

논문 2008-45SP-4-9

보조 필터를 이용한 효율적인 FIR 보간 회로

(Efficient Polynomial Base FIR Interpolation Circuit Using Support Filter)

김 용 은*, 정 진 균**

(Yong-Eun Kim and Jin-Gyun Chung)

요 약

보조 필터는 샘플링된 데이터의 사이 값을 추정하는 회로로서 시간 복원 시스템에 널리 사용된다. 다항식 보간은 주어진 점의 정보를 가지고 각 다항식의 계수를 계산하여 추정하는 위치의 값을 계산하는 것이다. 본 논문에서는 Lagrange 3차 보간 방정식에서 주어진 계수를 제한한 δ 함수로 변환하는 보조 필터를 이용하여 보간 성능을 개선시키는 방법을 제안한다. 예제를 이용하여 제안한 구조와 기존 보간 회로 구조와 비교하였을 때 효율적임을 입증한다.

Abstract

Interpolation filters are widely used in symbol timing recovery systems to interpolate new sample values at arbitrary points between the existing discrete-time samples. Polynomial interpolation is interpolated by coefficient made inputted information. This paper presents an efficient way to implement polynomial base interpolation filters using support filter changing input. By an example, it is shown that the proposed structure out performs the conventional interpolation structure with less hardware cost.

Keywords : Lagrange, Farrow, interpolation, coefficient

I. 서 론

다항식을 이용한 보간 회로는 오랫동안 연구되어 왔으며 디지털 시스템의 많은 부분에서 사용된다. 보간 회로는 소프트웨어 라디오, 디지털 모뎀, 샘플링 변환기 등에 사용된다^[1~2]. 보간 회로는 FIR 구조와 IIR 구조가 존재한다. IIR 구조는 회로가 간단하기는 하나 위상특성이 불안정하여 FIR 구조가 사실상 널리 이용된다^[3].

대표적인 FIR 보간 알고리즘으로는 Lagrange, Taylor 등 여러 가지가 있다^[4~5]. 이러한 알고리즘은 대부분 Farrow 구조로 구현된다^[6]. 그 중에서도 Horner의 법칙을 적용하여 시변 계수를 하나의 파라미터 다항식

형태로 만들어 지연시간을 조절하는 Farrow 구조가 지금까지 가장 많이 알려져 있다.

본 논문에서는 Lagrange 3차 보간 방정식에서 보조 필터를 이용하여 보간 성능을 향상시키는 방법에 대하여 제안하였다.

II장에서는 기존의 Lagrange 알고리즘을 이용한 보간 방법, III장에서는 제안한 알고리즘을 이용하여 보간 회로를 설계하는 방법에 대해서 설명하고, IV장에서는 시뮬레이션 결과를 제시하고, V장에서 결론을 맺는다.

II. 기존 Lagrange 알고리즘을 이용한 보간 방법

그림 1과 같이 $\{a, b, c, d\}$ 가 입력되었을 때 t_c 만큼 지연된 데이터는 3차 보간 다항식 $P(t)$ ($0 \leq t < 1$)로 추정할 수 있다^[7].

계수가 c_3, c_2, c_1, c_0 라고 하면 3차 다항식 $P(t)$ 는 식 (1)과 같다.

* 학생회원, ** 정회원, 전북대학교 전자정보공학부 (Div. of Electronic & Information Engineering Chonbuk University)

* 이 연구에 참여한 연구자는 2단계 BK21사업의 지원비를 받았음, This work was supported by the second stage of Brain Korea 21 Project.

접수일자: 2008년2월13일, 수정완료일: 2008년4월24일

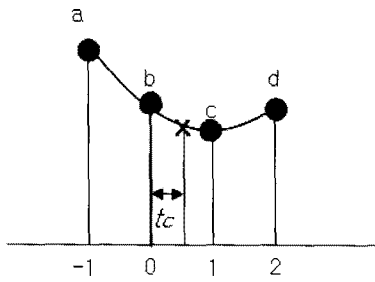


그림 1. 3차 다항식을 이용한 보간 방법
Fig. 1. Interpolation method using cubic polynomial.

$$p(t) = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad (1)$$

보간 다항식은 두 단계를 거쳐 계산된다. 먼저 다항식 계수 $\{c_3, c_2, c_1, c_0\}$ 는 입력 $\{a, b, c, d\}$ 를 이용하여 계산된다. 계수를 계산하기 위해서는 입력에 대한 4개의 서로 다른 다항식이 필요하다. 다음으로 지연 시간 t_c 에 대한 3차 다항식 출력력을 계산한다. 그림 1에서 계수 $\{c_3, c_2, c_1, c_0\}$ 와 입력 $\{a, b, c, d\}$ 에 대한 4개의 방정식은 식(2)와 같다.

$$\begin{aligned} p(-1) &= a = -c_3 + c_2 - c_1 + c_0 \\ p(0) &= b = c_0 \\ p(+1) &= c = c_3 + c_2 + c_1 + c_0 \\ p(+2) &= d = 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 \end{aligned} \quad (2)$$

식(2)는 식(3)처럼 계수 행렬로 표현 가능하다.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

또한 계수 $\{c_3, c_2, c_1, c_0\}$ 는 식 (4)와 같이 3x3 역행렬로 계산될 수 있다.

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (4)$$

보간 데이터 $p(t_c)$ 는 식(4)에서 계산된 계수를 이용하여 식 (5)와 같이 계산된다.

$$p(t_c) = c_3 t_c^3 + c_2 t_c^2 + c_1 t_c + c_0 \quad (5)$$

식 (5)를 modified Farrow 구조로 나타내면 그림 2와 같다^[7]. 그림 2에서 계수 0.5의 곱은 주어진 값을 1 비트

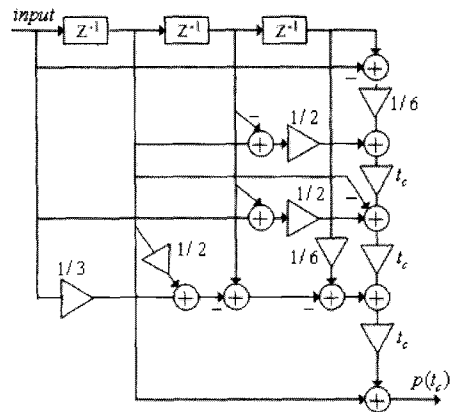


그림 2. Modified Farrow Lagrange 3차 보간 회로
Fig. 2. Modified Farrow Lagrange cubic interpolation circuit.

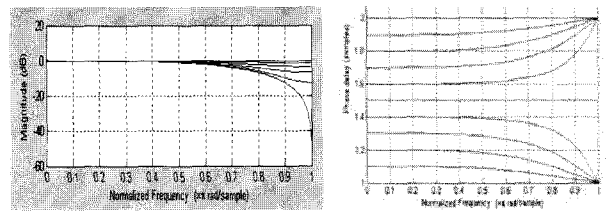


그림 3. Lagrange 3차 보간 필터 특성과 위상지연 특성
Fig. 3. Characteristic of Lagrange cubic interpolation filter and phase delay.

오른쪽으로 쉬프트하면 쉽게 계산되므로 상수 곱셈기가 필요 없다. 따라서 modified Farrow Lagrange 3차 보간 회로는 곱셈 3개, 상수곱셈 3개, 덧셈 10개, 지연 소자 3개로 설계될 수 있다. 그림 3은 그림 2에서 t_c 를 0.1 간격으로 0에서 1까지 증가시키면서 Lagrange 3차 보간 필터 특성과 위상지연 특성을 나타낸 그림이다. 그림 3에서 $0 \sim 0.3\pi$ 사이의 주파수와 위상 지연 최대 오차는 각각 0.0024, 0.1176이다.

필터의 보간 주파수 구간을 확장시키기 위해 필터 차수를 n 으로 증가시키면 다항식의 계수를 계산하기 위한 계수 행렬의 크기가 n^2 이 되므로 하드웨어 오버헤드가 크다. 따라서 보통 3차 Lagrange 보간 회로가 이용된다.

III. 제안한 보조 필터를 이용한 보간 회로

입력 데이터 $\{a, b, c, d\}$ 가 입력되었을 때 $P(t_c)$ 를 추정하는 Lagrange 3차 보간 다항식 $P(t)$ ($0 \leq t < 1$)가 그림 4의 점선과 같이 계산될 때 원 신호와 Lagrange 3차 보간 다항식으로부터 계산된 값은 에러가 발생한다. 이때 데이터 a 를 δ 만큼 아래로 이동시켜 $\{a + \delta, b, c\}$

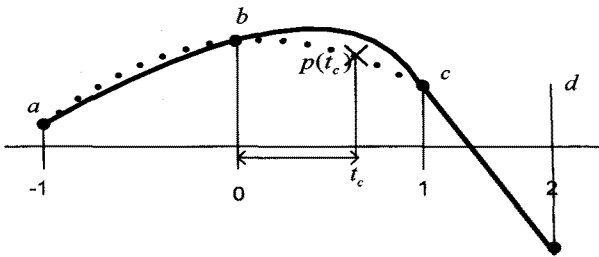


그림 4. Lagrange 3차 보간 다항식에 의한 보간
Fig. 4. Interpolation by Lagrange cubic interpolation polynomial.

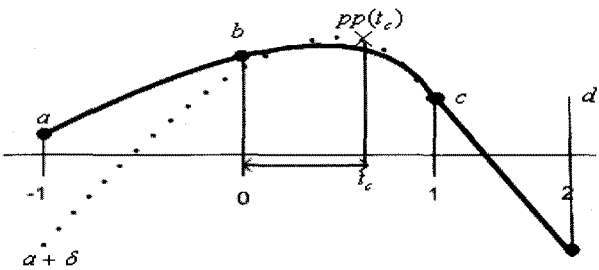


그림 5. 데이터 a를 δ 만큼 아래로 이동시킨 후 보간
Fig. 5. Interpolation after moving δ from data a.

로 계수가 생성된 보간 다항식을 $PP(t)$ 라고 하면, 그림 5와 같이 $PP(t)$ ($0 \leq t < 1$) 구간에서 그림 4의 보간 다항식 $P(t_c)$ 에 비하여 에러가 감소함을 알 수 있다. 따라서 변화량 δ 를 적절히 조정한다면 보간 필터의 성능을 향상시킬 수 있음을 발견하였다. 이러한 특성을 이용하여 보간 성능을 향상시킬 수 있는 변화량 δ 함수를 설계하는 방법에 대해서 제안한다. 그림 5의 bc 구간에서 보간 성능이 최대가 되는 변화량 δ 함수가 존재한다고 할 때 변화량 δ 함수는 입력 x 와 보간 성능을 최적으로 만드는 계수 C 가 곱해진 m 개의 차수로 이루어진 다항식 (6)과 같이 정의할 수 있다. 식 (6)에서 계수 C 가 입력 x 와 곱해지면 필터 구조가 되므로 변화량 함수 δ 는 보조 필터 δ 로 명명하였다.

$$\delta = C_{-L}x(n+L) + C_{-L+1}x(n+L-1) + \dots + C_Rx(n-R) \tag{6}$$

Lagrange 3차 보간 행렬 식(4)로부터 보조필터 δ 가 포함된 보간 계수 행렬은 식(7)과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + \delta \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \tag{7}$$

보조필터 δ 를 나타내는 식(6)의 보간 최적화 계수 C

값을 찾는 알고리즘을 다음과 같이 정의하였다. 먼저 $C_L \sim C_R$ 계수를 각각 Δ 만큼 더하고 뺀 조합 계수를 생성시킨다. 식 (7)에 δ 의 계수를 대입시킨 후 계산된 보간 계수 행렬을 그림 3과 같은 주파수 영역으로 바꾸어 통과구간 영역에서 오차가 가장 작은 계수를 선택한다. 그리고 다시 조합계수를 Δ 만큼 더하고 뺀 조합 계수를 생성시켜 보간 범위 내 주파수 영역에서 가장 적은 에러를 출력하는 계수를 선택하는 것을 반복하여 최적화 된 계수 C 값을 찾을 수 있다. 다음은 최적화 된 계수 C 값을 찾는 알고리즘 정리한 순서이다.

최적화 된 계수 C 값을 찾는 알고리즘

1. $L = 1, R = 2$ 로 초기화 시킨다.
2. $C_i(-L \leq i \leq R) = 0, \Delta = 1$ (step-size), $\Delta_{min} = 2^{-5}$ (Δ_{min} 은 step-size의 가장 작은 값).
3. 모든 i 에 대하여 c_i 를 3개의 다른 변수 $c_i, c_i + \Delta, c_i - \Delta$ 로 치환한다.
4. step 3으로 부터 $3^{(L+R+1)}$ 가지의 다른 계수 조합들 $\{C_{-L}, C_{-L+1}, \dots, C_R\}, \{C_{-L}-\Delta, C_{-L+1}-\Delta, \dots, C_R-\Delta\}$ 이 만들어진다.
5. 각 계수들의 그룹들을 이용하여 μ 를 0부터 1까지 0.1간격으로 증가시키면서 패스밴드 ω 의 리플 에러의 최대 값을 계산한다.
6. step 5로부터 패스밴드의 최대 에러가 가장 작은 계수 그룹을 선택하고 그 계수 그룹을 새로운 계수로 업데이트한다.
7. 만약 패스밴드 리플 최대 에러가 감소되면 step 3~6을 반복 실행하고 그렇지 않으면 step 8을 실행한다.
8. 만약 $\Delta \geq \Delta_{min}$ 이면 $\Delta = \Delta/2$ 를 실행하고 step 3으로 이동한다.
9. 만약 원하는 스펙을 얻지 못하면 L 과 R 을 1씩 증가시키고 step 3을 실행한다.

패스 밴드 ω 를 0.3π 로 정하고 제안한 방법을 이용하여 최적화 된 4개의 계수 C 값으로 이루어진 보조 필터는 식 (8)과 같다. 그림 6은 식(8)의 보조필터를 이용한 필터의 특성과 위상 지연 특성이다.

$$\delta = 0.38x(n+1) - 0.41x(n) + 0.094x(n-1) - 0.031x(n-2) \tag{8}$$

그림 6에서 0.3π 구간에서 최대 리플 에러(0.0468)는 기존 3차 Lagrange 보간회로의 최대 리플 에러

(0.1176)보다 작지만 위상 지연 에러는 더 큰 것을 알 수 있다. 일반적으로 필터 계수가 서로 대칭일 때 위상 에러가 작다는 사실을 이용하여 식 (6)의 계수가 서로 대칭으로 가정하면 식 (9)와 같이 보조필터 δ 를 정의할 수 있다.

$$\delta = C_m x(n+m) + \dots + C_0 x(n) + C_0 x(n-1) \dots + C_m x(n-1-m) \quad (9)$$

계수가 서로 대칭인 보조필터 δ 의 최적화된 계수 C 는 최적화된 계수 C 를 찾는 알고리즘 1, 2번에서 $m = L = R$ (초기값 $m = 1$ 로 고치고 나머지 3~7번을 수행하면 계산된다. 예를 들어 패스밴드가 $0.3 \times \pi$ 인 보간 회로를 제안한 방법으로 설계할 때 $m = 1$ 로 정하면 보조 필터 방정식은 식(10)과 같이 정의된다.

$$\delta = C_{-1}x(n+1) + C_0x(n) + C_0x(n-1) + C_1x(n-2) \quad (10)$$

제안한 알고리즘을 이용해 계산된 보조필터의 최적화된 계수 $C_0 = 0.125, C_1 = -0.125$ 이다. 그림 7은 계수가 대칭인 보조필터 δ 를 이용한 Lagrange 3차 보간 회로의 구조이다. 그림 8은 식(9)의 필터 특성과 위상 지연을 나타내고 있다. 그림 8에서 위상지연이 보간 주파수 영역에서 평행이고 보간 구간의 리플에러가

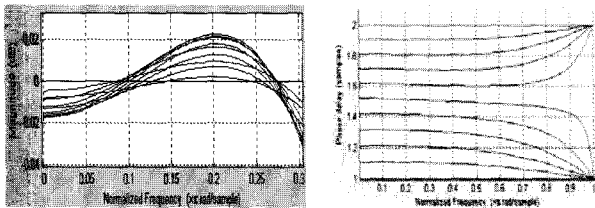


그림 6. 식(8)의 보조필터를 이용한 필터의 특성과 위상 지연 특성

Fig. 6. Characteristic of filter and phase delay using support filter in eq. (8).

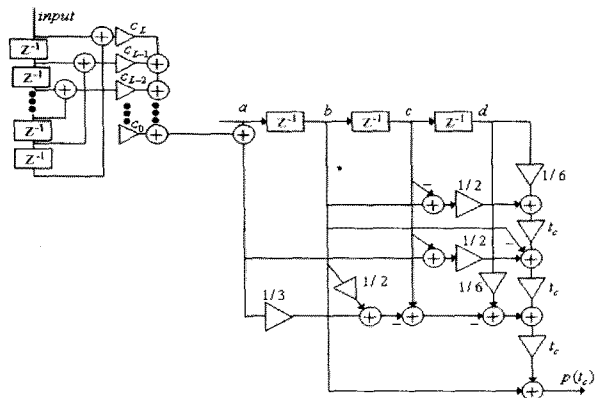


그림 7. 보조필터를 이용한 Lagrange 3차 보간 회로
Fig. 7. Lagrange cubic interpolation circuit using support filter.

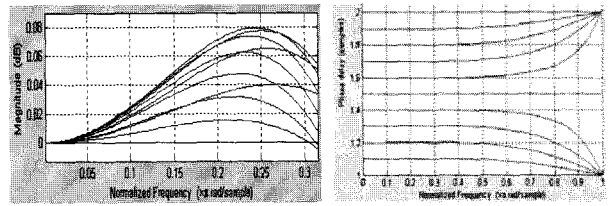


그림 8. 계수가 대칭인 보조필터를 이용한 보간 필터의 특성과 위상 지연 특성

Fig. 8. Characteristic of filter and phase delay using support filter consisted of symmetric coefficient.

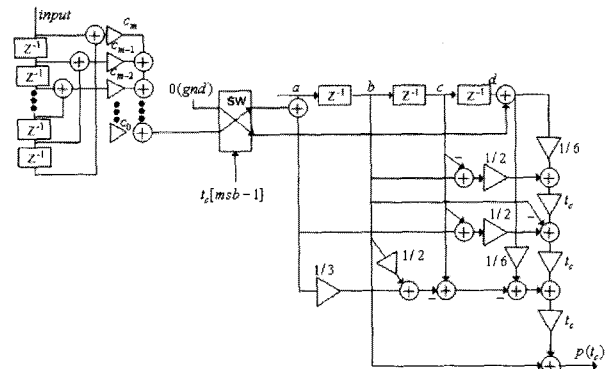


그림 9. t_c 구간에 따른 보조필터를 이용한 보간 회로

Fig. 9. Interpolation circuit using support filter according to t_c range.

0.08로서 기존의 3차 Lagrange 필터 에러보다 작음을 알 수 있다.

그림 5에서 $0 \leq t_c \leq 0.5$ 일 때 점 a 를 δ 만큼 이동시키면 보간 성능이 향상 되지만 $0.5 < t_c \leq 1$ 일 때는 점 d 를 δ 만큼 이동시킬 때 보간 성능이 향상 된다. 따라서 t_c 의 최상위비트 다음번 비트를 검사하여 0.5 보다 작은지 검사하고, 그 범위에 따라 스위칭 모듈을 이용하여 보조필터를 a 또는 d 에 연결시키면 필터 성능이 향상 된다. 그림 9는 t_c 구간에 따른 보조필터 δ 를 이용한 최종 보간 회로 블록도이다.

IV. 실험 결과

III절에서 Lagrange 3차 보간회로에 제안한 보조 필터 δ 를 이용할 때 보간 성능이 향상됨을 알 수 있었고, 보간영역을 임의로 결정할 수 있었다. 일반적으로 보간 회로로 사용되는 Continuous delay control Farrow 보간 필터와 성능비교를 통하여 제안한 방법이 더 효율적임을 보였다. 그림 10은 Continuous delay control 방식의 4 탭 3차 Farrow의 구조를 보여준다. 그림 10과 같은 필터 구조는 필터 계수에 따라 상수곱셈기와 지연

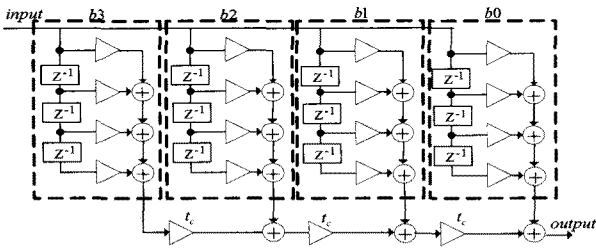


그림 10. Continuous delay control 방식의 4 탭 3차 Farrow의 구조

Fig. 10. Structure of 4 taps cubic Farrow of continuous delay control method.

표 1. 3차 Continuous delay control Farrow 필터의 계수: (a) 0 ~ 0.6π, (b) 0 ~ 0.7π

Table 1. Coefficients of cubic continuous delay control Farrow filter : (a) 0 ~ 0.6π, (b) 0 ~ 0.7π.

(a)

	b3	b2	b1	b0
0	-0.1363	0.7150	-0.5433	0
1	0.5952	-1.3485	-0.2825	1
2	-0.7371	0.7146	1.0190	0
3	0.3406	-0.0287	-0.2906	0

(b)

	b3	b2	b1	b0
0	-0.0724	-0.1538	0.1884	0
1	-0.1166	0.9450	-0.7510	0.0001
2	0.1884	-1.6014	-0.1373	0.9999
3	-0.9135	0.9061	1.0058	0
4	0.5439	-0.1184	-0.3844	0
5	-0.1614	0.0012	0.1332	0

표 2. 제안한 보조필터를 이용한 보간 계수: (a) 3차 Lagrange 보간 계수, (b) 보조필터 계수

Table 2. Coefficients of cubic Lagrange sub filter using proposed sub filter : (a) main filter, (b) support filter.

(a)

	b3	b2	b1	b0
0	-1/6	1/2	-1/3	0
1	1/2	-1	-1/2	1
2	-1/2	1/2	1	0
3	1/6	0	-1/6	0

(b)

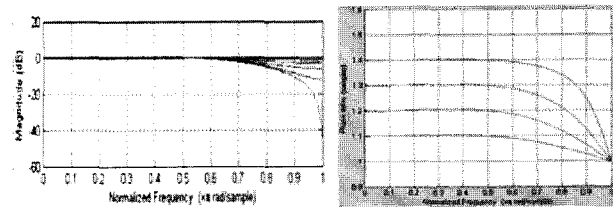
주파수 보간범위	c3=c-3	c2=c-2	c1=c-1	c0=c-0
0 ~ 0.6π		-0.5156	1.2813	-0.7969
0 ~ 0.7π	0.2656	-1.0391	1.7969	-1.0078

유닛이 증가된다. Helsinki University of Technology에서 제작된 계수 생성 프로그램^[8]를 이용하여 보간 구간이 0 ~ 0.6π, 0 ~ 0.7π 인 3차 Continuous delay

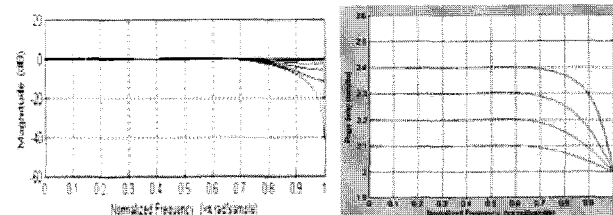
표 3. 기존의 구조와 제안한 구조와 비교

Table 3. Comparison with conventional structure and proposed structure.

	하드웨어 유닛	기존 구조 (개수)	제안한 구조 (개수)	이득 (%)
0 ~ 0.6π	지연 유닛	11	5	55
	덧셈기	13	13	0
	Modified booth 곱셈기	3	3	0
	상수 곱셈기	12	6	50
	최대 위상 지연 에러	0.0144	0.0049	66
	최대 리플 에러	0.7957	0.2587	67
0 ~ 0.7π	지연 유닛	19	6	68
	덧셈기	21	14	33
	Modified booth 곱셈기	3	3	0
	상수 곱셈기	20	7	65
	최대 위상 지연 에러	0.0110	0.0049	55
	최대 리플 에러	0.6087	0.2587	57



(a)



(b)

그림 11. 표 1의 계수를 가진 Farrow 필터 특성과 위상 지연 특성 : (a) 0 ~ 0.6π, (b) 0 ~ 0.7π

Fig. 11. Characteristic of Farrow filter holding coefficient of Table 1 : (a) 0 ~ 0.6π, (b) 0 ~ 0.7π.

control Farrow 필터 계수를 [8]에 의해서 계산하면 표 1-(a), (b)와 같다. 표 2-(a)는 Lagrange 3차 보간 계수이고, 표 2-(b)는 보간구간이 각각 0 ~ 0.6π, 0 ~ 0.7π 일 때 제안한 보조 필터 δ의 계수이다. 표 3에서는 기존 계수와 제안한 알고리즘에 계산된 계수의 보간 성능과 사용된 하드웨어 유닛 개수를 비교하였다. 그림 11-(a),(b)는 표 1-(a),(b)의 필터 특성을 나타내고, 그림 12-(a),(b)는 표 2-(a),(b)의 필터 특성을 보여준다.

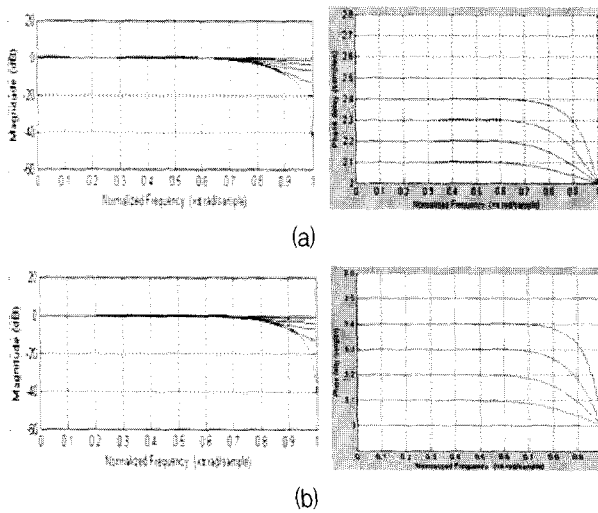


그림 12. 표 2의 보조필터를 이용한 Lagrange 필터 특성과 위상지연 특성 :

(a) $0 \sim 0.6\pi$, (b) $0 \sim 0.7\pi$

Fig. 12. Characteristic of proposed filter of Table 2 : (a) $0 \sim 0.6\pi$, (b) $0 \sim 0.7\pi$.

VI. 결 론

제안한 알고리즘을 이용하여 FIR 보간 필터를 설계 하였을 때 보간 성능이 향상되고 기존의 Farrow 구조에 비하여 하드웨어가 감소됨을 알 수 있다. 특히 넓은 주파수 보간 회로 구현 시 제안한 알고리즘을 이용하면 상수 곱셈기가 크게 줄어든다. 그러나 통과 대역의 최소 에러가 0.2dB이하로 보조필터 계수가 생성되지 않음을 알 수 있었고 최적화된 δ 의 계수를 계산하기 위해 많은 시간이 필요하다. 따라서 두 가지 문제를 해결하기 위해 연구를 진행할 것이다.

참 고 문 헌

[1] F. M. Gardner, "Interpolation in Digital Modems -Part I : Fundamentals", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 41, pp. 501-507, March 1993.
 [2] L. Erup, F. M. Gardner, and R. A. Harris, "Interpolation in digital modems- Part II : implementation and performance," *IEEE Trans. Commun.*, vol 41, pp. 998-1008, June 1993.
 [3] M. Makundi, T. I. Laakso, and V. Valimaki, "Efficient tunable IIR and allpass filter structures," *Electron. Lett.*, vol. 37, pp.344-345, Mar. 2001.
 [4] R. G. Keys, "Cubic convolution interpolation for digital image processing," *IEEE Trans.*

Commun., vol. ASSP-29, pp. 1153-1160, 1981.

[5] H. Johansson and O. Gustafsson, "Linear-phase FIR interpolation, decimation, and mth-band filters utilizing the Farrow structure," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 52, no. 10, pp. 2197 - 2207, Oct. 2005.
 [6] C. W. Farrow, "A continuously variable digital delay element," *Proc. 1988 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, Espoo, Finland, vol. 3, pp. 2641-2645, June 1988.
 [7] Valimaki. V, "A new filter implementation strategy for Lagrange interpolation" *Proc. 1995 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, vol. 1, pp 361-634, April 1995.
 [8] MATLAB m-file for approximation of fractional delay-<http://www.acoustics.hut.fi/software/fdtools/>

저 자 소 개



김 용 은 (정회원)

2005년 전북대학교 전자공학과 학사 졸업

2007년 전북대학교 정보통신 공학과 석사 졸업

2007년~현재 전북대학교 전자 정보공학부 박사

<주관심분야 : 통신, 신호처리, 반도체>



정 진 균 (정회원)

1985년 전북대학교 전자공학 학사 졸업

1989년 미국 미네소타 주립대학 전기공학 석사 졸업

1991년 미국 미네소타 주립대학 전기공학 박사 졸업

1995년~현재 전북대학교 전자정보공학부 교수
 <주관심분야 : 통신, 컴퓨터, 신호처리, 반도체>