

비선형 최소제곱법을 이용한 점탄성 감쇠를 갖는 원통셸의 실험진동해석

민천홍* · 박한일** · 배수룡***

*한국해양대학교 대학원

**한국해양대학교 해양개발공학부

***국방과학연구소

Experimental Vibration Analysis for Viscoelastically Damped Circular Cylindrical Shell Using Nonlinear Least Square Method

CHEON-HONG MIN*, HAN-IL PARK** AND SOO-RYONG BAE***

*Graduate School of Korea Maritime University, Busan, Korea

**Division of Ocean Development Engineering, Korea Maritime University, Busan, Korea

***Agency for Defence Development, Jinhae, Korea

KEY WORDS: Curve fitting method 곡선맞춤법 Experimental modal analysis 실험모드해석 Circular cylindrical shell 원통셸 Modal parameter 모드변수, Modal identification 모드추출, Nonlinear least square method 비선형 최소제곱법

ABSTRACT: It is a recent trend for advanced ships and submarines to incorporate composite structures with viscoelastically damping material. Much research has been done on curve-fitting techniques to identify vibration characteristic parameters such as natural frequencies, modal damping ratios, and mode shapes of the composite structure. In this study, an advanced technique for accurately determining vibration characteristic of a circular cylindrical shell-attached viscoelastically damping material is used, based on a multi-degree of freedom (MDOF) curve-fitting method. First, an initial value is obtained by using a linear least square method. Next, using the initial value, the exact modal parameters of the composite circular cylindrical shell are obtained by using a nonlinear least square method. Results show computation time is greatly decreased and accurate results are obtained by the MDOF curve-fitting method.

1. 서 론

현재 선박이나 잠수함 등에 원통셸 형태의 구조가 많이 사용되고 있다. 이러한 구조물은 동력장치, 파도, 바람 등의 다양한 진동원에 노출되어 있기 때문에 공진에 의한 파손이 일어날 수 있다. 따라서 진동을 줄이기 위한 기술이 중요하게 고려되고 있다. 그 중 감쇠제를 구조물의 겉 표면에 부착하는 방법이 널리 사용되고 있다. 감쇠제를 부착한 복합 구조물의 구조해석 시 상용 유한 요소 프로그램의 감쇠모델링 미비로 인해 오차가 크게 발생할 수 있다. 그러므로 실험모드해석을 이용한 구조해석을 병행하여 검토하는 것이 필요하다.

실험모드해석(Experiment modal analysis)은 전달함수나 응답의 측정 데이터에 포함된 오차를 제거하여 대상물의 모드 특성치를 결정하기 위한 방법이다. 모드 특성치는 곡선맞춤법에 의해 결정된다.

일반적으로 감쇠제가 부착된 구조물의 경우 비비례 감쇠모

델의 곡선맞춤법을 사용한다. 비비례 감쇠모델의 곡선맞춤법으로 제시된 사례는 다음과 같다. Van Loon(1974)의 방법은 실험데이터를 전달함수로 표현하는데 필요한 미지수를 통합하여 초기값으로 표현하고 테일러급수 전개하여 반복 계산하는 방법이다. 이 방법은 주파수영역 다자유도법 중에서는 자주 사용된다. 그러나 이 방법은 초기값에 따라 발산할 가능성이 있고 계산시간도 오래 걸리는 단점이 있다. 다음으로 Mergey(1982)의 방법은 시간영역의 전달함수 데이터를 이용하는 방법이다. 계산시간이 짧은 장점이 있으나 고유모드의 정확도가 떨어지는 단점이 있다. Ibrahim and Mikulcik(1977)의 방법은 시간영역에서 고유치 해석에 의해 비선형항을 구하는 방법이다. 이 방법 역시 고유모드의 정확도가 떨어지는 단점이 있다.

본 연구에서는 주파수영역에서 비선형최소제곱법(Nonlinear least square method)을 이용하여 전달함수 데이터에 대한 다자유도 곡선맞춤(Multi-degree of freedom curve-fitting)을 수행하였다. 비선형 문제를 풀기 위해서는 보다 좋은 초기값으로부터 출발해야 빠른 시간에 정확도가 높은 해를 구할 수 있다. 때문에, 본 연구에서는 선형최소제곱법(Linear least

교신저자 박한일: 부산광역시 영도구 동삼 2동

051-410-4326 hipark@hhu.ac.kr

square method)과 일자유도 곡선맞춤법(Single-degree of freedom curve-fitting method)을 혼용하여 초기값을 구하였다. 위의 초기값을 이용하여 발산 가능성을 제거하고 빠른 시간에 정확한 곡선 맞춤을 수행 하였다.

2. 비비례 감쇠모델

감쇠가 큰 시스템의 경우 감쇠행렬은 일반적으로 비비례 감쇠로 가정한다. 비비례 감쇠의 경우 모드해석 시 고유벡터로써 감쇠행렬을 대각화할 수 없으므로 상태공간에서 아래의 방법으로 확장된다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \tag{1}$$

[M]은 질량행렬, [C]는 감쇠행렬, [K]는 강성행렬 이며, {x}는 변위벡터, {f}는 힘벡터이다.

$$[M]\{\ddot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\} \tag{2}$$

식 (1)과 식 (2)를 조합하면,

$$\begin{bmatrix} CM \\ M0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$[Q]\{\dot{y}\} + [R]\{y\} = \{p\} \tag{4}$$

이 조작에 의해 운동방정식은 n자유도계의 2계 미분방정식으로부터 2n 자유도의 1계 미분 방정식으로 변환다. 식 (4)는 일반고유치 문제가 된다. 이것은 고유모드가 행렬 [Q]와 [R]의 양쪽에 관해 직교성을 가지고 있는 것을 나타낸다. 비비례 감쇠의 경우에는 비감쇠나 비례 감쇠의 경우와 다르게 고유모드가 질량행렬과 강성행렬에 관하여 직교성을 갖지 않는다. 식 (4)를 모드좌표로 변환하고 직교성을 적용하면 다음과 같이 표현된다(Nagamatsu, 1985).

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r + jV_r}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{U_r - jV_r}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} \tag{5}$$

여기서 $\sigma_r = \omega_{nr} \zeta_r$, ω_{nr} 은 고유진동수, ζ_r 은 모드 감쇠비, $U_r + jV_r = \frac{\Phi_r^T \Phi_r}{d_r}$, Φ_r 는 고유벡터이다.

대상주파수를 한정하여 잉여질량(Residual mass) S와 잉여강성(Residual stiffness) Z를 고려한 진폭응답 전달함수(Compliance transfer function)는 다음과 같이 표현된다.

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r + jV_r}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{U_r - jV_r}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} - \frac{C + jD}{\omega^2} + E + jF \tag{6}$$

일반적으로 잉여질량과 잉여강성은 복소수로 표현된다. 그리고 가속도응답 전달함수(Accelerance transfer function)는 다음과 같다.

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-\omega^2(U_r + jV_r)}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2(U_r - jV_r)}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} + \frac{1}{S} - \frac{\omega^2}{Z} \tag{7}$$

3. 곡선맞춤법 (Curve Fitting Method)

3.1 비선형 최소제곱법

식 (7)에서 S와 Z는 일반적으로 복소수가 되므로 이것을 아래와 같이 표현한다.

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-\omega^2(U_r + jV_r)}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2(U_r - jV_r)}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} + C + jD - \omega^2 E - j\omega^2 F \tag{8}$$

진동실험에 의해 주어지는 전달함수의 실험데이터를 식 (8)의 형태로 표현하기 위해서는 식 (8)중의 4n+4개의 미지수 즉, ω_{dr} , σ_r , U_r , V_r , C , D , E , F 가 필요하다. 이것들을 통합하여 $\gamma_h (h=1 \sim 4n+4)$ 로 하고 이들의 초기값을 γ_{hs} 라 하면 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\gamma_h = \gamma_{hs} + \Delta\gamma_h \tag{9}$$

식 (8)를 $\Delta\gamma_h$ 에 관해 테일러급수 전개하고 근사적으로 1차 항까지 취하면 다음과 같다.

$$L(\omega, \gamma_h) \approx L(\omega, \gamma_{hs}) + \sum_{h=1}^{4n+4} \frac{\partial L}{\partial \gamma_h}(\omega, \gamma_{hs}) \cdot \Delta\gamma_h = A_{Re} + jA_{Im} \tag{10}$$

여기서 $\frac{\partial L}{\partial \gamma_h}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}} &= \frac{-j\omega^2(U_r + V_r)}{\{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} + \frac{j\omega^2(U_r - V_r)}{\{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_r} &= \frac{\omega^2(U_r + jV_r)}{\{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} + \frac{\omega^2(U_r - jV_r)}{\{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial U_r} &= \frac{-\omega^2}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial V_r} &= \frac{-j\omega^2}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{j\omega^2}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial C} &= 1, \quad \frac{\partial L}{\partial D} = j, \quad \frac{\partial L}{\partial E} = -\omega^2, \quad \frac{\partial L}{\partial F} = -j\omega^2 \end{aligned} \tag{11}$$

m개의 각진동수 ω 에 대해, 실험에 의해 Accelerance의 실수부 $L_{Rei} = L_{Re}$ ($\omega = \omega_i$), 허수부 $L_{Imi} = L_{Im}$ ($\omega = \omega_i$)가 데이터로서 얻어지고 또 근사식의 실수부와 허수부가 각각 A_{Rei} , A_{Imi} 로 얻어지면 실험 데이터와 근사식 데이터의 오차를 최소제곱법으로 표현하면 다음과 같다.

$$\lambda = \sum_{j=1}^m \{ (L_{Rei} - A_{Rei})^2 + (L_{Imi} - A_{Imi})^2 \} \quad (12)$$

λ 를 ΔV_h 로 미분하고 0으로 두면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Delta V_h} = 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial A_{Rei}}{\partial \Delta \omega} (A_{Rei} - L_{Rei}) + \frac{\partial A_{Imi}}{\partial \Delta \omega} (A_{Imi} - L_{Imi}) \right\} = 0 \quad (13)$$

이 방정식을 풀면 초기값에 대한 변수의 값을 구할 수 있다. 이를 반복적으로 구하면 원하는 값에 수렴하게 된다.

3.2 선형 최소제곱법

앞에서 설명한 식 (8)의 미지수는 두 종류로 크게 나눌 수 있다. 우선 감쇠고유진동수 ω_d 와 모드 감쇠율 σ_r 은 진동계 전체를 지배하는 전체량이 되고 원리적으로는 변화하지 않는 상수 값이 된다. 이것에 비해 U_r , V_r , C , D , E , F 는 고유모드에 의해 결정되며 가진점이나 응답점의 이동에 의해 변화하는 국부치가 된다. 만약 ω_d 와 σ_r 이 어떤 방법으로 이미 구해져 있는 경우에는 초기치를 필요로 하지 않고, 또 반복하지 않는 1회의 계산에 의해 나머지 미지수를 결정할 수 있다. 이 경우 계산과정은 비선형 최소제곱법과 동일하다.

4. 원통셀의 실험 및 곡선맞춤

4.1 실험장치 구성 및 실험방법

실험에 사용된 원통의 크기는 길이 0.5m, 직경 0.25m, 두께 0.005m이며 재질은 알루미늄이다. 실험장치 구성은 Fig 1과 같이 구속조건으로 자유조건을 선택 하였다. 구속조건을 만족시키기 위해 원통의 한쪽에 얇은 끈을 묶어 허공에 매달았다. 실험은 원통 안쪽에 감쇠재를 붙인 상태로 수행 하였다. 감쇠재의 경우 국내의 A사에서 생산된 두께 3mm, 밀도 2000kg/m³인 제진성 방진 시트를 사용하였다.

모드해석을 수행하기 위해 원통에 40개의 점을 표시 하였다. 그 중 1개의 점에 가속도계 센서를 고정시키고 충격망치로 나머지 39개의 점을 이동하며 가진 하였다. 한 점당 3번의 반복 실험을 수행하고 평균값을 데이터로 사용하였다. 실험에 사용된 FFT 분석기는 B&K사의 2채널 3560B를 사용하였다.



Fig. 1 Experimental set-up

4.2 곡선맞춤 순서

곡선맞춤의 첫 단계는 실험에 의해 측정된 각 점들의 전달함수를 겹쳐 그린 후 채용 모드수를 결정하는 것이다 (민천홍 등, 2008). 채용 모드수에 따라 계산시간과 결과의 정도가 크게 달라지므로 채용 모드수의 결정은 중요하다.

모드수를 결정하면 각 차수의 공진주파수를 임의의 고유주파수로 설정하고 일자유도 곡선맞춤을 수행하여 임의의 모드 감쇠비를 구한다.

다음으로 임의로 선정한 고유주파수와 감쇠비를 사용하여 선형 최소제곱법으로 해석을 수행한다. 그 결과 나머지 임의의 변수들이 결정된다. 이 변수들은 다음 단계에서 비선형 최소제곱법의 초기값으로 사용된다.

마지막으로 비선형 최소제곱법을 사용하여 곡선맞춤 한다. 이상의 곡선맞춤 진행 순서는 Fig 2와 같다.

실험 결과 1000Hz이상의 주파수에서는 감쇠의 영향으로 공진영역의 형성이 이루어 지지 않았다. 그래서 공진점의 형성이 해석에 미치는 영향을 고려하기 위하여 해석 주파수의 범위를 1000Hz와 1600Hz로 나누어 수행 하였다. 1000Hz 범위에서는 7개, 1600Hz 범위에서는 9개의 모드를 채용하였다.

Fig 3은 전달함수를 겹쳐 그린 것이고, Table 1은 실험에 채용된 9개의 임의의 고유주파수와 임의의 감쇠비를 나타낸다.

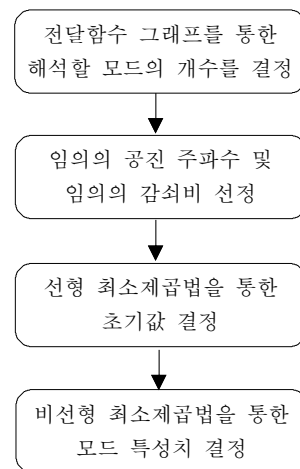


Fig. 2 Flowchart of present curve fitting process

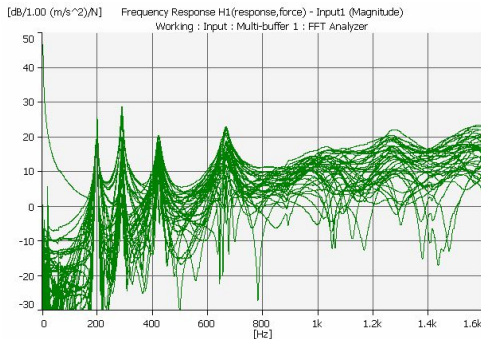


Fig. 3 Plot of accelerance FRF

Table 1 Natural frequency and modal damping ratio selected

Mode	Natural frequency	damping ratio	Mode	Natural frequency	damping ratio
1	18.5	0.0239	6	666	0.0172
2	61.5	0.0629	7	1057	0.0662
3	198	0.0141	8	1262	0.0483
4	289	0.0119	9	1414	0.0526
5	421	0.0176			

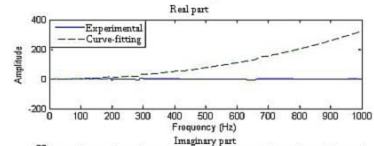
4.3 곡선맞춤

Fig 4(a)는 1000Hz 범위에서 1번점 실험데이터를 선형 최소 제곱법으로 곡선맞춤한 그림이다. Fig 4(a)의 경우 실수부 영역에서 오차가 매우 크게 나타나고 있다. 또한, Fig 4(b)는 같은 범위에서 2번점 실험데이터를 선형 최소제곱법으로 곡선맞춤한 그림이다. Fig 4(b)의 경우 실수부와 허수부 모든 영역에서 오차가 매우 크게 나타나고 있다. 임의의 고유주파수와 임의의 감쇠비를 이용하였기 때문에 곡선맞춤의 결과에 오차가 크게 나타난다. 위의 결과를 통해 감쇠가 큰 시스템의 경우 1자유도 곡선맞춤을 이용한 고유 주파수와 감쇠비의 선정은 오류가 크다는 것을 알 수 있다. 그래프의 위쪽은 전달함수의 실수부를 나타내고 아래쪽은 허수부를 나타낸다. 이렇게 선형 최소제곱법으로 구해진 임의의 모드 특성치들은 비선형 최소제곱법의 초기값으로 사용된다.

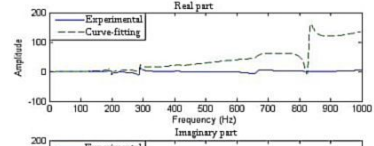
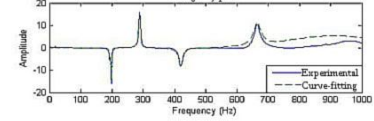
Fig 5(a)는 1000Hz 범위에서 1번점 실험데이터를 비선형 최소제곱법으로 곡선맞춤한 그림이다. 이 경우 실수부 영역의 오차가 발생하지 않았고 정확하게 일치하는 모습을 보인다. 또한, Fig 5(b)는 같은 범위에서 2번점 실험데이터를 비선형 최소제곱법으로 곡선맞춤한 그림이다. Fig 4(b)와 비교하여 실수부와 허수부의 오차가 크게 없어진 것을 알 수 있다. 반복 횟수는 100번으로 계산시간은 채용모드수와 데이터의 양에 따라 달라질 수 있다.

Fig 6(a)는 1600Hz 범위에서 1번점 실험데이터를 선형 최소 제곱법으로 곡선맞춤한 그림이고 Fig 6(b)는 같은 범위에서 2번점 실험데이터를 선형 최소제곱법으로 곡선맞춤한 그림이다. Fig 7은 1600Hz 범위에서 비선형 최소제곱법에 의해 곡선맞춤된 그림이다. Fig 6(a)와 Fig 6(b)의 경우 실수부와 허수부 영역 모두에서 오차가 크게 발생한다. 그러나 Fig 7(a)와 Fig 7(b)의 경우 실수부와 허수부 영역 모두에서 오차가 발생

하지 않았으면 정확하게 일치하는 모습을 보인다. 반복횟수는 500번으로 계산시간은 채용모드수와 데이터의 양에 따라 달라질 수 있다. 비선형성이 증가 되는 1000Hz 이상의 영역까지 해석을 수행하였기 때문에 반복 횟수가 증가 되었다. Fig 8은 고유주파수와 감쇠비를 제외한 나머지 미지수에 1을 입력하고 100번 반복하여 곡선맞춤한 결과이다. Fig 5 (a)와 비교해보면 초기치의 차이에 따라 반복횟수 및 곡선맞춤의 정확도에 차이가 많음을 알 수 있다.



(a) 1st point



(b) 2nd point

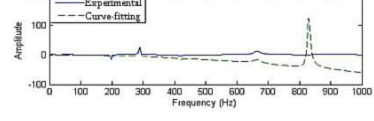
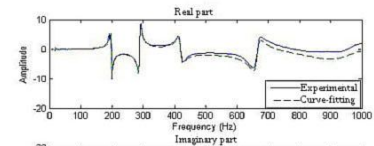
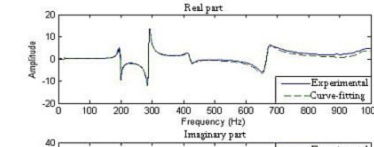
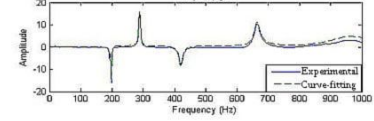


Fig. 4 Measured and curve-fitted accelerance by linear least square method (the frequency range of 1000Hz)



(a) 1st point



(b) 2nd point

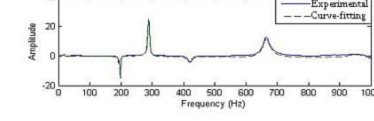
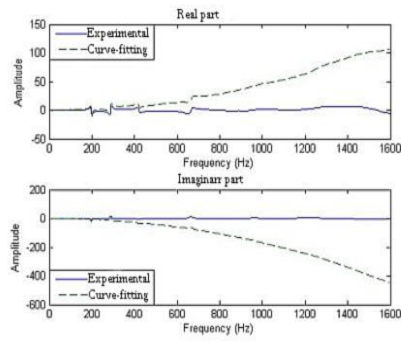
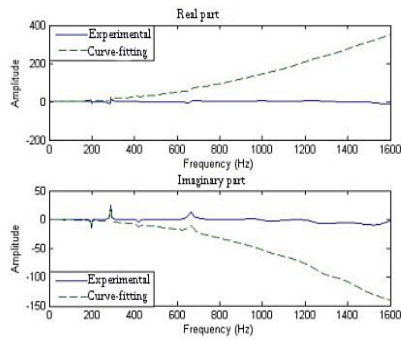


Fig. 5 Measured and curve-fitted accelerance by nonlinear least square method (the frequency range of 1000Hz)

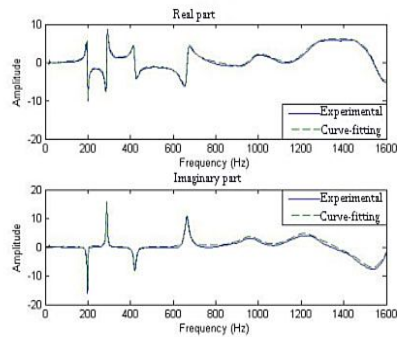


(a) 1st point

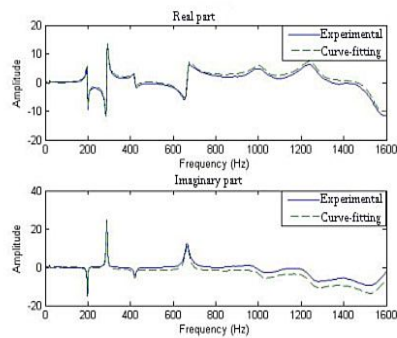


(b) 2nd point

Fig. 6 Measured and curve-fitted accelerance by linear least square method (the frequency range of 1600Hz)



(a) 1st point



(b) 2nd point

Fig. 7 Measured and curve-fitted accelerance by nonlinear least square method (the frequency range of 1600Hz)

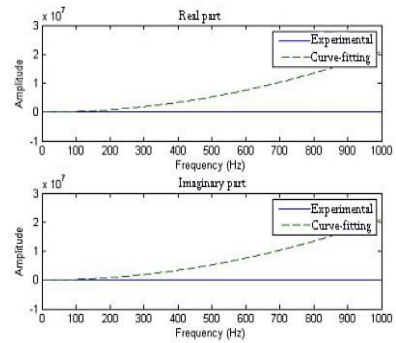


Fig. 8 Measured and curve-fitted accelerance by nonlinear least square method (the frequency range of 1000Hz)

5. 결 론

본 논문에서는 점탄성 감쇠제가 부착된 원통의 진동특성을 해석하기 위하여 실험모드 해석을 수행하였다.

비비례 감쇠 모델의 경우 일자유도 곡선맞춤으로 구해진 고유주파수와 모드 감쇠비는 실제의 값과 오차가 크다. 때문에 비비례 감쇠 모델의 실험진동 해석에는 다자유도 곡선맞춤법을 사용하여야 한다.

다자유도 곡선맞춤 방법의 하나인 비선형 최소제곱법의 경우 초기값에 따라 계산 시간과 결과의 차이가 크게 나타나는 단점이 있다. 그러나 본 연구에서 제시한 일자유도 곡선맞춤법과 선형 최소제곱법을 결합한 방법을 이용하여 구한 초기값을 이용하면 적은 횟수의 반복만으로도 정확한 곡선 맞춤을 수행할 수 있다.

감쇠 계를 부착한 원통셀의 경우 고차 모드까지 곡선 맞춤을 수행하기 위해선 많은 반복 계산을 필요로 한다. 그러나 관심 있는 주파수 영역을 선정하여 곡선 맞춤을 수행 하면 적은 반복횟수로 정확한 곡선 맞춤을 수행 할 수 있다.

해석자가 공진주파수와 모드 감쇠 비만을 입력하는 간단한 조작으로 비비례 감쇠 모델의 다자유도 곡선 맞춤을 수행 할 수 있는 비선형 최소제곱법을 이용한 다자유도 곡선맞춤법 프로그램을 MATLAB 프로그램을 이용하여 개발 하였다.

후 기

본 연구는 국방부가 지원한 수중운동체 특화연구센터 (UVRC)의 지원에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

민천홍, 박한일, 배수룡 (2008). "다자유도 곡선맞춤법을 이용한 감쇠보 모델의 실험 진동해석", 한국해양공학회지, 제 22권, 제1호, pp 70-74.

Ibrahim, S.R. and Mikulcik, E.C. (1977) "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the free Response", The Shock and Vibration Bulletin, Vol 47, Part 4, pp 183.

Mergeay, M. (1982) "Multi Degree of Freedom Parameter Estimation Methods for Modal Analysis", Annals of the CIRP, Vol 31, pp 269.

Nagamatsu, A. (1985), Modal Analysis.

Van Loon, P. (1974). Modal Parameters of Mechanical Structures, Ph. Doctor dissertation, Katholieke Univ. Leuven.

2008년 3월 13일 원고 접수

2008년 4월 21일 최종 수정본 채택