용하였다. 또한 게임 형식의 활동을 통하여 아동들의 순발력과 활동에 적극적인 태도를 돕도록 개발하였다. 처음 활동에서 게임을 사용하여 아동들 간의 호기심과 관심을 높이도록 하였고 활동의 제목만 들어도 풀고 싶은 마음이 들도록 하여 다음 활동에 대한 기대를 갖도록 하였다.

넷째, 스스로 발견한 규칙이나 패턴을 자신만의 방법으로 설명해보도록 기록할 수 있는 공간과 지속적인 설명의 기회를 주었다. 자신이 생각해 낸 방법을 설명해 보는 기회 통해 본인 스스로 문제 해결에 대한 확신을 갖게 되었다. 기록과 설명의 공간은 아동과 교사, 아동 서로 간에 의사소통의 기회를 갖도록 하여 각 아동의 곱셈적 사고 단계를 판단하고 더 높은 단계로의 이행을 위한 효과적인 자료를 투입할 수 있도록 하였다.

곱셈적 사고를 위한 교수-학습 자료 개발은 덧셈적인 사고 수준의 아동을 보다 높은 곱셈적 사고 수준으로의 이행을 돕고, 나아가 비례적 사고와 함수적 사고에 있어서도 너무나 중요한 도움을 준다. 현행 교육과정에서는 곱셈적 사고 신장을 위한 구체적이고 실생활적인 자료가 부족하다. 점차적으로 수 영역의 확장을 경험할 수 있는 자료와 비례적 사고, 함수적 사고를 학습하기 위한 전단계로서의 곱셈적 사고 지도를 위한 다양한 자료 개발이 더욱 필요하며 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 이행

을 통하여 보다 높은 곱셈적 사고로 발전하는 것이 중요하다. 이에 따라 앞으로 5학년 이외의 다른 학년에서도 각 학년에 알맞은 곱셈적 사고 단계 자료 개발이 필요하며, 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고로의 신장을 위한 다양한 기회를 마련할 수 있는 연구들이 필요하다.

참고문헌

박교식(2003). **문제해결력 키우기**. 수학 사랑.

서은영(2007). **초등학교 수학 교수 학습을 위한 평면조각퍼즐 탐구 활동 교재 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 교육대학원.

서찬숙(2003). **문제 장면의 모델화를 통한 수업이 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 영향**. 대구교육대학교 대학원.

신재은(2005). **초등학생을 위한 비 개념 지도 방안**. 경인교육대학교 대학원.

이종욱(2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **대한수학교육학회지, 16**(2), 157-177.

이준자(2001). **초등학생들의 곱셈적 사고에 대한 조사**. 한국교원대학교 대학원.

장미라(2006). **초등학교 2학년 학생의 곱셈적 사고에 관한 연구**. 서울교육대학교 대학원.

정은실(1998). 곱셈 구조에 대한 개념적 장 연구. **제주교육대학교 과학교육연구**, 24, 57-67.

최종현(2004). **주제 탐구형 수학 영재 교수 학습 자료 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 대학원.

최효진(2004). **중학교 1학년 학생들의 비례문제 해결 전략과 함수 개념과의 관계**. 이화여자 대학교 대학원.

홍수영(2006). **초등학교 5학년 학생의 비례추론의 이해**. 한국교원대학교 대학원.

교육인적자원부(2006). 수학4-가 교사용 지도서. 대한교과서주식회사.

__________(2006). 수학4-나 교사용 지도서. 대한교과서주식회사.

__________(2007). 수학5-가 교사용 지도서. 대한교과서주식회사.

__________(2007). 수학5-나 교사용 지도서. 대한교과서주식회사.

__________(2007). 수학6-가 교사용 지도서. 대한교과서주식회사.

__________(2007). 수학6-나 교사용 지도서. 대한교과서주식회사.

Carpenter, P. et al.(1999). *Children's Mathematics Cognitively Guided Instruction.* Heinemann(Txt). 9

Clark, F. & Kamii, C.(1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal of Research in Mathematics Education, 27* (1). 41-51.

Hart, K. M.(1981). *Children's Understanding of Mathematics,* London: John Murray Ltd. 11-16.

Inhelder, B. & Piaget, J.(1958). *The Growth of Logical Thinking From Childhood to Adolescence.* New York. Basic Books: Inc.

Piaget, J.(1987). *Possibility and Necessity.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

Piaget, J., Griz, J., Szeminska, A. & Bang, V.(1977). *Epistemology and Psychology of Functions*(F. Castellanos & V. Anderson, Trans.). Dordrecht: D. Reidel Publishing.

Schwartz, J.(1998). Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations* *in the Middle Grade*. 41-52.

Siemon, D.(2006a). Forging a way forward for learner left behind':Key messages from recent research. *Anniversary lecture MAV conference*, Latrobe University.

Siemon, D.(2006b). *From the Learning and Assessment framework for Multiplica -tive Thinking*. SNMY.

Siemon, d., Izard, J., Breed, M., & Virgona, J. (2006). The derivation of a learning assessment framework for multiplica -tive thinking. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*, 113-120.

Siemon, D. & Margarita, B.(2006). *Assessing Multiplicative Using Rich Task*. RMIT University.

Sinclair, H.(1990). Learning: The interactive recreation of knowledge. In L. Steffe & T. Wood(Eds.), *Transforming Children's Mathematics Education*, 19-29.

Steffe, L.(1992). Children's multiplying Schemes. In Harel, Guershon(Eds.), *Multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. State University of New York Press. 3-39.

Vergnaud, G (1988), Multiplicative Structures. In R. Lesh & M Landau(Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grade*. 141-161.

Multiplicative Thinking in Elementary Mathematics Education - Focusing on the development of teaching-learning materials for 5th graders-

Han, Eun Hye (Sung Ho Elementary School)
Ryu, Heui Su (Gyeongin National University of Education)

Multiplication problems for the 7th curriculum focus on functional realms featuring the memorization and application of the multiplication table, exposing learners only to additive thinking characterized by simple counting and drawing. A diversity of research has yet to be conducted for the transition to multiplicative thinking that highlights the capability to solve problems by using multiplication and division in the expanded number scope like 'prime numbers', 'fractional numbers', and 'ratio/rates' and to describe accurately how they solved.

This research was designed to develop and utilize teaching-learning materials for the transition of fifth graders' additive thinking to advanced multiplicative one and to analyze the application results in order to identify validity in material development.

The following conclusions were made.

First, the development and application of teaching-learning materials for multiplicative thinking cultivation facilitated the transition from additive thinking featuring simple counting and drawing to multiplicative thinking characterized by multiplication and accurate description in a more complicated and expanded number scope.

Second, the development of materials featuring 'basic'-'intermediate'-'in-depth' courses by activity enabled learners to benefit from learning by level and expansion in number scope.

Third, the use of topics and materials closely connected to daily lives stimulated learners' curiosity, helping them concentrate more on given problems.

Fourth, communication between teachers and students or among learners themselves was promoted by continuously encouraging them to explain and by reviewing their documents identifying rules or patterns.

* key words : data(자료), additive thinking(덧셈적 사고), multiplicative thinking(곱셈적 사고), trasition(이행), level(단계), number expansion(수 확장)

논문접수 : 2008. 5. 6
심사완료 : 2008. 6. 13

[부록 1] 사전 검사 문항지 예시 자료

나비 박물관

몇 명의 아이들이 동물원에서 나비 박물관을 방문했다. 그들은 나비가 4개의 날개와, 하나의 몸통, 2개의 더듬이로 이루어졌다는 것을 배웠다.

나비관에 있으면서 모형도 만들고 질문에 대답도 했다.

***각 질문에 아주 자세히 풀이과정과 답을 설명하시오.**

a. 7마리의 모형 나비를 만들기 위해서는 몇 개의 날개와, 몸통, 그리고 더듬이가 필요한가?

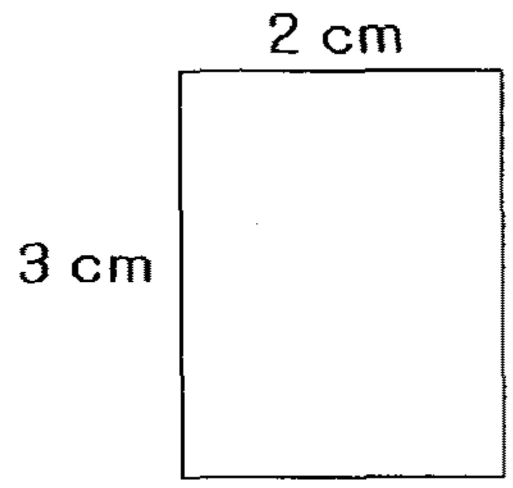
b. 16개의 날개, 4개의 몸통, 8개의 더듬이로 몇 개의 모형 나비를 만들 수 있나?

c. 98개의 모형 나비를 만들기 위해서는 몇 개의 날개와, 몸통, 그리고 더듬이가 필요한가? 가능한 자세하게 풀이과정과 답을 보여주시오.

d. 29개의 날개, 8개의 몸통, 그리고 13개의 더듬이로 몇 개의 모형 나비를 완성할 수 있나? 자세하게 풀이 과정과 답을 보여주시오.

타일문제

바닥타일과 벽타일은 사이즈가 다르다. 아래에 보여지는 것이 기본타일인데(가로2cm,세로3cm)



a. 6×4의 면적(넓이)에는 몇 개의 타일이 필요합니까?

b. 27×18의 면적에는 몇 개의 타일이 필요합니까?

c. 기본타일의 길이와 폭이 각2cm 씩 커진다면, 1제곱미터(100cm×100cm)를 채우기 위해서는 몇 개의 타일이 필요한가? 당신의 생각을 이해할 수 있도록 풀이과정을 보여주시오.

[부록 2] 예시 개발 자료.
(공예품 만들기-1, 4, 5, 7, 8 단계용)

1) 비즈 목걸이 만들기

☞ 아래의 규칙에 따라 비즈 공예 목걸이를 만들려고 한다.

○○○◇○○○◇○○○◎○○○◇○○○◇○○○

①○○○◇와 ○○○◎의 길이가 각각 1cm이다. 12cm의 길이의 짧은 팔찌를 만든다면 비즈의 모양대로 각각 몇 개의 비즈가 필요한가?

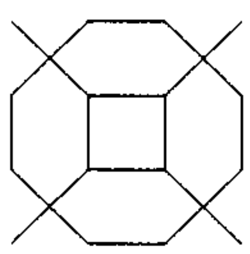
② 54cm 길이의 목걸이를 만든다면 비즈 모양마다 각각 필요한 개수는 얼마인가? (풀이 과정을 자세하게 설명해 주세요.)

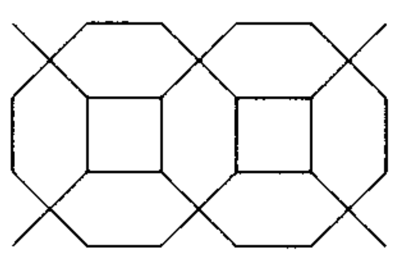
③ 66cm 길이의 목걸이를 7개 만들어 친한 친구에게 선물하려고 한다면 모두 만들기 위한 비즈 모양마다 필요한 개수는 얼마인가? (풀이 과정을 자세하게 설명해 주세요.)

2) 한 줄 비즈 만들기

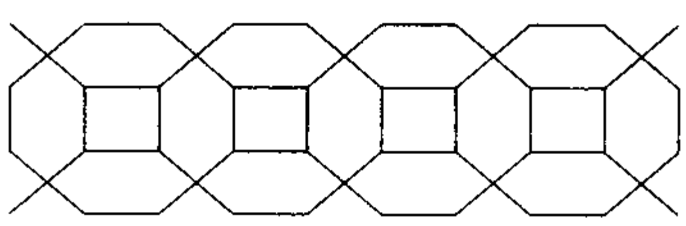
① 다음과 같이 한 줄로 비즈를 연결하려고 한다. 가로 비즈 6줄인 경우 구슬은 모두 몇 개가 필요하겠는가?

구슬 1개 가로 1줄 가로 2줄





가로 4줄



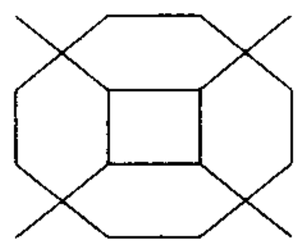
② 28개의 비즈로 가로 몇 줄을 만들 수 있는지 자세하게 설명해 보세요.

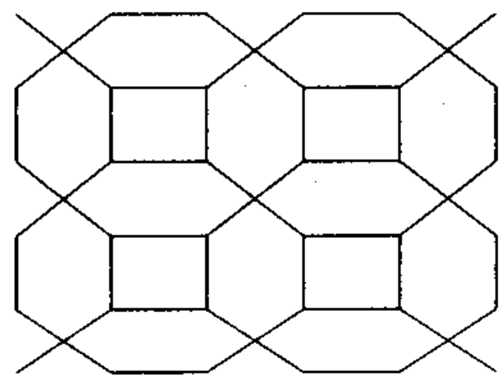
③ 가로 32줄의 비즈 모양에 필요한 구슬의 모든 개수를 구하고 설명을 자세히 써주세요.

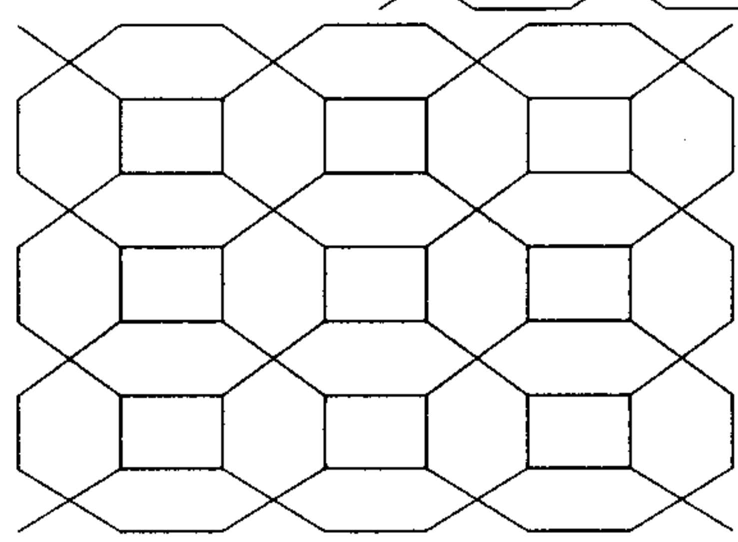
3) 평면 비즈 만들기

① 비즈를 아래와 같이 가로와 세로 줄 모두 변화를 주려고 합니다. 각 모양을 만들기 위해 들어가는 구슬의 개수를 구해 보세요.

구슬
1개







② 가로 6줄, 세로 6줄의 구슬로 이루어지는 모양에 들어가는 구슬의 총 합은 얼마인가요? (자세하게 설명해 주세요.)

③ 가로 25줄 세로 25줄의 구슬로 이루어지는 모양에 들어가는 구슬의 총합을 구해보세요. (자세하게 설명해 주세요.)

[부록 3] 단계별 개발 자료 목록

구분	주제	활동명	활동내용	곱셈적 사고 단계 적용
활동 1	숫자 카드의 규칙 발견하기	**재미있는 숫자 나라**	1. 뒤집힌 숫자 맞추기	간단한 곱셈(1단계) 단순한 패턴 인식 (2단계)
			2. 지그재그 카드 게임	패턴 인식(3단계) 규칙 찾기(5단계) 규칙 설명(7단계)
활동 2	곱셈의 사용에서 비의 사용까지	**여러 가지 스프 만들기**	1. 그림 스프	간단한 곱셈 (1단계) 두 자리 수의 나눗셈 (4단계)
			2. 브로콜리 스프	2와 5의 묶어 세기 (2단계) 익숙한 분수의 사용 (4단계)
			3. 야채 스프	익숙한 분수의 사용 (4단계) 간단한 비 (5단계) 두 자리 수의 비 (6단계)
활동 3	곱셈을 통한 패턴과 규칙 발견하기	**색 타일의 개수 구하기**	1. 대각선 타일	간단한 곱셈 (1단계) 배수의 곱셈 사용 (2단계)
			2. 엄마타일 아기타일	세기와 패턴 발견 (3단계) 두 자리 곱셈 (4단계)
			3. 가장자리 타일	세기와 패턴 발견 (3단계) 두 자리 곱셈 (4단계)
			4. 계단 타일	간단한 곱셈 (1단계) 규칙 설명하기 (7단계)
활동 4	데카르트의 곱 사용과 분수를 통한 정당화	**가게 살리기 프로젝트**	1. 양말 가게 2. 아이스크림 가게	간단한 정보 발견 (1단계) 간단한 일부분 목록화 (2단계) 덧셈적 목록화 (3단계) 덧셈적 규칙을 통한 해결(5단계) 조직적 목록화 (6단계) 비와 백분율 (7단계) 분수를 통한 정당화 (8단계)
활동 5	규칙을 발견하고 설명하기	**공예품 만들기**	목걸이 만들기	간단한 곱셈 (1단계) 두 자리 수 곱셈 (4단계) 규칙 찾기 (5단계)
			비즈 공예	간단한 곱셈 (1단계) 규칙 찾기 (5단계) 규칙 설명하기 (7단계) 규칙 정당화 하기 (8단계)
			퀼트 자수	세기와 패턴 (3단계) 덧셈적 전략 (4단계) 규칙 발견하기 (5단계) 비의 사용 (6단계) 규칙 설명하기 (7단계)