

퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수를 이용한 T-S 퍼지 시스템의 H_∞ 제어

H_∞ Control of T-S Fuzzy Systems Using a Fuzzy Basis-Function-Dependent Lyapunov Function

최 현 철, 좌 동 경*, 홍 석 교

(Hyoun-Chul Choi, Dongkyoung Chwa, and Suk-Kyo Hong)

Abstract : This paper proposes an H_∞ controller design method for Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems using a fuzzy basis-function-dependent Lyapunov function. Sufficient conditions for the guaranteed H_∞ performance of the T-S fuzzy control system are given in terms of linear matrix inequalities (LMIs). These LMI conditions are further used for a convex optimization problem in which the H_∞ -norm of the closed-loop system is to be minimized. To facilitate the basis-function-dependent Lyapunov function approach and thus improve the closed-loop system performance, additional decision variables are introduced in the optimization problem, which provide an additional degree-of-freedom and thus can enlarge the solution space of the problem. Numerical examples show the effectiveness of the proposed method.

Keywords : Takagi-Sugeno fuzzy system, H_∞ control, fuzzy basis-function-dependent Lyapunov function, linear matrix inequality

I 서론

Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 제어 기법[1]은 비선형 시스템 모델링 및 제어에 효과적인 방법으로 인식되어 그 동안 많은 연구가 이루어져 왔다. 특히, 선형행렬부등식(linear matrix inequality, LMI)[2]에 의해 많은 제어 문제가 효과적으로 풀릴 수 있게 됨에 따라 T-S 퍼지 제어에 대한 연구가 더욱 가속화되었다. LMI를 기반으로 하는 T-S 퍼지 제어 기법은 공통의 단일 Lyapunov 함수를 이용하는 기법[3,4]과 여러 개의 Lyapunov 함수를 이용하는 기법[5-12]으로 크게 나눌 수 있다. 전자의 경우, r 개의 부시스템을 안정화하는 공통의 단일 Lyapunov 함수를 찾아야 하기 때문에 그 결과가 보수적이라는 단점이 있지만[8,9], 제어 기법이 병렬분산보상(parallel distributed compensation, PDC) 기법[3]과 같이 간단하면서 효과적인 제어 기법으로 귀결되기 때문에 그 동안 많은 관심을 받아왔다. 후자의 경우, 퍼지 기저함수(basis function) 또는 퍼지 가중(weighting)에 종속적인 Lyapunov 함수를 이용하여 각 부시스템에 대응하는 Lyapunov 함수를 찾는 방법으로서 공통의 Lyapunov 함수 기법의 단점인 보수성을 줄일 수 있어 그 동안 많은 관심을 받아왔다. 이 기법은 Lyapunov 함수를 정의하는 방식에 따라 구분적(piecewise) Lyapunov 함수 기법[5-7]과 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기법[8-13]으로 다시 나눌 수 있다.

구분적 Lyapunov 함수 기법은 성능이 우수하지만 이를 이용해 제어를 설계할 경우 도출된 결과가 비볼록(non-convex) 최적화문제로 귀결되기 때문에 제어기 설계가 쉽지 않다[9]. 이에 비해, 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기법을 이용하면 제어기 설계문제를 볼록(convex) 최적화문제로 만들 수 있어 제어기 설계에 유리하다. Tanaka 등[8]은 연속시간 T-S 퍼지 시스템에 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기법을 적용하여 주어진 퍼지 시스템을 강인하게 안정화하는 기법을 제안하였고, Choi와 Park[9]은 이산시간 T-S 퍼지 시스템에 이 방법론을 적용하여 주어진 시스템을 위한 H_∞ 제어 기법을 제안하여 제안된 기법이 공통의 Lyapunov 함수 기반의 H_∞ 제어 기법 보다 더 우수함을 보였다. 그러나 기존의 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기법을 적용할 경우, 도출된 설계조건에 시스템 행렬과 Lyapunov 행렬이 곱의 형태로 남게 되고 따라서 제어기 행렬에 시변 역행렬이 포함되기 때문에 실제로 제어를 적용할 때 실시간으로 시변 역행렬을 구해야 하는 단점이 있다.

이러한 문제를 해결하기 위해, 시스템 행렬과 Lyapunov 행렬을 분리하는 방법[10,11]이 제안되었다. 이 분리 방법은 de Oliveira 등[10]에 의해 처음으로 제안되었으며, 적절한 합동변환(congruence transformation)을 통해 시스템 행렬과 Lyapunov 행렬을 서로 분리하면서 새롭게 추가되는 자유 결정변수와 시스템 행렬을 결합시키는 방법으로서 이산시간 시스템[10]과 연속시간 시스템[11]에 대한 안정도 분석 조건 형태로 각각 제안되었다. Zhou 등[12-14]은 이러한 분리 방법을 이용하여 이산시간 T-S 퍼지 시스템을 위한 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기반의 제어 기법을 제안하였으며 기존의 단일 Lyapunov 함수 기반의 제어기법보다 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기반의 제어 기법이 더 좋

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2008. 1. 17., 채택확정 : 2008. 5. 1.

최현철 : 서울대학교 전기·컴퓨터공학부(begun72@gmail.com)

좌동경, 홍석교 : 아주대학교 전자공학부

(dkchwa@ajou.ac.kr/skhong@ajou.ac.kr)

※ 본 연구는 BK21 연구지원 및 한국과학재단 특정기초연구 R01-2006-000-11373-0 지원으로 수행되었음.

은 성능을 발휘한다는 것을 보였다. 그러나 이러한 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기법을 연속시간 T-S 퍼지시스템에 적용할 경우, 도출된 설계조건에 기저함수의 시간 변화율을 반영해야 하는 어려움이 있고 [11]의 방법을 적용할 때 여러 결정변수의 곱이 서로 상충하여 제어기 환원 문제가 비불록하게 되는 단점이 있다. 그래서 이산시간 T-S 퍼지 제어 시스템의 경우[9,12-15]와는 다르게, 그 동안 연속시간 T-S 퍼지 제어 시스템을 위한 퍼지 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기법에 대한 연구[8]는 활발히 진행되지 못하였다.

한편, 기저함수 종속적 Lyapunov 함수 기법에 의해 도출되는 제어기 설계조건도 충분조건이기 때문에 여전히 어느 정도의 보수성을 내포하고 있다. 그 동안 보수성을 줄여 제어 시스템의 성능을 개선하기 위한 여러 방법의 노력이 있어 왔다. Ding 등[15]은 적절한 합동변환[10]과 Kim과 Lee[16]가 제안한 이른바 경계기법(bounding technique)을 이용하여 기존의 결과보다 덜 보수적인 이산시간 T-S 퍼지 시스템의 제어기 설계조건을 제안하였다. 즉, 합동변환을 통해서 시스템 행렬과 Lyapunov 행렬을 분리하고 추가적인 변수를 도입하였으며 경계기법을 통해서 더 많은 자유도를 부여함으로써 해집합의 범위를 넓혀 덜 보수적인 결과를 얻도록 하였다. 그러나 Ding 등[15]의 방법은 이산시간 T-S 퍼지 시스템만을 반영하였기 때문에 기저함수 변화율은 고려하지 않았다.

이 논문에서는 퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수를 이용하여 연속시간 T-S 퍼지 제어 시스템을 위한 H_∞ 제어기법을 제안한다. 즉, 퍼지 기저함수의 시간변화를 고려하는 Lyapunov 함수를 이용하여 주어진 T-S 퍼지 시스템의 안정성 및 H_∞ 제어 성능을 보장하는 제어 기법을 제안한다. 퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수 방법을 효과적으로 이용하고 페루프 시스템의 성능을 개선하기 위해, 적절한 합동변환[11]을 이용하여 제어기 환원이 유리하도록 시스템 행렬과 Lyapunov 행렬을 분리하였고, Ramos와 Peres[17]의 경계기법을 확장하여 최적화문제에 추가적인 결정변수를 도입하였으며 이를 통해 자유도를 더 부여하고 문제의 해집합 범위를 넓힐 수 있게 하였다. 특히, 합동변환을 적절히 적용하여 제어기 설계조건을 얻을 때 발생하는 여러 결정변수 곱의 상충을 해소하였다. 수치예제를 통해 제안된 방법의 유용성을 보였다.

II 문제 설정

일반적인 비선형 시스템에 대한 T-S 퍼지 시스템 모델은 퍼지 "IF-THEN" 규칙에 의하여 다음과 같이 표현된다[3].

Rule i :

$$\begin{aligned} &\text{IF } x_1(t) \text{ is } M_{i1}, \dots, \text{ AND } x_n(t) \text{ is } M_{in} \\ &\text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i w(t) + B_{ui} u(t) \\ &z(t) = C_i x(t) + D_i w(t) \end{aligned}$$

여기서, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$ 은 상태변수를 의미하고, $w \in L_2^p \subset R^p$ 는 외란입력, $u \in R^m$ 는 제어입력, $z \in R^q$ 는 성능평가출력, M_{ij} 은 i -번째 규칙의 j -번째 퍼지집합, r 은

IF-THEN 규칙의 개수를 의미한다. 이 규칙을 통해, 다음과 같은 시스템 T-S 퍼지 시스템 모델을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \rho_i(t) \{A_i x(t) + B_i w(t) + B_{ui} u(t)\}}{\sum_{i=1}^r \rho_i(t)} \quad (1)$$

$$z(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \rho_i(t) \{C_i x(t) + D_i w(t)\}}{\sum_{i=1}^r \rho_i(t)} \quad (2)$$

여기서, $\rho_i(t) = \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(t)$ 이고, $\mu_{ij}(t)$ 는 i -번째 규칙 j -번째 퍼지집합의 소속도이다. 퍼지 기저함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\alpha_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\sum_{i=1}^r \rho_i(t)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (3)$$

이 함수를 이용하여 (1), (2)를 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \{A_i x(t) + B_i w(t) + B_{ui} u(t)\} \quad (4)$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \{C_i x(t) + D_i w(t)\} \quad (5)$$

여기서, 퍼지 기저함수는

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) = 1, \quad 0 \leq \alpha_i(t) \leq 1 \quad (6)$$

을 만족한다. 상태궤환 제어기 설계문제를 위해, 행렬쌍 $(A_i, B_i), i = 1, \dots, r$ 는 제어가능하다고 가정한다. 간결성을 위해 (4), (5)를 다음과 같이 표현하기로 한다.

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))w(t) + B_u(\alpha(t))u(t) \quad (7)$$

$$z(t) = C(\alpha(t))x(t) + D(\alpha(t))w(t) \quad (8)$$

여기서,

$$\alpha(t) = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_r(t)]^T \in R^r,$$

$$A(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i, \quad B(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) B_i,$$

$$B_u(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) B_{ui}, \quad C(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) C_i,$$

$$D(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) D_i$$

이다.

앞서 설명한 방법과 동일하게 T-S 퍼지 규칙을 이용하여 상태궤환 제어기 모델을 구하면 다음과 같다.

Rule j :

$$\text{IF } x_1(t) \text{ is } M_{j1}, \dots, \text{ AND } x_n(t) \text{ is } M_{jn}$$

THEN $u(t) = K_j x(t), j = 1, \dots, r$

그러면, 최종 제어 입력은 다음과 같이 표현된다.

$$u(t) = K(\alpha(t))x(t) \quad (9)$$

여기서, $K(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) K_i$ 이다. 이 식을 (7)에 대입하면 다음과 같은 폐루프 시스템의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \{A(\alpha(t)) + B_u(\alpha(t))K(\alpha(t))\}x(t) + B(\alpha(t))w(t) \quad (10)$$

$$z(t) = C(\alpha(t))x(t) + D(\alpha(t))w(t) \quad (11)$$

이 논문의 목적은 다음 성능조건을 만족하는 상태궤환 제어기 (9)를 설계하는 것이다.

성능조건 1: $w(t) = 0$ 일 때, (6)을 만족하는 모든 $\alpha(t)$ 에 대해 폐루프 시스템 (10), (11)이 전역적으로 점근 안정하다.

성능조건 2: 외란입력 $w(t)$ 으로부터 성능평가출력 $z(t)$ 의 L_2 -이득이 $\gamma > 0$ 보다 작다. 즉, 0이 아닌 모든 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 와 상태 초기값 $x(0) = 0$ 에 대해, $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$ 를 만족한다.

여기서, 성능조건 2는 H_∞ -노움에 대한 성능조건으로서 이 조건을 만족하는 시스템은 그 H_∞ -노움의 상한 값이 γ 라는 것을 의미한다.

퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수를 이용하여 위 조건을 만족하는 제어기를 설계하기 위해 다음과 같이 가정한다.

가정 1: 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 를 실시간으로 측정 또는 추정할 수 있다. 이로부터 $\alpha(t)$ 의 시간변화율 $\dot{\alpha}(t)$ 를 얻을 수 있다.

가정 2: 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 의 시간변화율은 유한하며 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{\alpha_i(t)} \leq \nu_i, i = 1, \dots, r \quad (12)$$

III T-S 퍼지 제어시스템의 안정성 및 H_∞ 성능 분석

이 절에서는 퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수를 이용하여 T-S 퍼지 제어시스템의 안정성 및 H_∞ 성능을 분석한다. 퍼지 기저함수가 시간에 종속적이므로 그 함수에 종속적인 Lyapunov 함수의 행렬도 시간에 종속적이다. 따라서 안정성 분석 및 H_∞ 성능 분석에 사용되는 Lyapunov 함수의 시간미분 값에 기저함수의 시간변화율이 고려되어야 한다. 이 절에서는 가정 2에서 고려한 $\alpha(t)$ 의 시간변화율 관계식 (12)를 이용하여 주어진 T-S 퍼지 제어시스템의 안정성 및 H_∞ 성능을 보장하는 조건을 제시한다. 다음과 같이 $u(t) = 0$ 인 개루프 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))w(t) \quad (13)$$

$$z(t) = C(\alpha(t))x(t) + D(\alpha(t))w(t) \quad (14)$$

그러면, 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 에 종속적인 Lyapunov 함수와

(12)를 이용하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 1: 주어진 스칼라 $\gamma > 0, h > 0, \nu_i \geq 0, i = 1, \dots, r$ 및 (12)를 만족하는 모든 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 에 대해 부등식 (15)를 만족하는, 퍼지 기저함수에 종속적인 행렬 $P(\alpha(t)) > 0$ 와 상수행렬 G 가 존재하면 시스템 (13), (14)는 점근적으로 안정하고 이 시스템의 H_∞ -노움은 γ 보다 작거나 같다.

$$\Psi = \begin{bmatrix} GA(\alpha(t)) + A(\alpha(t))^T G^T + P(\dot{\alpha}(t)) & * & * & * \\ P(\alpha(t)) - G^T + h G^T A(\alpha(t)) & -h(G + G^T) & * & * \\ B(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C(\alpha(t)) & 0 & D(\alpha(t)) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

여기서, * 는 대칭행렬에서 대칭성으로 유추되는 요소이다.

증명: 이 시스템에 대한 Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V(x(t)) = x^T(t) P(\alpha(t)) x(t)$$

여기서, $P(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i, P_i > 0, i = 1, \dots, r$ 이다.

$w(t) = 0$ 일 때, 시스템 (13)의 상태궤적에 대한 이 Lyapunov 함수의 시간미분 값은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T [A(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) \\ &\quad + P(\dot{\alpha}(t))] x(t) \\ &= x(t)^T [A(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) \\ &\quad + P(\dot{\alpha}(t))] x(t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 마지막 등식은

$$\frac{d}{dt} P(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i = P(\dot{\alpha}(t))$$

으로부터 얻었다. 따라서 Lyapunov 이론에 의해, 다음 부등식 (17)을 만족하는 $P(\alpha(t)) > 0$ 가 존재하면 $w(t) = 0$ 인 시스템 (13)이 점근적으로 안정하다고 할 수 있다.

$$A(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) + P(\dot{\alpha}(t)) < 0 \quad (17)$$

또한, 다음과 같이 행렬 Γ_1 을 정의하자.

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A(\alpha(t)) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

(15)의 좌, 우에 각각 Γ_1^T 와 Γ_1 을 곱하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) + P(\dot{\alpha}(t)) & * & * \\ B(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) & -\gamma^2 I & * \\ C(\alpha(t)) & D(\alpha(t)) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

따라서 (15)를 만족하는 $P(\alpha(t)) > 0$ 와 G 가 존재하면 그 $P(\alpha(t))$ 가 (18)도 만족하므로 Schur 보수법[2]에 의해 (17)도 만족하게 된다. 이는 곧 $w(t) = 0$ 인 시스템 (13)이 점근

적으로 안정함을 의미한다.

(18)은 Schur 보수법에 의해

$$\begin{bmatrix} \Theta & * \\ B(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) + D(\alpha(t))^T C(\alpha(t)) & -\gamma^2 I + D(\alpha(t))^T D(\alpha(t)) \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

와 동치이다. 여기서,

$$\Theta = A(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) + P(\dot{\alpha}(t)) + C(\alpha(t))^T C(\alpha(t))$$

이다. (19)의 좌, 우에 각각 $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T$ 와 $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ 를 곱하여 정리하면 다음 식

$$\begin{aligned} \Omega &= x(t)^T [A(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) + P(\dot{\alpha}(t)) \\ &\quad + C(\alpha(t))^T C(\alpha(t))] x(t) + 2w(t)^T [B(\alpha(t))^T P(\alpha(t)) \\ &\quad + D(\alpha(t))^T C(\alpha(t))] x(t) + w(t)^T [D(\alpha(t))^T D(\alpha(t)) \\ &\quad - \gamma^2 I] w(t) \\ &= \dot{V}(x(t)) + z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

을 얻을 수 있고, 이로부터 또한 다음 식을 얻을 수 있다.

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) \leq \int_0^\infty (\gamma^2 w(t)^T w(t) - z(t)^T z(t)) dt \quad (21)$$

시스템이 점근적으로 안정하므로 $V(x(\infty)) = 0$ 이 된다. 따라서 모든 $0 \neq w(t) \in L_2^p[0, \infty)$ 와 $x(0) = 0$ 에 대해 (21)은 다음 식으로 귀결된다.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt &\leq \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \\ \Leftrightarrow \|z(t)\|_2 &\leq \gamma \|w(t)\|_2 \end{aligned}$$

그러므로 (15)를 만족하는 $P(\alpha(t)) > 0$ 와 G 가 존재하면 시스템 (13), (14)는 점근적으로 안정하고 H_∞ -노움은 γ 보다 작거나 같다. ■

주 1: (18)에서는 적절한 합동변환을 통해 여유변수 G 를 도입하여, (15)에서 볼 수 있는 Lyapunov 함수 행렬 $P(\alpha(t))$ 와 시스템 행렬 $A(\alpha(t))$ 의 곱에 의한 결합을 풀어주었다. 이렇게 하면 제어기의 실제 적용이 수월하다. 제어기 설계 조건으로부터 제어기 행렬을 환원할 때, $A(\alpha(t))$ 가 $P(\alpha(t))$ 와 같은 시변행렬과 곱으로 결합되어 있으면 제어기 행렬에 시변 역행렬이 포함된다. 따라서 제어기를 실제로 적용할 때 실시간으로 시변 역행렬을 구해야 하는 어려움이 있어 제어기의 실제 적용이 수월하지 않다. 반면에, 이를 상수행렬과의 곱으로 대체할 경우, 제어기 행렬은 병렬분산보상 기법[3]과 같은 형태로 환원되기 때문에 제어기의 실제 적용이 수월하다.

정리 1의 조건 (15)는 모든 $\alpha(t)$ 에 대해 만족해야 하므로 무한한 수의 조건이라 할 수 있다. 따라서 정리 1을 이용하기 위해서는 보수성을 감수해서라도 유한한 수의 조건으로 변환할 필요가 있다. 다음 결과는 정리 1을 기반으로 한, 유한한 수의 LMI에 의한 T-S 퍼지 제어시스템의 안정성 및 H_∞ 성능 보장 조건을 제시한다.

정리 2: 주어진 스칼라 $\gamma > 0$, $h > 0$, $\nu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$ 및 (12)를 만족하는 모든 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 에 대해 부등식 (22), (23)을 만족하는 행렬 $P_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, $F > 0$ 및 G 가 존재하면 시스템 (13), (14)는 점근적으로 안정하고 이 시스템의 H_∞ -노움은 γ 보다 작거나 같다.

$$\begin{bmatrix} GA_i + A_i^T G^T + \nu_i P_i + F & * & * & * \\ P_i - G^T + h G^T A_i & -h(G + G^T) & * & * \\ B_i^T P_i & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_i & 0 & D_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

$i = 1, \dots, r$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & * & * & * \\ A_{21} & -2h(G + G^T) & * & * \\ B_i^T P_j + B_j^T P_i & 0 & -2\gamma^2 I & * \\ C_i + C_j & 0 & D_i + D_j & -2I \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$i = 1, \dots, r-1; j = i+1, \dots, r$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{11} &= G(A_i + A_j) + (A_i^T + A_j^T) G^T + \nu_i P_i + \nu_j P_j - \frac{2}{r-1} F \\ A_{21} &= P_i + P_j - 2G^T + h G^T (A_i + A_j) \end{aligned}$$

이다.

증명: (6)과 (12)로부터 (15)는 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} G \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i^T \right) G^T + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right) - G^T + h G^T \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) B_i^T \right) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) C_i \right) \\ * & \quad * & * \\ -h(G + G^T) & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) D_i \right) & -I \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} G \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i^T \right) G^T + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \nu_i P_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right) - G^T + h G^T \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) B_i^T \right) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) C_i \right) \\ * & \quad * & * \\ -h(G + G^T) & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) D_i \right) & -I \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)^2 \Psi_i + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \Psi_{ij} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} GA_i + A_i^T G^T + \nu_i P_i & * & * & * \\ P_i - G^T + h G^T A_i & -h(G + G^T) & * & * \\ B_i^T P_i & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_i & 0 & D_i & -I \end{bmatrix}, i=1, \dots, r$$

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & * & * & * \\ \Delta_{21} & -2h(G + G^T) & * & * \\ B_i^T P_j + B_j^T P_i & 0 & -2\gamma^2 I & * \\ C_i + C_j & 0 & D_i + D_j & -2I \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{11} = G(A_i + A_j) + (A_i^T + A_j^T)G^T + \nu_i P_i + \nu_j P_j$$

$$\Delta_{21} = P_i + P_j - 2G^T + h G^T(A_i + A_j)$$

이다. 따라서 (22), (23)을 만족하는 $P_i > 0, i=1, \dots, r, F > 0$ 및 G 가 존재하면, (24)에서

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(t)^2 \Psi_i + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \Psi_{ij} < - \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t)^2 - \frac{2}{r-1} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \right) \text{blockdiag}\{F, 0, 0, 0\}$$

이 성립한다. 여기서, *blockdiag*는 블록대각행렬을 의미한다. 따라서 $F > 0, r > 1$ 및

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(t)^2 - \frac{2}{r-1} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r (\alpha_i(t) - \alpha_j(t))^2 \geq 0$$

의 관계로부터

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(t)^2 \Psi_i + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \Psi_{ij} < 0$$

을 얻을 수 있고, 이는 곧 (15)를 의미하므로, 시스템 (13), (14)가 점근적으로 안정하고 이 시스템의 H_∞ -노음이 γ 보다 작거나 같다고 할 수 있다. ■

주 2: (22), (23)은 변수 $P_i, i=1, \dots, r, F$ 및 G 에 대해 선형이므로 LMI 조건으로 볼 수 있다. 따라서 interior-point 기법[2]과 같은 LMI에 대한 수치해석 기법을 이용하면 주어진 문제를 효과적으로 풀 수 있다. 특히, 정리 2의 문제는 LMI 타당성 문제로 볼 수 있으므로, 예컨대 MATLAB LMI Control Toolbox[18]의 'feasp' 명령 등을 통해 그 해를 구할 수 있다. 한편, (22), (23)의 변수들을 스칼라 값으로 환산하여 얻은 변수들의 개수는 $N_v = n(n+1)(2+r)/2$ 이고 부등식 열의 개수는 $N_r = r(r+1)(3n+q)/2$ 이며, MATLAB LMI Control Toolbox에 의해 타당성 문제를 푸는데 필요한 시간은 $N_v^3 N_r$ 에 비례한다[2,18].

주 3: 정리 2의 결과로부터 다음을 유추할 수 있다. 즉, 주어진 $\gamma > 0, \nu_i \geq 0, i=1, \dots, r$ 및 (12)를 만족하는 모든 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 에 대해 다음 부등식

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + \nu_i P_i & * & * \\ B_i^T P_i & -\gamma^2 I & * \\ C_i & D_i & -I \end{bmatrix} < 0, i=1, \dots, r \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_j + A_j^T P_i + P_i A_j + P_j A_i + \nu_i P_i & * & * \\ B_i^T P_j + B_j^T P_i & -\gamma^2 I & * \\ C_i + C_j & D_i + D_j & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$i=1, \dots, r-1; j=i+1, \dots, r$

을 만족하는 $P_i > 0, i=1, \dots, r$ 가 존재하면 시스템 (13), (14)가 점근적으로 안정하고 이 시스템의 H_∞ -노음이 γ 보다 작거나 같다는 것을 (18)로부터 유추할 수 있다. (25), (26)도 퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수를 이용한 조건으로서 결정변수에 대해 선형식이다. 따라서 이 결과도 LMI에 의한 T-S 퍼지 제어시스템의 안정성 및 H_∞ 성능 보장 조건이라 할 수 있다. 그러나 (25), (26)이 안정성 및 H_∞ 성능 분석에는 적합하지만 주 1에서 지적한 바와 같이 시스템 행렬과 Lyapunov 함수 행렬이 곱으로 결합되어 있기 때문에 제어기 설계에는 적합하지 않다. 이는 (22), (23)과 대비되는 점이다.

정리 2에서는 보수성을 보다 더 줄이기 위해 (22), (23)에 다음에 언급하는 방법론을 적용하였다.

파라미터에 종속적인 시스템(여기서는 T-S 퍼지 시스템)을 위한 LMI 기반 충분조건은 다음과 같은 형태를 갖는 경우가 많다.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_{ii} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N-1} \alpha_i \alpha_j X_{ij} < 0,$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i=1, \dots, N$$

위 조건을 만족하기 위한 충분조건 중 많이 이용되는 조건은 $X_{ii} < 0$ AND $X_{ij} < 0 (i \neq j)$ 이다. α_i 는 항상 0보다 작거나 크다는 가정 때문에 이 충분조건에 의해 $\Phi < 0$ 이 항상 만족한다. 그러나 다음 식을 통해 이 충분조건이 보수적일 수 있음을 알 수 있다.

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 X_{ii} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N-1} \alpha_i \alpha_j X_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_M & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$$

위 식에서 $\Psi < 0$ 이 만족하면 $\Phi < 0$ 이 만족한다. 그런데 $\Psi < 0$ 은 $X_{ii} < 0$ 을 의미하지만 $X_{ij} < 0 (i \neq j)$ 을 꼭 의미하지는 않는다. 다시 말하면, $X_{ij} < 0 (i \neq j)$ 의 여부와 관계없이 $\Psi < 0$ 이 만족할 수 있다. 따라서 조건 $X_{ii} < 0$ AND $X_{ij} < 0 (i \neq j)$ 가 조건 $\Psi < 0$ 의 특수한 경우라 할 수 있다. 이는 조건 $\Psi < 0$ 가 조건 $X_{ii} < 0$ AND $X_{ij} < 0 (i \neq j)$ 에 비해 덜 보수적일 수 있음을 의미하고 따라서 조건 $\Psi < 0$ 를 통해 얻는 제어 성능이 조건 $X_{ii} < 0$ AND $X_{ij} < 0 (i \neq j)$ 를 통해 얻는 성능보다 더 좋아질 수 있음을 의미한다. 이렇듯 상계(upper-bound)나 하계(lower-bound)를 적절히 취해 새로운 부등식을 도출하는 기법을 경계기법(bounding technique)이라 한다.

정리 2의 (22), (23)에는 Ramos와 Peres[17]의 경계기법을 확장하여 적용하였다. 이러한 기법은 Kim과 Lee[16]에 의해 제안된 이후 많은 관심을 받아왔는데[15], 파라미터에 종속적인 시스템의 안정도 분석이나 제어 시스템 설계 때 적용하는 LMI 기반 충분조건의 보수성을 더 줄이고자 할 때

이용된다. 일반적으로 [17]의 방법에 의한 행렬식이 [16]의 방법에 의한 행렬식보다 차수가 작기 때문에 계산량이 적다는 장점이 있는 반면, 경계값에 임의의 상수를 사용하기 때문에 [16]의 방법보다 더 보수적일 수 있다는 단점이 있다. 이 논문에서는 계산량을 줄이기 위해 [17]의 방법을 이용하는데, 보수성을 조금이라도 더 줄이기 위해 경계값에 자유변수 F 를 부여하였다.

IV. 상태제한 H_∞ 제어기 설계

다음과 같이 $u(t) = K(\alpha(t))x(t)$ 인 폐루프 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha(t)) + B_u(\alpha(t))K(\alpha(t)))x(t) + B(\alpha(t))w(t) \quad (27)$$

$$z(t) = C(\alpha(t))x(t) + D(\alpha(t))w(t) \quad (28)$$

그리고 다음과 같은 가정을 하자.

가정 3: 퍼지 기저함수의 시간변화율은 다음 조건을 만족한다.

$$\dot{\alpha}_i(t) \leq \nu_i \alpha_i(t) \leq \bar{\nu} \alpha_i(t), \quad i = 1, \dots, r \quad (29)$$

그러면, 정리 2로부터 다음과 같은 상태제한 H_∞ 제어기 설계조건을 구할 수 있다.

정리 3: 주어진 스칼라 $\gamma > 0$, $h > 0$, $\bar{\nu} \geq 0$ 및 (12)를 만족하는 모든 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 에 대해 부등식 (31), (32)을 만족하는 행렬 $X_i > 0$, Y_i , $i = 1, \dots, r$, $F > 0$ 및 G 가 존재하면 시스템 (27), (28)은 점근적으로 안정하고 이 시스템의 H_∞ -노름은 γ 보다 작거나 같다. 이 때, 상태제한 제어기는

$$u(t) = K(\alpha(t))x(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) Y_i G^{-1} x(t) \quad (30)$$

로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11}^{(1)} & * & * & * \\ \Pi_{21}^{(1)} & -h(G+G^T) & * & * \\ B_i^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_i X_i & 0 & D_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11}^{(2)} & * & * & * \\ \Pi_{21}^{(2)} & -2h(G+G^T) & * & * \\ B_i^T + B_j^T & 0 & -2\gamma^2 I & * \\ C_i X_j + C_j X_i & 0 & D_i + D_j & -2I \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$i = 1, \dots, r-1; j = i+1, \dots, r$

여기서,

$$\Pi_{11}^{(1)} = G^T A_i^T + A_i G + Y_i^T B_{ui}^T + B_{ui} Y_i + \bar{\nu} X_i + F$$

$$\Pi_{21}^{(1)} = X_i - G + h G^T A_i^T + h Y_i^T B_{ui}^T$$

$$\Pi_{11}^{(2)} = G^T (A_i^T + A_j^T) + (A_i + A_j) G + Y_i^T B_{uj}^T + Y_j^T B_{ui}^T + B_{ui} Y_j + B_{uj} Y_i + \bar{\nu} (X_i + X_j) - \frac{2}{r-1} F$$

$$\Pi_{21}^{(2)} = X_i + X_j - 2G^T + h G^T (A_i^T + A_j^T) + h Y_i^T B_{uj}^T + h Y_j^T B_{ui}^T$$

이다.

증명: 유도식의 간결성을 위해 시간변수 t 의 종속성을 표시하지 않기로 한다. (12)의 관계와 (31), (32)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} G^T A(\alpha)^T + A(\alpha)G + Y(\alpha)^T B_u(\alpha)^T + B_u(\alpha)Y(\alpha) + \bar{\nu} X(\alpha) \\ X(\alpha) - G + h G^T A(\alpha)^T + h Y(\alpha)^T B_u(\alpha)^T \\ B(\alpha)^T \\ C(\alpha)X(\alpha) \\ * & * & * \\ -h(G+G^T) & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & D(\alpha) & -I \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 \Xi_i + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i \alpha_j \Xi_{ij}$$

$$< - \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i^2 - \frac{2}{r-1} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i \alpha_j \right) \text{blockdiag}\{F, 0, 0, 0\}$$

여기서,

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \Xi_{11}^{(i)} & * & * & * \\ \Xi_{21}^{(i)} & -h(G+G^T) & * & * \\ B_i^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_i X_i & 0 & D_i & -I \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, r$$

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_{11}^{(ij)} & * & * & * \\ \Xi_{21}^{(ij)} & -2h(G+G^T) & * & * \\ B_i^T + B_j^T & 0 & -2\gamma^2 I & * \\ C_i X_j + C_j X_i & 0 & D_i + D_j & -2I \end{bmatrix},$$

$i = 1, \dots, r-1; j = i+1, \dots, r$

$$\Xi_{11}^{(i)} = G^T A_i^T + A_i G + Y_i^T B_{ui}^T + B_{ui} Y_i + \bar{\nu} X_i$$

$$\Xi_{21}^{(i)} = X_i - G + h G^T A_i^T + h Y_i^T B_{ui}^T$$

$$\Xi_{11}^{(ij)} = G^T (A_i^T + A_j^T) + (A_i + A_j) G + Y_i^T B_{uj}^T + Y_j^T B_{ui}^T + B_{ui} Y_j + B_{uj} Y_i + \bar{\nu} (X_i + X_j)$$

$$\Xi_{21}^{(ij)} = X_i + X_j - 2G^T + h G^T (A_i^T + A_j^T) + h Y_i^T B_{uj}^T + h Y_j^T B_{ui}^T$$

이다. 따라서 (31), (32)를 만족하는 행렬 $X_i > 0$, Y_i , $i = 1, \dots, r$, $F > 0$ 및 G 가 존재하면 정리 2의 증명으로부터 다음 식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} G^T A(\alpha)^T + A(\alpha)G + Y(\alpha)^T B_u(\alpha)^T + B_u(\alpha)Y(\alpha) + \bar{\nu} X(\alpha) \\ X(\alpha) - G + h G^T A(\alpha)^T + h Y(\alpha)^T B_u(\alpha)^T \\ B(\alpha)^T \\ C(\alpha)X(\alpha) \\ * & * & * \\ -h(G+G^T) & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & D(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0$$

이 때, 변수 $X(\alpha)$, $Y(\alpha)$ 를 $X(\alpha) = P(\alpha)^{-1}$, $Y(\alpha) = K(\alpha)G$ 로 치환하여 정리하면 위 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} G^T A(\alpha)^T + A(\alpha)G + Y(\alpha)^T B_u(\alpha)^T + B_u(\alpha)Y(\alpha) + \bar{\nu} P(\alpha)^{-1} \\ P(\alpha)^{-1} - G + h G^T A(\alpha)^T + h Y(\alpha)^T B_u(\alpha)^T \\ B(\alpha)^T \\ C(\alpha)P(\alpha)^{-1} \\ * & * & * \\ -h(G+G^T) & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & D(\alpha) & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G^T A_\alpha(\alpha)^T + A_\alpha(\alpha)G + \bar{\nu} P(\alpha)^{-1} & * & * & * \\ P(\alpha)^{-1} - G + h G^T A_\alpha(\alpha)^T & -h(G+G^T) & * & * \\ B(\alpha)^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C(\alpha)P(\alpha)^{-1} & 0 & D(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

여기서, $A_d(\alpha) = A(\alpha) + B_u(\alpha)K(\alpha)$ 이다. (33)의 좌, 우

$$\text{에 각각 } \begin{bmatrix} I & A_d(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{와 } \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_d(\alpha)^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{를 곱하면 다음}$$

과 같은 동치식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)^{-1}A_d(\alpha)^T + A_d(\alpha)P(\alpha)^{-1} + \bar{\nu}P(\alpha)^{-1} & * & * \\ B(\alpha)^T & -\gamma^2 I & * \\ C(\alpha)P(\alpha)^{-1} & D(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0$$

위 식에 Schur 보수법을 두 번 연속으로 적용하고 정리하면

$$\begin{aligned} & P(\alpha)^{-1}A_d(\alpha)^T + A_d(\alpha)P(\alpha)^{-1} + \bar{\nu}P(\alpha)^{-1} \\ & + P(\alpha)^{-1}C(\alpha)^TC(\alpha)P(\alpha)^{-1} + P(\alpha)^{-1}(P(\alpha)B(\alpha) \\ & + C(\alpha)^TD(\alpha))(\gamma^2 I - D(\alpha)^TD(\alpha))^{-1}(B(\alpha)^TP(\alpha) \\ & + D(\alpha)^TC(\alpha))P(\alpha)^{-1} < 0 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있고, 여기에 다시 좌, 우 각각 $P(\alpha)$ 를 곱한 후 다시 Schur 보수법을 적용하고 (29)를 고려하면 (18)을 얻을 수 있다. 따라서 정리 1에 의해, 주어진 $\gamma > 0$, $h > 0$, $\bar{\nu} \geq 0$ 및 (12)를 만족하는 모든 퍼지 기저함수 $\alpha(t)$ 에 대해 부등식 (31), (32)를 만족하는 행렬 $X_i > 0$, Y_i , $i = 1, \dots, r$, $F > 0$ 및 G 가 존재하면, 시스템 (27), (28)이 점근적으로 안정하고 이 시스템의 H_∞ -노음이 γ 보다 작거나 같다고 할 수 있다. ■

정리 3의 해는 LMI 타당성 문제를 통해 구할 수 있다. 만약 H_∞ -노음의 상한 값 γ 를 주어진 상수가 아닌 변수로 간주한다면 이를 최소화함으로써 최적의 제어성능을 얻을 수 있다. 따라서 다음 문제를 통해 최적의 제어성능을 발휘하는 제어를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \gamma^2 \\ & \text{subject to } X_i > 0, i = 1, \dots, r \\ & \text{Eqs. (31), (32)} \end{aligned} \quad (34)$$

문제 (34)의 조건들이 모두 LMI로 표현되므로 이 문제를 블록 최적화 문제로 볼 수 있으며 따라서 전역적 해를 구할 수 있다. 이러한 최적화 문제는 표준 LMI 문제인 고유치 문제(eigenvalue problem)로 볼 수 있으며 MATLAB LMI Control Toolbox의 'mincx' 명령 등을 통해 풀 수 있다.

주 4: 위의 최적화 문제 (34)는 (31), (32)의 $h > 0$ 에 의해 그 결과가 달라진다. 그러므로 h 를 잘 선택함으로써 최적의 γ^2 을 얻을 수 있다. 만약 h 를 변수로 놓게 되면 (31), (32)가 LMI가 아니기 때문에 그 문제는 더 이상 블록 최적화 문제가 아니다. 이 점을 해결하기 위해 h 에 대한 선형 탐색(line-searching)을 이용한다. 즉, 고정된 h 에 대해 최적화 문제 (34)를 풀고 최적의 γ^2 을 얻을 때까지 h 를 바꾸어 가면서 문제 (34)를 푼다.

V. 수치예제

이 절에서는 수치예제를 통해 이 논문에서 제안한 방법과 기존의 병렬분산보상 기법[3]을 비교한다. 해당 LMI 문

표 1. H_∞ 제어 성능.

Table 1. H_∞ control performances.

Methods	Theorem 3	PDC [3]	Improved PDC
Guaranteed γ_{opt}	2.7035	2.8735	2.8613

제는 MATLAB LMI Control Toolbox를 이용하여 풀었다.

이 예제에서는 보장된 최적의 γ 값을 통해 H_∞ 제어 성능을 비교한다. 얻어진 γ 값이 작을 때 더 우수한 H_∞ 제어 성능을 발휘한다고 할 수 있다. 성능 비교를 위해 다음과 같은 시스템 행렬을 고려한다. 여기서, $r=4$ 이고 행렬들의 값은 임의로 주어졌다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2525 & -4.3110 & -0.3780 \\ 1.0705 & -1.1020 & -3.1695 \\ 0.7535 & -1.3145 & -4.2240 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.9275 & 0.0685 & 2.1760 \\ -2.2280 & 0.0225 & -3.9015 \\ -1.8975 & 0.5630 & -5.0770 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -6.5470 & -3.1485 & 2.6255 \\ -1.2090 & -8.6760 & -3.5640 \\ 3.6770 & 3.7330 & -1.1380 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2.9325 & -3.0885 & 4.1175 \\ -3.5545 & -5.0845 & 4.4465 \\ -2.8365 & -3.6840 & -3.1660 \end{bmatrix},$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{u2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{u3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{u4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.1020 \\ 4.1550 \\ 1.7025 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 5.8525 \\ 8.9055 \\ 6.4530 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2.2575 \\ 5.3105 \\ 2.8580 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 4.1360 \\ 7.1890 \\ 4.7365 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0.05 \ 0 \ 0], C_2 = [0.025 \ 0 \ 0],$$

$$C_3 = [0.04 \ 0 \ 0], C_4 = [0.01 \ 0 \ 0],$$

$$D_1 = 0.7290, D_2 = 1.3369, D_3 = 1.1431, D_4 = 0.6847$$

이 논문에서 제안한 방법(정리 3)을 통해 얻은 상태궤환 제어이득 행렬은

$$K_1 = [-6.9065 \ -18.6411 \ -4.1040],$$

$$K_2 = [-6.1353 \ -16.4866 \ -3.4256],$$

$$K_3 = [-4.2608 \ -11.9099 \ -3.1096],$$

$$K_4 = [-7.2955 \ -19.9517 \ -5.9179]$$

이고, 이에 대응하는 G , F 및 Lyapunov 행렬 P_i , $i = 1, \dots, 4$ 는 다음과 같다.

$$G = \begin{bmatrix} 34.1023 & -10.0617 & -5.1407 \\ -10.4107 & 4.8250 & 1.6651 \\ -5.7383 & -1.2946 & 4.1862 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1.0405 & 1.0080 & 0.6707 \\ 1.0080 & 0.9768 & 0.6501 \\ 0.6707 & 0.6501 & 0.4330 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0842 & 0.1789 & 0.0137 \\ 0.1789 & 0.6138 & -0.0072 \\ 0.0137 & -0.0072 & 0.2047 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.1012 & 0.1694 & 0.0440 \\ 0.1694 & 0.4666 & 0.0309 \\ 0.0440 & 0.0309 & 0.2220 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.0922 & 0.2382 & 0.0647 \\ 0.2382 & 0.8948 & 0.1280 \\ 0.0647 & 0.1280 & 0.2233 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.0314 & 0.0255 & -0.0001 \\ 0.0255 & 0.1538 & -0.0537 \\ -0.0001 & -0.0537 & 0.1845 \end{bmatrix}$$

위 상태궤환 제어기를 통해 얻은 보장된 최적의 γ 는 $h = 0.0177$, $\bar{\nu} = 10^{-5}$ 일 때 $\gamma_{opt} = 2.7035$ 이고, 기존의 병렬 분산보상 기법(PDC)을 통해 얻은 보장된 최적의 γ 는 $\gamma_{opt} = 2.8735$ 이다. 또한, 경계기법에 의해 추가적인 결정변수 F 를 도입하여 기존의 병렬분산보상 기법을 개선할 경우(improved PDC), $\gamma_{opt} = 2.8613$ 의 보장된 최적의 γ 를 얻을 수 있다. 이를 표 1에 정리하였다. 이 결과를 통해 이 논문에서 제안한 방법이 기존의 방법에 비해 더 우수한 H_∞ 제어 성능을 발휘할 수 있음을 보였다.

VI. 결론

이 논문에서는 퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수를 이용하여 연속시간 T-S 퍼지 제어 시스템을 위한 H_∞ 제어 기법을 제안하였다. 퍼지 기저함수의 시간변화를 고려하는 Lyapunov 함수를 이용하여 주어진 T-S 퍼지 시스템의 H_∞ 성능을 보장하기 위한 충분조건들을 선형행렬부등식으로 제시하였고 이를 H_∞ -노음을 최소화하는 블록 최적화 문제에 이용하였다. 퍼지 기저함수에 종속적인 Lyapunov 함수 방법을 효과적으로 이용하고 페루프 시스템의 성능을 개선하기 위해, 적절한 합동변환을 이용하여 제어기 환원이 유리하도록 시스템 행렬과 Lyapunov 행렬을 분리하였고, 경계기법을 이용하여 최적화 문제에 추가적인 결정변수를 도입하였으며 이를 통해 자유도를 더 부여하고 문제의 해 집합 범위를 넓힐 수 있게 하였다. 특히, 합동변환을 적절히 적용하여 제어기 설계조건을 얻을 때 발생하는 여러 결정변수 곱의 상충을 해소하였다. 수치예제를 통해 제안된 방법의 유용성을 보였다.

참고문헌

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [3] K. Tanaka, T. Ikeda, and H.O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 1-13, 1996.
- [4] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, 1996.
- [5] M. Johansson, K.-E. Arzen, and A. Rantzer, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 7, pp. 713-722, 1999.
- [6] G. Feng and D. Sun, "Generalized H_2 controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions," *IEEE Trans. Circuits and Systems--I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 12, pp. 1843-1850, 2002.
- [7] G. Feng, "Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 5, pp. 605-612, 2003.
- [8] K. Tanaka, T. Hori, and H.O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.
- [9] D.J. Choi and P. Park, " H_∞ state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent Lyapunov functions," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 2, pp. 271-278, 2003.
- [10] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 37, pp. 261-265, 1999.
- [11] P.J. de Oliveira, R.C.L.F. Oliveira, V.J.S. Leite, V.F. Montagner, and P.L.D. Peres, " H_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions," *Automatica*, vol. 40, pp. 1053-1061, 2004.
- [12] S. Zhou, G. Feng, J. Lam, and S. Xu, "Robust H_∞ control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions," *Information Sciences*, vol. 174, pp. 197-217, 2005.
- [13] S. Zhou and G. Feng, "Generalised H_2 controller synthesis for uncertain discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 153, no. 1, pp. 74-80, 2006.
- [14] J. Lam and S. Zhou, "Dynamic output feedback H_∞ control of discrete-time fuzzy systems: a fuzzy-basis-dependent Lyapunov function approach," *Int. J. Systems Science*, vol. 38, no. 1, pp. 25-37, 2007.
- [15] B. Ding, H. Sun, and P. Yang, "Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form," *Automatica*, vol. 42, pp. 503-508, 2006.
- [16] E. Kim and H. Lee, "New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 5, pp. 523-534, 2000.

[17] D.C.W. Ramos and P.L.D. Peres, "A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 43, pp. 371-378, 2001.

[18] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.



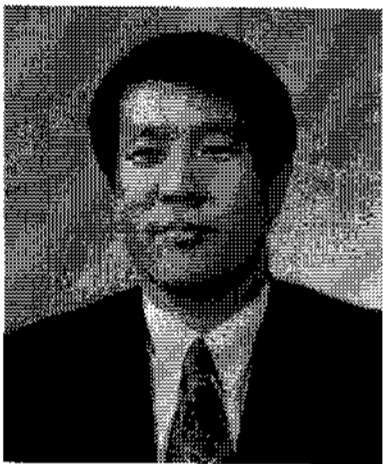
최 현 철

1995년 아주대학교 제어계측공학과 졸업. 1997년 동 대학원 석사. 2006년 동 대학원 박사. 현재 서울대학교 전기·컴퓨터공학부 박사후연수연구원. 관심 분야는 LMI 기반 제어기법.



좌 동 경

1995년 서울대학교 제어계측공학과 졸업. 1997년 동 대학원 석사. 2001년 동 대학원 박사. 2005년~현재 아주대학교 전자공학부 조교수. 관심분야는 비선형 적응제어, 로봇 및 미사일 제어 응용.



홍 석 교

1971년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 석사. 1981년 동 대학원 박사. 1976년~현재 아주대학교 전자공학부 교수. 관심분야는 로봇제어, 컴퓨터 응용 및 지능제어.