

## 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해에 대한 실태 조사

강 소 희\* · 방 정 숙\*\*

본 연구는 개정 교육과정 적용과 관련하여 초등학교 6학년 학생들의 문자에 대한 이해 실태를 조사한 것으로 검사 도구를 이용하여 292명의 학생들의 반응을 분석하였다. 분석 결과 초등학교 6학년 학생들은 상위 수준의 문자 사용 유형일수록 정답률이 낮았으며 전반적으로 낮은 수준의 문자 사용에 제한된 것으로 나타났다. 일부의 학생들만이 문자를 특정한 미지수로 여기거나 일반화된 수로 여길 수 있었다. 약 40%의 학생들이 문자 이해 수준 3에 머물러 있음을 확인할 수 있었는데, 문자 이해 수준별로 학생들이 겪는 어려움이 다양하게 나타났다. 이를 통해 대수 교수·학습 방향에 시사점을 도출하였다.

### 1. 서 론

수학은 간결한 학문이다. 문자나 기호를 이용하여 자신의 사고를 간결하게 나타내는 것이 수학의 특징이다. 문자의 사용은 대수의 형식적 언어 사용의 출발로써 앞으로의 대수 학습을 보다 의미 있게 해 나가기 위한 기초이며 대수 학습에 결정적인 역할을 한다. 어떤 문제 상황이나 관계를 문자나 기호를 사용하여 식으로 표현하여 다루는 것은 일반화를 위한 토대가 되는 것은 물론 수학을 학습해 나가는데 필요한 여러 가지 이점을 제공해준다(김남희, 1997). 또한 수학에서의 문자는 대수의 핵심이 되는 변수 개념을 표현하는 수단이므로 문자의 의미를 해석하는 능력의 진보는 대수적 사고력의 진보를 의미한다(우정호, 1998). 문자는 모든 종류의 변수를 나타내는 기호로서 자유롭게 사

용되기 때문에 변수에 대한 올바른 이해는 먼저 수학에 사용되는 문자의 쓰임새와 그 해석에 대한 이해를 필요로 한다.

NCTM(2000)의 대수 규준에서 학생들은 변수의 다양한 사용 방식에 대한 초보적인 개념적 이해가 발달되어야 한다고 강조하고 있다. 우리나라에서도 제7차 교육과정에서 문자의 사용은 수학적 문장을 간결히 표현하고 의사소통을 원활히 하게 할 수 있게 해 준다고 밝히고 있다.

한국교육과정평가원(2004)의 「수학과 교육내용 적정성 분석 및 평가」에 따르면 문자에 대한 학습 내용이 중요함에도 불구하고 실제로 계산과 대수적 조작 능력을 기르기 위한 지나친 반복 학습이 학생들의 수학에 대한 흥미를 떨어뜨렸으며, 어렵고 복잡한 계산과 대수적 조작 능력에 대한 요구는 학생들에게 수학 학습의 좌절감을 안겨주기도 하였다는 지적이 있다.

또한 초등학생들은 한 문자가 여러 가지 값

\* 대구성남초등학교(ksh0711@hanmail.net)

\*\* 한국교원대학교(jeongsuk@knue.ac.kr)

을 나타낼 수 있다는 것을 이해하지 못하며 서로 다른 문자가 하나의 값을 나타낼 수 있다는 것을 받아들이지 못한다(Küchemann, 1981; Wagner, 1981). 대부분의 초등학생들은 문자가 어떤 특정한 미지수를 나타내는 것으로 생각한다. 그러나 수학에서 문자는 변화하는 양을 나타내는 것 등 다양한 의미로 사용된다. 대수를 이해하고 행하는 데 있어서 학생들이 겪는 어려움의 주원인은 문자에 대한 좁은 해석에 기인하며(NCTM, 2000) 학생들이 문자의 개념을 잘 이해하지 못하는 이유 중의 하나는 초등학년 수준에서 다루는 문자의 예가 제한적이라는 것이다. 이는 초등학생들이 문자를 일반적인 미지수 또는 패턴의 일반화로 이용하는 활동을 하는 경우가 드물기 때문이다(Baroody & Coslick, 1998).

초등학교에서의 문자에 대한 학습은 일상생활에서 일어나는 문제나 수학 문제 상황을 문자를 사용한 식으로 명확하고 간결하게 나타내도록 하고 나아가 해결방법을 일반화하고 형식화하는 능력을 키워 상위 수준의 수학학습을 가능하게 하도록 준비시키는 데 중점을 두고 있다. 따라서 학교 수학에서 문자에 대한 학습이 가지는 의미는 매우 크다고 할 수 있다. 교육인적자원부(2006)의 『초·중등학교 교육과정 부분수정고시』에서 6학년에서의 문자  $x$ 와 방정식을 도입하고자 하는 취지도 같은 맥락으로 해석될 수 있다. 또한 대수 학습은 중등 이후 문자 도입과 함께 교육과정에서 중요하게 다루어지고 있으며 학교 대수 학습은 중학교 1학년에서부터 본격적으로 시작되나, 대수 학습의 준비 단계인 초등학교 수학에서는 문자 개념에 관한 지도가 소홀히 다루어지고 있다. 초등학교에서 문자로 사용되는 □도 형식적 도구로 사용되고 있을 뿐 그 개념 지도가 거의 없다고 볼 수 있다.

대수적인 사고를 위한 초등학교의 문자 도입의 필요성에도 불구하고 지금까지 이루어진 변

수 및 문자 개념에 대한 연구는 중·고등학생을 대상으로 한 연구가 대부분이며 초등학생을 대상으로 이루어진 연구는 미비하다. 자세히 살펴보면, 중·고등학생들의 변수 개념 이해 조사와 변수 개념에 대한 학습 지도 방향에 이론적인 토대와 대안을 제시한 연구(예, 김남희, 1997; Fujii, 2003; Küchemann, 1981; Wagner, 1981) 중학교 학생들의 변수 개념 이해에 대한 연구(예, 김지현, 2001; 김현주, 2005), 문자와 식 단원에서의 오류 분석에 관한 연구(예, 차승진, 2001)로 구분할 수 있다. 한편, 초등학생을 대상으로 이루어진 연구는 초등학교 수학에서 사용되는 문자에 대한 오개념 및 오류 분석에 관한 연구(정진희, 2004), LOGO 프로그래밍을 통한 6학년 학생들의 변수 개념에 관한 조사(신혜진, 2000) 등이 다소 이루어졌으나 학생들이 문자를 어떻게 이해하고 있으며 어떤 어려움을 갖고 있는지에 대한 연구는 최근 찾아보기 어렵다. 문자가 일상생활과 학교 수학 교육에서 갖는 의미와 중요성을 고려해볼 때 대수적 사고의 기초를 형성할 수 있는 문자에 대한 이해를 조사하는 것은 매우 의미 있는 일이다.

이와 같은 연구의 필요성을 바탕으로, 본 연구에서는 초등학생들의 문자 사용 유형을 조사함으로써 학생들의 이해 수준과 그 과정에서 겪는 어려움을 파악하여 원인을 찾고 앞으로의 초등 대수 교수·학습 방향에 시사점을 주는데 그 목적이 있다.

## II. 이론적 배경

### 1. 문자의 의미 및 성질

초등수학에서 중등수학으로 학습의 수준이 상승되어감에 따라 궁극적으로 학생들은 문자

에 주어지는 다양한 의미를 이해할 수 있어야 한다(Vinner, 2001). 문자는 수학적 언어에 추상화, 형식화의 특징은 물론 정밀성과 일반성, 그리고 유연성을 부여하는 성질을 가지고 있다. Wagner(1983)는 학생들이 문자를 쉽게 사용하기는 하나 이해를 가로막는 요인을 수나 일상 언어와는 다른 문자만이 가지는 독특한 성질 때문이라고 설명하였다. 다시 말하자면, 문자는 수와 유사한 몇몇 성질을 가지고 일상 언어와도 유사한 또 다른 몇 가지 성질을 가지며, 여전히 그 자체만이 유일하게 갖는 독특한 성질도 가지고 있다(김남희, 1995, 재인용). 문자의 여러 가지 특징을 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 II-1> 문자의 특징

구분	문자의 본질적 속성	수학언어로서의 특징
'수'와의 차이점	동시 표현의 성질	문자 사용의 일반성
'일상언어'와의 차이점	한계 결정의 자유성	
	문자 선택의 자유성	문자 사용의 유연성

<표 II-1>을 살펴보면, 동시 표현의 성질이란 문자는 동시에 많은 수를 표현할 수 있다는 것을 의미한다. 문자가 상황에 따라 미지수나 상수로 표현될 수 있음에도 불구하고, 문자를 '변수'라고 부르게 되는 것은 이러한 동시 표현의 성질에 따른 것이다. 동시 표현의 성질은 수학적 언어에 일반적인 진술이나 정의, 공리, 정리, 공식 등을 간결하게 하고 분명한 형태로 만들 수 있는 능력을 부여하는 것이다.

수학에서 사용되는 문자의 의미는 같은 문자라도 상황에 따라 그 의미가 다르기 때문에 의미들을 따로 모을 수가 없다. 그 대신 의미의 한계를 정하는데 상당히 자유롭다. 우리가 원하는 방식으로 대부분의 문자의 범위의 한계를 자유롭게 정할 수가 있다. 이것을 '한계 결정의 자유(freedom of delimitation property)'라고 한다.

또한 주어진 대상을 지칭하기 위해서 거의 아무거나 임의로 문자를 선택할 자유도 있다. 이것을 '선택의 자유(freedom of choice property)'라 한다(김남희, 1995). 문자가 갖는 '한계 결정의 자유'의 성질은 수학적 언어에 일반성을 부여하는 것과 관계가 있으며 '선택의 자유' 성질은 수학적 언어에 유연성을 부여하는 것과 관계가 있다(차승진, 2001). 'x는 수학 선생님이다'에서 문자 x는 남자나 여자에 제한이 없으며 일반화를 하는데도 전혀 문제가 없다. 또한 문자 x는 다른 문자로 바꾸어도 대상의 변화를 가져오지 않는다. 그러나, '그는 수학 선생님이다'에서 '그'에 대한 대상이 남자만으로 제한이 되어 있으며, 만약 '그'를 '그녀'로 바꾸게 되면 대상도 바뀌게 되는 것이다.

## 2. 문자 사용 유형

Küchemann(1981)은 대수에서의 문자 사용에 대한 학생들의 이해 수준을 평가하기 위해 문자의 다양한 사용법을 위계적으로 분류하여 6가지 사용 유형으로 설정하였다. 다음 <표 II-2>는 문자 사용의 위계적인 성질에 따라 제시된 Küchemann의 문자 사용의 6가지 유형이다.

<표 II-2> Küchemann의 문자 사용의 6가지 유형

구분	문자 사용의 특징
유형1	문자를 수치화함(Letter Evaluated)
유형2	문자를 사용하지 않음(Letter Not Used)
유형3	문자를 어떤 대상으로 사용함(Letter Used as an Object)
유형4	문자를 특정한 미지수로 여김(Letter Used as a Specific Unknown)
유형5	문자를 일반화된 수로 여김(Letter Used as a Generalized Number)
유형6	문자를 변수로 여김(Letter Used as a Variable)

일반적으로 유형 1, 2, 3은 문자에 대한 이해 수준이 낮은 경우이다. 문자 사용 유형 1은 처음부터 문자에 수가 할당되어 문자를 수치화하는 경우를 말한다. 즉, 문자에 어떤 조작을 행하지 않고 단순히 문자에 수치를 주게 되는 경우를 말하며 문자 사용 유형 2는 문자를 사용하지 않고 문제를 해결하는 경우를 뜻한다.

문자 사용 유형 3은 문자의 의미를 추상적인 것에서 구체적이고 실제적인 것으로 바꾸어 생각하는 경우로서 문자를 어떤 대상에 대한 약호로 다루는 경우와 문자를 어떤 대상 그 자체를 대신하는 것으로 사용하는 경우를 말한다. 문자 사용 유형 4는 문자를 특정하지만 알고 있지는 않은 수나 대상으로 여기는 경우이다. 문자를 그 값이 알려져 있지는 않지만 특정한 수를 대신하고 있는 것으로 연산 가능한 것으로 해석하는 경우를 의미한다.

문자 사용 유형 5는 문자를 단 하나의 값이 아니라 일반화된 수로 해석하여 여러 가지 값을 취할 수 있다고 보는 유형이며 문자 사용 유형 6에서 문자는 여러 개의 값으로 이루어진 두 집합 사이에 존재하는 어떤 관계를 나타내는 것을 말한다.

### 3. 문자 이해 수준

Küchemann은 학생들의 문자 이해 수준을 문자 사용의 6가지 유형에 근거하여 문자 이해 수준을 4단계로 나누어 설명하고 있다. 문자 이해 수준 1은 문자 사용 유형 1, 2, 3에 해당되는 수준으로 대수 구문의 이해와 문자식 계산에 있어서 불완전한 능력을 보이는 수준이며, 문자 이해 수준 2는 수준 1과 마찬가지로 유형 1, 2, 3에 해당되지만 대수 기호를 올바르게 사용하고 대수 구문을 바르게 이해하고 있는 수준을 의미한다.

문자 이해 수준 3은 문자 사용 유형 1, 2, 3, 4에 해당되는 수준으로 문제의 구조가 간단한 경우에 한해서 문자를 미지수로 다룰 수 있는 경우를 의미하며, 문자 이해 수준 4는 6가지의 문자 사용 유형에 모두 해당되며 문자를 미지수로 이해하여 사용하기를 요구하면서 구조가 좀 더 복잡한 문제를 다룰 수 있고 문자를 일반화된 수나 변수로 해석할 수 있는 수준이다.

문자 이해 수준 1과 문자 이해 수준 2에 있는 학생들은 구체적 현실에 연결되어 있는 문제들을 해결할 수 있으며 문자 이해 수준 3과 문자 이해 수준 4에 있는 학생들은 추상적인 혹은 가정되는 상황에 대한 문제, 그리고 여러 가지 관계를 다루면서 다양한 조작과 형식적 사고를 요구하고 있는 문제들을 해결할 수 있다(김남희, 1997).

### 4. 초등학교 수학에서의 문자 사용

초등학교 수학 교과서의 문자 사용을 살펴보면 문자를 수치화하는 과정 즉, 어떤 수를 □로 표시하고 그 값을 구하는 과정이 지배적으로 나타나고 있는 반면 일반화된 수를 표현하거나 값의 변화를 나타내는 문자의 사용이 부족함을 알 수 있다. 또한 실세계의 변하는 대상의 경험이 부족하며 비록 실세계의 변하는 대상을 다루더라도 변화의 의미가 자연스럽게 다루어지지 않고 있다.

또한 주어진 식에 포함된 □나 △에 알맞은 수를 구하는 문제가 많이 다루어지며 식에 대한 결과의 값으로 문자 □를 사용한다. 이처럼 대부분의 초등학교 수학 교과서에서 주로 사용되는 제시 유형은 수치화된 문자 사용 및 문자의 자리지기 표현이다. 변하는 대상에서의 변화의 의미나 일반화된 표현에서의 대표의 의미보다도 수 계산을 위한 대입의 의미로 상당히 강조되어 다루어지고 있다는 것이다.

수학 교과서에 사용되는 문자의 특징은 크게 2가지로 설명할 수 있다. 첫째, 문자를 주로 방정식의 해에 대한 자리지기로 다루는 경향이 강하다. 문자의 여러 본질 중 하나인 문자를 수치화하여 사용하는 자리지기로써의 의미가 강조되고 있다. 이는 문자의 본질을 이해하는데 대단히 제한된 의미만을 다루고 있는 것이다.

둘째, 문자가 나타내는 대상이나 주어진 맥락에서 문자가 의미있게 다루어지지 않고 있다. 이러한 상황에서 학생들은 문자를 포함하고 있는 문제를 기계적으로 해결할지는 모르나 문자의 본질과 그 의미를 충분히 경험하지 못했기 때문에 문자의 실질적인 의미를 제공하기는 어렵다.

### III. 연구 방법

#### 1. 연구 대상

본 연구에서는 대구시 달서구에 소재한 초등학교 47개 학교 중에서 약 21.3%에 해당하는 10개 학교를 임의 선정하고, 선정된 10개 학교에서 6학년 1개 반, 전체 292명을 연구 대상으로 정하여 분석하였다.

#### 2. 연구 방법 및 검사 도구

초등학교 6학년 학생들의 문자 사용 및 이해 수준을 살펴보기 위한 목적으로 제작된 검사 도구는 '문자 이해 검사지'라 하였다. 문자 □, ○, △ 등과 학생들이 쉽게 접할 수 있는 한글, 영어 문자를 사용하여 문항을 구성하였다.

변수와 문자에 대한 선행 연구(예, Küchemann,

1981; 김남희, 1997)와 초등학교 및 중학교 수학 교과서 분석을 토대로 초등학교 6학년 학생 수준에 맞도록 연구자가 개발하였다. 예비 검사를 거쳐 완성된 최종 문자 이해 검사지의 검사 항목과 문항 수를 제시하면 다음 [그림 III-1]과 같다. 객관식 9문항, 주관식 9문항 총 18문항으로 구성되어 있으며 각 유형별 3문항씩으로 구성되어 있다.

본 연구에서는 개발된 문자 이해 검사의 신뢰도를 검증하기 위해, 검사 신뢰도(test reliability)와 문항신뢰도(item reliability)를 측정하였다. 우선 검사 신뢰도인 Cronbach의  $\alpha$ 값을 구한 결과는 다음 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 문자 이해 검사지의 신뢰도

N of Cases	N of Items	Alpha
292	18	.8096

문항 신뢰도는 점이연상관계수<sup>1)</sup>(the point biserial correlation coefficient)로 측정하였는데, 결과는 <표 III-2>와 같다. 점이연상관계수가 0.09보다 작은 값은 나타나지 않으므로 문자 이해 검사지가 신뢰할만하다고 해석된다.

<표 III-2> 문자 이해 검사지 문항의 유형별 점이연상관계수의 평균

유형	1	2	3	4	5	6
점이연상관계수	0.297	0.401	0.419	0.574	0.503	0.433

#### 3. 검사 실시 및 자료 분석

##### 가. 검사 실시

초등학교 6학년 학생들을 대상으로 문자 이

1) 검사의 전반적인 질은 그 문항의 질로 구성된다는 가정을 바탕으로 각 문항들의 성취 정도를 다루는 문항 신뢰도는 점이연상관계수로 측정할 수 있다(Leake, 1996; 김선희, 이종희, 2003).



해 검사지에 대한 제반 정보(검사 시간, 검사 문항의 진술 형태와 난이도, 검사 문항 수와 구성, 검사 실시 상의 유의점)를 얻기 위해서 먼저 1, 2차 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사를 통해 문제점을 수정·보완한 후 연구 대상 학생들에게 2007년 9월 10일과 20일 사이에 본검사를 실시하였다. 본검사에서는 문자 이해 검사지 I 과 II를 담임교사가 직접 실시하였으며, 각 학급 교실에서 30분씩 2차시 분량으로 이를 동안 오전에 실시하도록 하였다.

### 나. 자료 분석

1) 문자 사용 유형에 따른 학생들의 반응  
초등학교 6학년 학생들의 문자 사용 유형을

살펴보기 위해서 각 문항에 대한 학생들의 정답과 오답, 무응답, 그리고 오답의 유형별 빈도수를 조사하여 백분율로 나타내고 분석하였다. 일부 학생들의 풀이 과정과 그에 대한 답변이 다른 경우에 대해서는 현장교사들과 상의하여 채점을 하였다.

채점 결과에 대한 객관도를 알아보기 위해 연구자를 포함함 3인의 채점자를 선정하고 채점자간의 신뢰도를 구하였다. 본 연구자를 제외한 채점자 2인은 대학에서 모두 초등수학교육을 전공하였으며 교육 경력 5년과 4년의 여교사이다. 문항 채점에 앞서 채점자에게 본 연구의 목적과 연구 문제를 설명하고 평가 문항 내용과 채점 기준을 알려주었으며 동일한 문항에 대해 한 학급의 검사지를 제공하여 상호 독

구분				검사항목	검사내용	문항
문 자 이 해 수 준 1 ↓	문 자 이 해 수 준 2 ↓	문 자 이 해 수 준 3 ↓	문 자 이 해 수 준 4 ↓	유형 1 문자를 수치화함	◦ $\square \times 4 + 2 = 82$ 식에서 $\square$ 값 구하기	I-1
					◦ $5 \times \square = 35 \dots\dots \textcircled{㉞}$ , $5 \times 7 = \square \dots\dots \textcircled{㉟}$ 두 식에서 $\square$ 값 비교하기	II-1
					◦ $(2 \times 3) \times 4 = a \times 4 = b$ 식에서 a와 b 값 구하기	II-2
	유형 2 문자를 사용하지 않음	◦ $a + b = 43$ 일 때 $a + b + 2$ 의 값 구하기	I-2			
		◦ $\square - 246 = 762$ 일 때 $\square - 247$ 의 값 구하기	I-5			
		◦ (가) + (나) = 3 일 때 (가) + (나) + (다) 값 구하기	II-6			
	유형 3 문자를 어떤 대상으로 사용함	◦ $C = 3 \times A + B$ 이고 A값이 2, B의 값이 3일 때 C의 값 구하기	I-3			
		◦ '우리 학교 학생의 수는 선생님 수의 6배이다'를 S와 T를 사용하여 식으로 표현하기	I-6			
	유형 4 문자를 특정한 미지수로 여김	◦ $(2 \times a) + (5 \times a)$ 를 간단히 하기	II-3			
		◦ 'a × 3 에 4를 더하여라.' 를 식으로 나타내기	I-4			
		◦ 가려진 도형에서 A개의 변으로 이루어진 도형의 한 변의 길이가 모두 3일 때 둘레의 길이 구하기	II-4			
	유형 5 문자를 일반화된 수로 여김	◦ '□ + 5 에 4를 곱하여라.' 를 식으로 나타내기	II-7			
		◦ 가로가 a+4, 세로가 8인 직사각형의 넓이를 식으로 표현하기	I-7			
		◦ $3 + \square = \bigcirc + 3$ 식의 참, 거짓 구분하기	II-5			
	유형 6 문자를 변수로 여김	◦ 도형의 둘레의 길이를 p를 사용한 식으로 나타내기	II-8			
		◦ $\square \times 2$ , $\square + 2$ 두 식의 크기 비교하기	I-8			
		◦ □단계일 때 정삼각형의 개수를 □를 사용한 식으로 나타내기	I-9			
					◦ 타일 배열에서 ㉞단계의 타일 수를 식으로 표현하기	II-9

[그림 III-1] 문자 이해 검사지의 검사 내용

\*문자 이해 수준 1과 수준 2를 구분하는 문항 제시 : I-3, II-3, II-6

립적으로 채점하도록 하였다. Pearson 상관계수를 구한 결과는 다음 <표 III-3>과 같다.

<표 III-3> 3명의 채점자간의 채점 점수의 상관계수

	채점자 1	채점자 2
채점자 2	.808	.
채점자 3	.939	.869

p < .01

위의 <표 III-3>에서 채점자 1과 채점자 2의 신뢰도는 0.808이며, 채점자 2와 채점자 3의 신뢰도는 0.869, 채점자 1과 채점자 3의 신뢰도는 0.939로 나타났다. 이 상관계수는 0.01 수준에서 유의하다는 것을 나타냈다. 이를 통해 채점자간의 신뢰도가 높은 것을 알 수 있었다. 이렇게 얻어진 자료를 바탕으로 초등학교 6학년 학생들의 문자에 대한 사용 유형을 살펴보았다.

## 2) 문자 이해 수준

문헌검토를 바탕으로 4단계로 문자 이해 수준이 설정되었고 이 수준에 따라 학생들의 반응을 분석하였다. 이때 수준별로 진술된 문항이 타당한 위계성을 갖는지 검증할 필요가 있어 본 연구에서는 누적척도인 거트만 척도(Guttman Scale)를 사용하였다(옥치상, 2001).

문항 반응이 풀이과정 및 답이 바른 경우는 1, 그렇지 않은 경우는 0으로 코드화하고 어떤 수준의 문항 집단에서 최소 2/3를 옳게 답한다면 그 학생은 그 수준에서 1을, 그렇지 않으면 0을 배정하였다. 수준의 위계에 맞지 않는 오류의 수는 코딩 결과에서 1이전에 0이 있는 개수로 계산될 수 있으며 1수준과 4수준에서 정답을 하고 2수준과 3수준에서 오답을 했다면 1001로 오류의 수는 2이다. 이러한 과정을 거쳐 거트만 척도가 실행되었으며 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해 수준이 측정되었다.

거트만 척도의 적합도는 재생가능성 계수(the

Coefficient of Reproducibility [CR])로 평가되며, 재생가능성의 계수는 ‘모든 관찰된 검사에서 반응의 패턴이 척도 점수만으로 얼마나 믿을 수 있게 재생될 수 있는지(Leake, 1996)’를 가리키는 것으로써 재생가능성계수가 보통 0.85이상이면 거트만 척도가 타당하다(김선희, 이종희, 2003). 본 연구에서 292명을 연구 대상으로 24개의 오류가 발생하였으며 문항수는 18문항이므로, 재생가능성 계수는 다음과 같다.

$$CR = 1 - \frac{\text{오류의 총수}}{\text{문항수} \times \text{학생수}} = 1 - \frac{24}{18 \times 292} \approx 0.9954$$

본 연구에서의 CR은 약 0.9954이며 이것은 0.85 이상이 되므로 본 연구에서 사용된 검사지의 타당함을 말해준다. 따라서 이 척도에 따라 학생들의 문자 이해 수준이 측정되었다.

## 3) 문자 이해 수준에 따른 어려움

문자 이해 수준별로 학생들의 반응을 비교·분석하여 문자를 이해하고 사용하는 과정에서 어떤 어려움을 겪고 있는지 심층적으로 알아보았다. 문자 이해에서 학생들이 겪고 있는 어려움은 우리나라와 외국의 여러 실험 연구(예, 김남희, 1997; 송옥빈, 2003; 황우형, 1993; Collis, 1974; Fujii, 2003; Usiskin, 1988; Wagner, 1981)에서 밝혀진 변수 개념에 대한 인지적 장애 유형과 관련하여 원인을 살펴보았다.

빈도수와 백분율을 비교하였으며 각 문항별로 학생들의 정답, 오답과 이유를 상세히 분석하여 학생들이 문자 이해 수준에 따라 어떤 어려움을 겪고 있는지 그 특징이 무엇인지 기술하였다. 이때, 무응답은 오답으로 간주하여 분석하였다.

각 수준별 학생들의 검사지를 토대로 상위 수준에 도달하지 못한 이유를 분석하기 위해

한 단계 위의 상위 단계 문항들을 분석하였다. 즉 수준 0의 학생들은 수준 1에 속한 문항을 분석하며 수준 1의 학생들은 수준 2에 속한 문항을 분석하고, 수준 2의 학생들은 수준 3에 속한 문항을 분석하며 마지막으로 수준 3의 학생들은 수준 4에 속한 문항을 분석하였다. 그 이유는 상위 수준의 문항에서 나타난 어려움은 차 상위 수준의 문항에도 반복적으로 나타날 것이라고 예상했기 때문이다.

## IV. 결과 및 분석

### 1. 문자 사용 유형에 따른 학생들의 반응

초등학교 6학년 학생 292명의 검사지를 분석한 결과는 <표 IV-1>과 같다. 여기서 말하는 문자 사용 유형 빈도수란 해당 유형에 포함된 문항 중 2/3이상 정답을 한 학생수를 말한다.

<표 IV-1> 문자 사용 유형 빈도수<sup>2)</sup>

구분	유형 1	유형 2	유형 3	유형 4	유형 5	유형 6	오류
빈도수 (%)	262 (89.7)	240 (82.2)	244 (76.7)	172 (58.9)	109 (37.3)	55 (18.8)	24 (8.2)

\* 표에 제시되는 모든 %는 빈도수/계 ×100이며, 소수 둘째 자리에서 반올림함.

초등학교 6학년 학생들은 위계 있는 6가지의 문자 사용 유형 문항에 대해 수준이 낮은 유형에서는 유형 1이 89.7%, 유형2는 82.2%, 유형 3은 76.7%의 높은 비율의 학생들이 속해 있으며 이와 반대로 비교적 높은 유형인 유형 4, 5, 6에서는 58.9%, 37.3%, 18.8%의 학생들이 포함되

었다. 유형 1에서 유형 6으로 수준이 높아질수록 적은 수의 학생들이 속하는 것으로 드러났다. 특히, 유형 6 즉, 문자를 수치화하여 계산하는 능력과 문자를 어떤 대상으로 사용하는 능력이 우수하다는 것을 보여주며 상대적으로 문자를 일반화된 수로 여기거나 변수로 사용할 수 있는 학생들의 비율은 18.8%로 드러났다.

문자 사용 유형별로 학생들의 반응을 좀 더 상세히 기술하면 다음과 같다.

### 가. 문자 사용 유형 1

2.  $(2 \times 3) \times 4 = a \times 4 = b$  인 식에서 a, b의 값은 얼마인가?

<표 IV-2> 문항 II-2에 대한 학생들의 반응

문항	반응	반응 종류	학생수(%)
II-2	정답	a = 6, b = 24	203 (69.5)
		a = 24, b = 96	79
	오답	a = 5, b = 20	5
		a = 2, b = 3	3
		a = 24, b = 24	2
		기타	4
	무응답	4 (1.4)	
합 계			292 (100)

문항 II-2는 처음부터 a와 b값에 수치가 할당되어진 문제로 학생들의 정답률이 높을 것이라고 예상했었다. 그러나, 학생들은 a의 값에  $(2 \times 3) \times 4$ 을 모두 계산한 24를, b의 값에 a의 값인 24에 4를 곱한 96을 답한 학생이 79명이나 되었다. 이는 학생 대부분이 a의 값이  $(2 \times 3)$ 이라는 처음부터 할당된 수치가 있음을 생각하지 못하고 간과했기 때문이며 또한 학생들의

2) 표에서 오류는 수준이 낮은 유형의 문항에서 오답을 하고서도 높은 유형의 문항에서는 정답을 하는 것처럼 위계가 있는 문항에 오류를 보이는 학생으로 총 292명 중 24명이 문자 사용 유형 빈도수 분석에서 제외되었다.



등호 개념이 바르지 못해 식을 계산하는데 영향을 주었을 것이라고 분석된다.

이밖에도 오답의 종류로  $a = 5$ ,  $b = 20$ 으로 오답을 한 학생들이 5명이었다. 이 학생들은 문제에서 제시된 2, 3, 4 수의 순서대로 그 뒤에 오는 수인 5로  $a$ 의 값을 정했으며 그 뒤  $5 \times 4$ 를 계산하여  $b$ 의 값을 20이라고 답하였다<sup>3)</sup>. 이 결과는 변수 기호의 임의성에 대한 이해 결여로 나타나는 현상으로 수학에서 문자가 가지는 특성인 '선택의 자유성'을 이해하지 못하여 벌어지는 현상이다.

#### 나. 문자 사용 유형 2

6. (가) + (나) = 3 이면 (가) + (나) + (다)의 값은 얼마인지 식으로 나타내보시오.

<표 IV-3> 문항 II-6에 대한 학생들의 반응

문항	반응	반응 종류	학생수(%)
II-6	정답	3 + (다)	148 (50.7)
		오답	130 (44.5)
	6	78	
	3	28	
	3 + □	6	
	1 + 2 + (다)	6	
	기타	12	
	무응답	14 (4.8)	
합 계			292 (100)

문항 II-6에서 학생들은 (가) + (나)의 값이 3으로 (가)와 (나)문자가 없어진다 하더라도 값을 모르는 (다)라는 문자가 남아있게 되면서 혼란을 주어 낮은 정답률을 보였다.

오답의 반응 종류를 살펴보면 오답의 약

60%의 학생들이 6을 답으로 썼으며 (가) + (나)의 값이 3이므로 (가), (나), (다) 순서에 의해 학생들은 숫자 1, 2, 3을 대응 시켜 그 값을 모두 더해 (가) + (나) + (다)의 값을 6으로 구하였다. 이는 앞서 설명했듯이 다른 문자와 수가 유사한 순서 매김의 성질을 가지는 특성에 지나치게 집착하고 있는 학생들에게서 나타나는 오류이다(김남희, 1995).  $1 + 2 + (다)$ 를 답으로 쓴 학생들도 이와 마찬가지로 (가)의 값에 1을, (나)의 값에 2를 대응시켜서 구한 것이다<sup>4)</sup>.

여러 오답 반응 종류 중에서 3을 답한 학생들은 28명이나 있었으며 이는  $3 + (다)$ 라고 적기에는 (다)의 값을 모르고 또한 연산기호 '+'가 그래도 남아있는 대수식을 불완전하게 생각하고 어떻게든 숫자로 유일하게 답을 하려는 경향을 보인 것으로 파악되었다. 이것은 Collis(1974)가 말하는 '완결성 결여의 수용(Acceptance of lack of closure) 능력'이 부족하다는 것을 말한다. 완결성 결여의 수용 능력이란 연산을 행하지 않은 대수식을 그대로 받아들일 수 있는 능력을 말하는데 답이 반드시 수여야만 하며 산술적 사고에 지나치게 얽매어 산술기호에 의해 무언가 계산하려고 생각하는 학생들의 오류를 잘 대변하고 있다.

#### 다. 문자 사용 유형 3

6. 학생을 S로, 선생님을 T로 나타낼 때, '우리 학교에는 선생님 수의 6배의 학생들이 있다.'를 S와 T를 사용하여 식으로 바르게 표현한 것은 어느 것인가?

3) 학생들의 계산에서 연산 기호를 잘못 보는 오류, 즉, 이 문제에서는  $2 \times 3$ 을  $2+3$ 으로 보고  $a=5$ 라고 답할 가능성이 있으나, 실제 풀이 과정을 보면, 그렇게 계산한 경우는 없었다.  
 4) 문자를 사용하지 않고도 문제를 해결할 수 있는 능력을 알아보는 문자 사용 유형이기에  $1 + 2 + (다)$ 는 오답으로 처리하였다. 또한  $3 + \square$ 를 답으로 쓴 학생들도 오답으로 분류하였다. 학생들이 흔히 모르는 값은  $\square$ 로 두고 해결하려는 경향이 강한 것으로 드러났다.

<표 IV-4> 문항 I-6에 대한 학생들의 반응

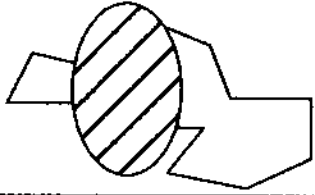
문항	반응	반응 종류	학생수(%)
I-6	정답	② $S = 6 \times T$	194 (66.4)
	오답	① $S = T$	5
		③ $T = 6 \times S$	67
		④ $S = T + 6$	23
		무응답	3 (1.0)
합 계			292 (100)

‘우리 학교에는 선생님 수의 6배의 학생들이 있다.’를 학생 수는 S, 선생님 수는 T로 하여 식으로 나타내라는 문항 I-6은 객관식으로 제시하였으며 오답의 약 70%가 ③  $T = 6 \times S$  이었다. 무응답 및 오답률이 33.5%로 많은 학생들이 문자를 포함한 문장제를 식으로 표현하는 것에 어려움을 느끼는 것으로 드러났다.

오답의 대부분이 ③  $T = 6 \times S$ 인 이유는 다음과 같다. 학생들이 범하는 오류는 문장에서 단어의 배열이 곧 식에서의 기호에 순차적으로 대응한다고 생각하는 것이다. 다시 말해, ‘선생님 수의 6배의 학생들’이라는 단어의 배열 그대로  $T = 6 \times S$  라고 답했기 때문이다.

라. 문자 사용 유형 4

4. 아래 그림처럼 빗금친 부분에 가려진 도형은 A개의 변으로 이루어진 도형의 한 변의 길이가 모두 3이다. 이 도형의 둘레의 길이를 A를 사용한 식으로 나타내보시오.



<표 IV-5> 문항 II-4에 대한 학생들의 반응

문항	반응	반응 종류	학생수(%)
II-4	정답	$A \times 3$ 또는 $3 \times A$	186 (63.7)
	오답	36을 포함한 특정한 수	32
		$\square \times 3$	10
		$3 + 3 + 3 + \dots$	5
		기타	39
무응답			20 (6.8)
합 계			292 (100)

63.7%의 정답률을 보인 문항 II-4는 가려진 도형에서 A개의 변으로 이루어진 도형의 한 변의 길이가 모두 3일 때 이 도형의 둘레의 길이를 구하는 문항이었다. 주관식 문항으로 제시되어 무응답률이 6.8%로 높았으며 오답의 기타 의견도 다양했다. 빗금으로 가려진 그림으로부터 수학적 관계를 추출하여 식으로 표현하는 것은 같은 유형에 속한 다른 문제보다 더 어렵다고 분석되었다.

빈도수가 가장 높은 오답 반응 종류를 살펴보면 36을 포함한 특정한 수를 쓴 학생들이 가장 많았다. 보기에 제시된 도형의 그림이 변이 대략 12개로 추측하고 문제를 해결한 학생들이 많았으며 보기에 제시된 빗금으로 가려진 도형 위에 변의 개수를 추측하기 위해 직접 그려본 학생들이 많았다. 그 다음으로  $\square \times 3$ 이 10명으로 많았는데 문항 진술 형태에서 둘레의 길이를 A를 사용한 식으로 표현하기를 명시하였으므로 오답으로 처리를 하였다.  $\square \times 3$ 이라고 답한 학생들은 문제에서 제시되지 않은 모르는 값은 흔히 사용하던 ‘ $\square$ ’라는 표현으로만 나타나야 한다고 생각하고 있었다.  $3 + 3 + 3 \dots$ 이라고 답을 쓴 학생들은 문제에서 의도하고자 하는 것을 바르게 알고 있으나 식으로 표현하는데 어려움이 있는 것으로 해석된다.

마. 문자 사용 유형 5

5.  $3 + \square = \circ + 3$  라는 식에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 어느 것인가?  
 ①항상 참이다.(항상 등호가 성립한다)  
 ②항상 거짓이다.(항상 등호가 성립하지 않는다)  
 ③어떤 경우에는 참이 될 수도 있다.(등호가 성립하지 않는 경우가 있을 수 있다)

<표 IV-6> 문항 II-5에 대한 학생들의 반응

문항	반응	반응 종류	학생수(%)	
II-5	정답	③어떤 경우에는 참이 될 수도 있다.	117 (40.1)	
	오답	①항상 참이다.	65	160 (54.8)
		②항상 거짓이다.	95	
		무응답	15 (5.1)	
합 계			292 (100)	

문항 II-5는 40.1%로 다른 유형 5의 문항에 비해 정답률이 떨어지는 것으로 나타났다. 문항 II-5는  $3 + \square = \circ + 3$  식의 참, 거짓 구분하는 문제로 학생들이 평소 접해보지 못한 문제 형식이며 '항상 거짓이다'라고 오답을 한 학생들 대부분이 문자가 달라지면 그에 해당되는 값도 달라진다고 인식하고 있었다. 다시 말해, 문자가 다르면 결코 같은 값을 가질 수 없다고 생각하는 오류(Küchemann, 1981)가 초등학교 6학년 학생들에게도 많이 나타났다. 항상 '참이다'라고 답을 한 학생들은  $3 + \square = \circ + 3$  식에서 양변에 3을 빼고  $\square = \circ$  라는 식을 도출하여  $\square$ 와  $\circ$ 는 항상 같다는 순환논법의 오류를 범하고 있었다. 그리고 정답을 한 학생들은  $\square$ 와  $\circ$ 의 값에 같은 수를 넣으면 식이 같고 다른 수를 넣으면 식이 같지 않다고 설명하였다. 즉, 문자  $\square$ 와  $\circ$ 가 임의의 공통된 값을 가질 수 있다는 것을 이해하고 있었다.

### 바. 문자 사용 유형 6

8.  $\square \times 2$ ,  $\square + 2$  를 크기 비교 한 것 중에서 옳은 것을 고르시오.

①  $\square \times 2$ 가 더 크다.      ②  $\square + 2$ 가 더 크다.  
 ③ 같다.      ④ 비교할 수 없다.

문항 I-8은  $\square \times 2$ ,  $\square + 2$  두 식의 크기를 비교하는 문제로 정답은  $\square$ 값에 따라  $\square \times 2$ ,

$\square + 2$  두 식의 값이 달라지므로 비교할 수 없다고 정답이다.  $\square$ 가 변함에 따라  $\square \times 2$ 와  $\square + 2$ 의 값도 변한다는 학생들이 많았다. 일부 정답을 한 학생들은  $\square$ 의 값에 임의의 여러 수를 넣어보고 두 식의 크기 비교를 한 것으로 나타났다. 위의 [표 IV-7]에서 알 수 있듯이 총 292명의 학생 중 110명이 정답을 했으며 약 60%의 학생들이 오답을 하였다. 전체 오답 중에서 80%를 넘는 학생들이  $\square \times 2$ 가  $\square + 2$ 보다 더 크다고 반응했다. 이것은 '+'한 값보다 'x'한 값이 당연히 더 크다고 직관적으로 답을 한 학생들과 3을 대입한 뒤 얻은 값으로 판단하여  $\square \times 2$ 가 크다고 답하는 것처럼  $\square$ 를 임의의 특정한 값으로 보고 대입한 후 답을 하는 학생들이 많았다. 일부 학생들은 1을 대입해서  $\square + 2$ 가 더 크다는 학생들도 있었다. 오답을 한 학생들은 문자  $\square$ 가 고정된 값이 아니며 하나 이상의 수가 가질 수 있다는 성질을 간과한 것으로 드러났다.

<표 IV-7> 문항 I-8에 대한 학생들의 반응

문항	반응	반응 종류	학생수(%)	
I-8	정답	④ 비교할 수 없다.	110 (37.7)	
	오답	① $\square \times 2$ 가 더 크다.	134	180 (61.6)
		② $\square + 2$ 가 더 크다.	39	
		③ 같다.	7	
		무응답	2 (0.7)	
합 계			292 (100)	

### 2. 문자 이해 수준

초등학교 6학년 학생들의 문자 이해 수준은 학생들의 40.1%가 문자 이해 수준 3에 머물러 있음을 알 수 있으며 약 60%의 학생들이 3 수준과 4 수준에 머물고 있음을 알 수 있다. 또한 1, 2 수준에 각각 해당되는 학생들보다 0수준에 해당되는 학생들이 더 많은 것으로 드러

났다.

<표 IV-8> 학생들의 문자 이해 수준 결과

수준	0	1	2	3	4	오류	합계
빈도수	44	20	32	117	55	24	292
백분율	15.1	6.8	11.0	40.1	18.8	8.2	100
누적 백분율	15.1	21.9	32.9	73.0	91.8	100	

32.9%에 해당되는 학생들이 문자 이해의 0, 1, 2 수준에 머물러 있는데 이는 학생들이 문자 사용 유형 1, 2, 3 범주 중의 한 가지 해석을 빈번히 하고 있다(김남희, 1995; Küchemann, 1981)는 것을 말해주고 있다. 즉, 단순히 문자를 수치화하여 계산하거나 문자의 존재를 무시하거나 하나의 대상으로 보는 것을 말한다.

<표 IV-8>에서 나타나는 것처럼 3수준의 학생들이 40%가 넘는 비율을 차지하고 있으며 13, 14, 15세 학생들을 대상으로 한 Küchemann (1981)의 연구에서 많은 학생들이 문자 이해 수준 3에 속한다는 연구 결과와 비슷하였다.

그러나, 분석결과 일부 소수의 학생들만이 4수준에 해당된다는 선행연구(김남희, 1995; 송옥빈, 2003; Küchemann, 1981)와는 달리 본 연구에서는 18.8%의 학생들이 4수준에 해당되는 것으로 밝혀졌다. 이는 앞서 언급한 연구들이 Küchemann(1981)의 문자 이해 검사도구 6문항을 그대로 사용하여 6가지의 문자 사용 유형마다 각각 한 문항씩으로 해당 수준 여부를 검사한 반면, 본 연구에서는 Küchemann(1981)의 문자 이해 검사도구 6문항을 포함한 18문항으로 검사를 실시하여 각 유형 문항의 2/3 이상이면 그 수준에 도달한 것으로 간주하여 검사를 실시하였으므로 문자 사용 유형의 빈도수가 달라져 결과에 차이가 있는 것으로 생각된다.

### 3. 문자 이해 수준에 따른 어려움

문자 이해 수준별로 겪는 어려움은 다음과 같이 나타났다. 첫째, 문자 이해 수준 0 단계인 학생들에게 나타나는 어려움을 유형별로 살펴보면, 유형 0인 학생들은 문자를 인식하지 못하고 계산의 결과로 인식함으로써 문자를 수치화하여 사용하는데 어려움이 나타났다. 유형 1인 학생들은 문자를 사용하지 않고도 문제를 해결할 수 있는지 알아보는 유형 2 문항에 대해 문자를 순서 매김하여 사용하며 문자에 임의의 수를 넣어 계산함으로써 어려움을 나타냈다([그림 IV-1], 그림 [IV-2]). 유형 2인 학생들은 연산기호나 문자를 제거하고 문자를 대상 그 자체로 인식하고 다양한 문자를 사용하지 못하며 문자를 어떤 대상으로 생각하는데 한계가 있었다([그림 IV-3], 그림 [IV-4]).

[그림 IV-1] 문자를 수치화하여 사용

[그림 IV-2] 문자를 순서매김하여 사용

[그림 IV-3] 연산기호나 문자를 없애려고 함

[그림 IV-4] 문자를 대상 그 자체로 인식함

둘째, 문자 이해 수준 1 단계인 학생들은 식의 대수적인 관계를 파악 못하고 식을 지나치게 간략화하려고 함으로써 문자 사용에 어려움이 있는 것으로 드러났다([그림 IV-5]). 수준 1에 속한 학생들은 대수 구문의 이해와 문자식 계산에 있어서 불완전한 능력을 보였다.

$a \times 3$ 에 4를 더할 때도  
 거꾸로  $3 + 4 = 7$   
 간단히 식은  $a \times 7$ 이다  
 $a \times 3 + 4$ 는 원래 식이기 때문이다

[그림 IV-5] 식을 지나치게 간략화하려고 함

셋째, 문자 이해 수준 2 단계인 학생들은 문자가 포함된 것을 수라고 인식하지 못하고 문자와 수를 분리해서 생각하는 경향이 두드러졌다. 특히 수준 2인 학생들은 문자를 특정한 미지수로 여기지 못하여 문자를 사용한 대수식 표현에 어려움을 느끼고 있었다([그림 IV-6]).

A개의 변이면 한 변의 길이 3개가 있어야  
 하니까 둘레의 길이를 구하면  
 $3+3+3 \dots$  이된다.

[그림 IV-6] 문자를 사용한 대수식 표현에 어려움을 느낌

넷째, 문자 이해 수준 3 단계의 학생들은 유형 5와 유형 6으로 분리하여 어려움을 알아보았다. 유형 5에 대한 학생들의 어려움은 문자가 다르면 그 값도 다르다고 인식하며 문자 선택의 자유성을 이해하지 못했다([그림 IV-7]). 또 이 단계에 있는 학생들은 문자를 일반화된 수로 여기지 못하며 특정한 값으로 여겨 상위 수준에 도달하는데 어려움이 있었다([그림 IV-8]). 유형 5인 학생들이 유형 6 문항에 대해 겪는 어려움은 과거의 산술적 경험에 의존하여 문제를 해결하려고 하기 때문이었다([그림 IV-9]). 또한 두 변인 사이의 관계를 찾지 못하고 문제의 일부 규칙만으로 해결하려고 하여 문자를 변수로 사용하는데 한계가 있는 것으로 나타났다.

$3 + 0 = 0 + 3$ 에서 이미 0이 들어가 있기 때문에  
 예)  $3 + 0 = 0 + 3 = 0$  인가가 0이 들어가지  
 않는다.

[그림 IV-7] 문자가 다르면 그 값도 다르다고 인식함

문자를 일반화한 수로 여기지 못함

[그림 IV-8] 문자를 일반화한 수로 여기지 못함

과거의 산술적 경험에 의존하여 문제를 해결함

[그림 IV-9] 과거의 산술적 경험에 의존하여 문제를 해결함

## V. 결 론

이 절에서는 본 연구에서 얻은 분석 결과를 바탕으로 선행 연구와 학교 현장에서의 수학교수·학습 방향에 대한 시사점을 논의해보면 다음과 같다.

첫째, 6가지의 문자 사용 유형에 대한 학생들의 반응을 살펴본 결과 초등학교 6학년 학생들은 상위 수준의 문자 사용 유형일수록 정답율이 낮은 것으로 나타났다. 특히, 유형 5는 37.3%, 유형 6은 18.8%의 학생들만이 사용할 수 있었다. 이는 학생들에게 문자와 식(또는 개정 교육과정에서 규칙성과 문제해결) 영역의 교수·학습이 문자의 여러 가지 유형을 이해하고 사용할 수 있는 방향으로 나아갈 필요가 있음을 나타내준다.

6가지의 문자 사용 유형에 속한 학생들의 백분율을 살펴보면 유형 3과 유형 4 사이에 급격히 떨어지는 것을 알 수 있다. 즉, 학생들이 유형 1, 2, 3에 해당하는 문항은 쉽게 해결하는 반면에 그 이상 수준의 유형에 대해서는 어려움을 가진 것으로 해석된다. 이는 Küchemann (1981)이 13, 14, 15세 학생들을 대상으로 한 연구에서 학생들이 문제를 해결할 때 이 3가지 범주들을 빈번히 사용한다는 것과 일관된다고 볼 수 있다.

둘째, 학생들의 문자 이해 수준을 살펴보면 40.1%의 학생들이 3수준에 머물고 있었다. 이는 김남희(1995)와 송육빈(2003)의 연구 결과와 일치하였다. 따라서 학생들의 문자 이해 수준 향상에 도움이 되는 교수 학습 방안, 특히 3



수준에서 4 수준으로 상승될 수 있는 지도 방안이 필요하다. 즉, 학생들이 문자를 특정한 값이 아닌 일반화된 수나 변수로도 여길 수 있도록 집중적인 지도가 필요함을 나타내고 있다.

한편, 본 연구에 따르면 문자 이해 수준 3 못지않게 많은 학생들이 0 수준에 머물러 있음을 주지할 필요가 있다. 연구대상 학년이 6학년이었고, 개정 교육과정에서 6학년 때 문자와 방정식을 도입한다는 점을 고려해 볼 때, 문자에 대한 더 깊은 이해를 위해 문자를 수치화하여 사용하며 문자를 어떤 대상으로 사용하는 경험을 제공하는 것이 중요하다.

셋째, 문자 사용 유형 중에서 문자 이해 수준에 관계없이 학생들은 문자를 수치화하여 계산하는 유형 1을 가장 많이 할 수 있는 것으로 드러났다. 문자 □가 무엇인가를 대신하는 자리지기로써의 사용은 초등학교 교과서에 주로 등장하는 문자 □의 사용 방법이다. 초등학교 수학 교과서를 살펴보면 주어진 식에 포함된 □나 ○의 의미는 이후 방정식 학습에서 미지수로 사용되는 즉, 방정식의 해에 대한 자리지기로써의 개념이 많이 차지하고 있다. 초등학교 학생들이 다양한 문자 유형을 사용할 수 있도록 다양한 과제 개발과 지도 방안이 필요하며 문자 이해 수준 단계에 따라 순차적으로 문자의 의미를 도입하여야 한다.

수학적 표현에서 자리지기 기호에 대한 그 이름을 임의적으로 선택할 수 있다는 자유성을 갖지만, 한 문맥 내에서 서로 상이한 대상에 대해서는 같은 이름을 사용하지 않는다는 형식적 규칙을 따라야 한다. 따라서 대수식에서 자리지기에 대한 기호 혹은 문자의 사용은 변수로서의 문자 사용에 대한 이해의 문제와 관련되기 때문에 교수학적인 주의가 필요하다.

넷째, 식의 대수적인 관계를 바르게 파악하지 못하며 연산 기호나 문자를 제거하여 식을

지나치게 간략화하려고 하는 등 초등학교 6학년 학생들이 문자를 이해함에 있어 겪는 어려움을 문자 이해 수준에 따라 살펴보았다. 또한 학생들은 공통적으로 문자에 임의의 수를 대입하여 문제를 해결하려는 경향이 강했으며 이는 학생들이 한 단계 상위 수준에 도달하는데 큰 걸림돌이 되었다. 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해 과정에서 느끼는 어려움과 사고 과정을 교사가 미리 알 수 있다면 문자를 이해하고 나아가 변수를 이해하기 위한 교수 학습 계획 시 유용한 자료가 될 것이다.

이와 같은 논의를 바탕으로 학년이 다른 학생들의 문자 사용 및 이해에 대해서도 살펴볼 필요가 있으며 문자를 처음 도입하는 2학년 학생들부터 문자 이해에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

## 참고문헌

- 교육인적자원부(2006). 초·중등학교 교육과정 부분수정고시. 제2006-75호.
- 김남희(1995). 수학에서 나타나는 문자의 성질과 그 다양한 의미. *대한수학교육학회 논문집*, 5(1), 187-201.
- \_\_\_\_\_ (1997). *변수 개념의 교수학적 분석 및 학습 지도 방향 탐색*. 서울대학교 박사학위논문.
- 김선희, 이종희(2003). 중학생들의 수학적 언어 수준. *수학교육학연구*, 13(2), 123-141.
- 김지현(2001). *변수 개념과 규칙성 이해에 관한 연구*. 이화여자대학교 석사학위논문.
- 김현주(2005). *엑셀 환경에서 대수 문장제 해결 경험을 통한 학생들의 문자 인식과 문자식 표현에 관한 연구*. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 송욱빈(2003). *중학교 3학년 학생들의 변수개*

- 념 이해 및 인지적 장애에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 신혜진(2000). Logo 프로그래밍을 통한 초등학교 6학년 아동의 변수 개념 이해. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 옥치상(2001). 연구방법론과 논문작성법. 서울: 지구문화사.
- 우정호(1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.
- 정진희(2004). 초등학교 수학에서 사용되는 문자 '□'에 대한 오개념 및 오류 분석. 경인교육대학교 석사학위논문.
- 차승진(2001). 문자와 식 단원에서 학습능력 수준에 따른 오류 분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 한국교육과정평가원(2004). 수학과 교육내용 적정성 분석 및 평가. 한국교육과정평가원. 연구보고 RRC 2005-1-5
- 황우형(1993). 한국과 미국학생의 대수 문장제 풀이 비교 연구. 수학교육학연구, 3(2), 105-109.
- Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 권성룡 외 11인 공역 (2005). 수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게? 서울: 경문사.
- Collis, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning. *Paper prepared for PME workshop*. London: Centre for Science Education, Chelsea College.
- Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA* (pp. 49-65). University of Hawaii.
- Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, & D. E. Küchemann(Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.
- Leake, S. (1996). Characterizing precalculus students' levels of understanding of functions and their graphs. *Doctor of Philosophy*, The University of Texas at Austin.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.
- Usiskin, Z. (1988). Conception of School Algebra and Uses of Variables. In A. F. Coxford(Ed.), *The Ideas of algebra K-12*(1988 yearbook, pp.8-19). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Vinner H. B. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland et al.(Eds.), *Perspectives on school Algebra*(pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal of Research in Mathematics Education*, 12(1), 107-118.

# A Survey on the Comprehension of Letters of Sixth Grade Elementary School Students

Kang, So Hee (Daegu Seong-nam Elementary School)

Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

The primary purpose of this study was to investigate how sixth grade elementary school students react to the types of letters use, what levels of understanding letters students are in and what difficulties are in understanding letters, and to raise issues about instructional methods of algebra. A descriptive study through pencil-and-paper tests was conducted. The test instruments consisted of 18 questions with 6 types of letters use. According to the results of testing, students' types of letter use and the levels of understanding letters were classified.

The conclusions from the results of this study were as follows:

First, the higher the types of letters use, the more sixth grade elementary school students had low scores on the types. Therefore, teaching methodologies of letters and expressions in the classroom need to

encourage for students to improve their ability of using and understanding letter.

Second, approximately 40% of students were categorized in level 3. Accordingly it is necessary to have a program of teaching and learning to improve their understanding levels of letters.

Third, approximately 15% of students were categorized in level 0. In order to develop understanding of letters, it is important that students use letter evaluated and letter used as an object.

Fourth, students had the difficulties in understanding letters. It is informative for teachers to understand these students' difficulties and thinking processes.

Finally, we must treat the different uses of letters and introduce them successively according to the student's understanding levels of letters.

\* key words : letters(문자), letter comprehension(문자 이해), the types of letters use(문자 사용 유형), the levels of understanding letters(문자 이해 수준)

논문접수 : 2008. 2. 15

심사완료 : 2008. 3. 13