

# Riemann 해법을 이용한 1차원 개수로 수리해석 I : 모형 개발

## One-dimensional Hydraulic Modeling of Open Channel Flow Using the Riemann Approximate Solver I : Model Development

김 지 성\* / 한 건 연\*\*  
Kim, Ji Sung / Han, Kun Yeun

### Abstract

The object of this study is to develop the model that solves the numerically difficult problems in hydraulic engineering and to demonstrate the applicability of this model by means of various test examples, such as, verification in the gradually varied unsteady condition, three steady flow problems with the change of bottom slope with exact solution, and frictional bed with analytical solution. The governing equation of this model is the integral form of the Saint-Venant equation satisfying the conservation laws, and finite volume method with the Riemann solver is used. The evaluation of the mass and momentum flux with the HLL Riemann approximate solver is executed. MUSCL-Hancock scheme is used to achieve the second order accuracy in space and time. This study introduce the new and simple technique to discretize the source terms of gravity and hydrostatic pressure force due to longitudinal width variation for the balance of quantity between nonlinear flux and source terms. The results show that the developed model's implementation is accurate, robust and highly stable in various flow conditions with source terms, and this model is reliable for one-dimensional applications in hydraulic engineering.

**keywords** : St. Venant Equation, finite volume scheme, Approximate Riemann Solver, source terms, conservation property

### 요 지

본 연구의 목적은 수공학 분야에서 수치해석이 난해한 문제를 해결하기 위한 모형을 개발하고, 해석해가 존재하는 다양한 수치실험, 즉 하상과 하폭이 함께 변하는 점변부경류 조건에서의 검증, 하상경사가 변화하는 세가지 정상상태 조건의 문제, 그리고 해석해가 있는 마찰하상에 적용함으로써 개발된 모형의 적용성을 검증하기 위한 것이다. 모형의 지배방정식은 보존 법칙을 만족하는 Saint-Venant 적분형 방정식이며, Riemann 해법에 의한 유한체적법이 사용되었다. 질량 및 운동량의 흐름을 계산에 HLL Riemann 근사해법이 사용되었고, 시간-공간에서 2차정확도를 위하여 MUSCL-Hancock 기법이 사용되었다. 본 연구에서는 비선형의 흐름율과 생성항과의 균형을 위하여, 중력과 흐름 방향 하폭의 변화로 인한 정수압력에 의한 생성항을 차분하는 새로운 간편한 기법을 소개하였다. 수치실험 모의결과는 개발된 모형이 생성항을 포함한 다양한 흐름조건에서 정확하고, 견고하며, 매우 안정적임을 보여주고, 또한 수공학 분야에서 일차원 적용에 적합한 모형임을 보여준다.

**핵심용어** : St. Venant 방정식, 유한체적기법, 근사 Riemann 해법, 생성항, 보존특성

\* 한국건설기술연구원 하천해안연구실 박사후연구원  
Post-Doc., River and Coastal Research Division, Korea Institute of Construction Technology, Goyang-Si, Gyeonggi-Do, Korea  
(e-mail: jisungk@kict.re.kr)

\*\* 경북대학교 공과대학 토목공학과 교수  
Professor, Department of Civil Engineering, Kyungpook National University, Daegu, Korea

## 1. 서론

하천에서 수리학적 현상을 파악하고 하천환경에 미치는 영향을 평가하기 위해서 수치해석 모형에 의한 시뮬레이션은 매우 중요한 사항이다. 특히 홍수시 댐 붕괴류, 제방 붕괴류 등과 같은 급변 부정류의 선단부 수치해석, 수공구조물에 의한 수위상승의 예측이나 저수 및 갈수시 하천에서 이송-확산에 의한 오염물의 혼합과정을 해석하는 등 수공학 분야에서 실제적인 문제해결을 위해서는 보다 정확한 수위변동, 유속의 계산이 필요하게 된다.

하천에서 부정류를 포함한 모든 흐름의 문제를 해결하기 위해서 일반적으로 적용되고 있는 Preissmann 기법의 1차원 유한차분모형은 실제 자연조건에서 비교적 합리적인 계산결과를 제공하고 있으나, 상류-사류의 천이류 구간, 급변 부정류의 선단부 해석, 수공구조물 주변에서의 해석 등에 있어서 수치적인 불안정성을 나타내고 있다(Jin and Fread, 1997; Hu *et al.*, 1998). 특히 댐·제방 등의 붕괴로 인하여 발생하는 급격한 유량의 변화와 흐름영역의 변화로 인한 천이류 및 도수의 발생, 유량이 매우 적은 갈수기·저수기의 흐름해석은 기존의 수치해법의 한계로 인하여 수리모형실험 및 경험식 또는 해석기법의 단순화 등에 의존하고 있는 실정이다.

Zhou *et al.*(2001)은 공기동역학 분야에서 개발된 수심경사를 이용하는 기법(Depth Gradient Method)을 응용하여 수면경사를 이용하는 기법(Surface Gradient Method)을 제안하였다. 그들은 흐름율 계산에 HLL(Harten, Lax, and van Leer) Riemann 해법을 사용하였으며 생성항을 중앙차분기법으로 처리함으로써 보존특성이 만족됨을 증명하였다. 이 후 불연속적인 계단형태의 하상경사에 적용이 가능하도록 확장한 SGMS 기법을 제안하였으며 다양한 하상경사의 실험 자료와 비교하여 검증하였다(Zhou *et al.*, 2002; Zhou *et al.*, 2004). 그는 제안된 기법들을 2차원으로 확장하였으므로 1차원 방정식의 생성항인 측면 정수압의 변화는 고려하지 않았다. Goutal and Maurel(2002)은 Roe Riemann 해법에 근거한 1차원 Saint-Venant 식 해법을 제안하였다. 그들은 하상경사항에 상류이송기법을 적용하여 차분하였고, 측면 정수압은 중앙차분기법으로 처리하여 흐름율의 보정 없이 보존 특성이 만족될 수 있음을 증명하였다. Vukovic and Sopta(2003)는 Roe Riemann 해법으로 흐름율을 계산할 때 발생하는 오차를 흐름율이 오직 공간에 의존하고 있음을 지적하여, 오차 값을 수치적으로 근사하였다. 그리고 생성항은 상

류이송 기법으로 차분하여 보존 특성을 만족시켜 저유량의 실제 하천에 적용하였다. Delis(2003)는 HLL(Harten, Lax, van Leer, and Einfeldt) Riemann 해법으로 흐름율을 계산하고, Garcia-Navarro and Vazquez-Cendon(2000)이 제안한 것과 같이 흐름율의 공간 변화율에서 하폭변화로 인하여 발생하는 변화율을 분리하여 흐름율을 보정하고 생성항은 상류이송 기법으로 차분하여 보존특성이 만족될 수 있음을 증명하였다.

국내에서의 Riemann 해법을 이용한 유한체적법에 대한 연구로는 주로 2차원 천수방정식 해석에 국한되고 있는 실정이다. 이길성과 이성태(1998)는 Roe Riemann 해법을 이용하여 비구조적격자를 사용하기 위한 수정 MUSCL(Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) 기법을 적용하였다. Yoon and Kang(2004)은 HLL Riemann 해법과 다차원 경사제한기법을 이용한 비구조적격자를 사용하여 Malpasset 댐 붕괴에 적용하였다. 김대홍과 조용식(2004), Kim *et al.*(2004)은 HLLC 기법과 WAF 기법을 이용하여 흐름율을 계산하고 생성항을 분리하여 해석하는 기법을 사용함으로써 근해지진해일의 거동 예측에 관한 문제에 적용하였다.

이와 같이 Riemann 해법을 이용한 유한체적법은 많은 연구결과로부터 불연속적인 흐름의 해석에 정확한 해를 제공할 수 있음이 인정되고 있다. 그러나 대부분의 연구결과가 적용대상이 균일한 단순 하도의 1차원 해석이거나 2차원 해석에 국한되어 있다. 뿐만 아니라 생성항의 수치처리에 따라 보존 특성이 만족될 수 없음에도 불구하고, 불규칙한 하천단면에서 1차원 생성항 처리에 관한 유한체적기법의 국내 연구는 거의 전무한 실정이다. 1차원 불규칙 하천단면에서 고정확도 해석을 위하여 김원 등(2005a)은 ENO 기법과 상류이송기법을 이용한 생성항 처리에 관한 연구를 수행하여, 다양한 흐름조건에서 개발된 모형의 적용성 및 정확성을 검증하였다. 그러나 그들은 음해법에 의한 유한차분법을 사용함으로써 기존 연구결과를 본 연구에 그대로 인용하는 것은 불가능하다.

본 연구의 목적은 상류-사류의 천이류 해석, 도수에 의한 불연속류 해석 등을 위하여 수치적으로 안정되고 정확한 것으로 인정된 Riemann 해법을 이용한 유한체적기법을 하상과 하폭이 변화하는 1차원 개수로 해석에 적용하기 위하여, 생성항의 수치처리 기법을 개발하고, 이를 해석해가 존재하는 다양한 흐름조건에 적용함으로써 개발된 기법의 적용성을 검증하는데 있다. 이를 위하여 유한체적을 유출입하는 질량과 운동량의 흐름율 계산에 HLL Riemann 근사해법과 MUSCL 기법이 사용되었으며, 계산된 비선형의 흐름율과 보존 특성을 만

측시켜줄 수 있는 하상 및 하폭 변화로 인한 생성항을 처리하는 기법을 제안함으로써 하상경사와 하폭이 변화하는 비균일 하도의 1차원 수치해석모형을 개발하였다.

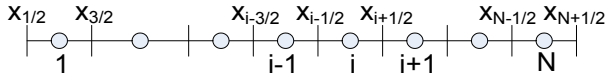


Fig. 1. Definition Sketch of Computational Grid

## 2. 지배방정식

본 연구에서는 적분형의 Saint-Venant 방정식을 사용하여 유한체적법에 의한 수치모형을 개발하고자 한다. Fig. 1과 같은 유한체적  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t, t + \Delta t]$ 에서 체적 내의 절점  $i$ 의 흐름변수 값이 동일한 시간에서 유한체적의 값을 대표하고, 중간점 공식을 적용하여 시간 적분함으로써 Eqs. (1) and (2)와 같이 쓰여질 수 있다.

$$A_i^{t+\Delta t} = A_i^t - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} [Q_{i+1/2}^{t+\Delta t/2} - Q_{i-1/2}^{t+\Delta t/2}] \quad (1)$$

$$Q_i^{t+\Delta t} = Q_i^t - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left[ \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_{i+1/2}^{t+\Delta t/2} - \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_{i-1/2}^{t+\Delta t/2} \right] + \frac{g\Delta t}{\Delta x_i} \left[ \int_{i-1/2}^{i+1/2} I_2 dx + \int_{i-1/2}^{i+1/2} A(S_0 - S_f) dx \right]^{t+\Delta t/2} \quad (2)$$

여기서  $A$ 는 흐름단면적,  $Q$ 는 유량,  $g$ 는 중력가속도이다.  $I_1, I_2$ 는 각각 단면에서의 정수압력과 단면변화로 인하여 생성된 측면 정수압력을 고려해 주는 항이고,  $S_0$ 는 하상경사이며,  $S_f$ 는 마찰경사로 경험공식인 Manning 식으로부터 계산될 수 있으므로, 다음 Eq. (3)~(6)과 같다. 그리고  $\Delta x_i$ 는 유한체적의 경계면  $x_{i-1/2}$ 와  $x_{i+1/2}$ 사이의 거리이며, 경계면에서 흐름율 벡터,  $F = (Q \quad Q^2/A + gI_1)^T$ 는 Riemann 근사해법을 사용하여 계산될 수 있다.

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \zeta] \sigma(x, \zeta) d\zeta \quad (3)$$

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h - \zeta) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]_{h=h_0} d\zeta \quad (4)$$

$$S_0 = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad (5)$$

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{R^{4/3} A} \quad (6)$$

여기서  $n$ 은 조도계수,  $z$ 는 하상고,  $R(R = A/P)$ 은 동수 반경이며,  $P$ 는 하도의 윤변을 의미한다. 한편 직사각형 단면을 가정할 경우, Eq. (3)의  $I_1$ 은 Eq. (7)과 같다.

$$I_1 = h_g A = \frac{1}{2} h_d^2 T \quad (7)$$

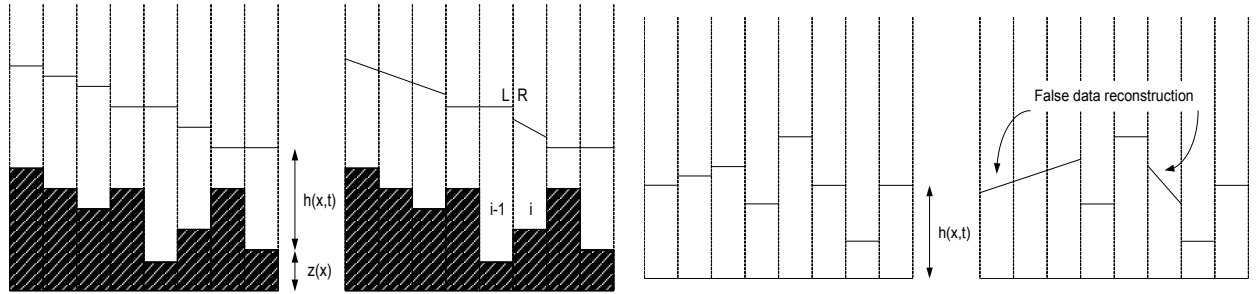
여기서  $h_g$ 는 수면에서 도심까지 거리이며,  $h_d$ 는 수리수심,  $T$ 는 수면폭을 의미한다.

하상과 하폭이 변화하는 개수로의 1차원 해석시 발생하는 수치적인 문제는 Eq. (2)의 운동량방정식에서 흐름율( $F$ )와  $S_0$ 를 포함한 생성항 그리고  $I_2$ 항을 포함한 생성항과의 균형문제이다. 하폭이 변화되는 단면격자를 사용하는 1차원 해석에서  $I_2$ 항의 처리는 계산에 결정적 영향을 미치게 된다(김원 등, 2005b). 본 연구에서는 Eq. (4) 적분 형태의 식을 계산에 그대로 반영함으로써  $I_2$ 항을 처리하는 방법을 제안하였다. 이러한 방법으로  $I_2$ 항을 처리할 경우, 흐름율( $F$ )와  $S_0$ 를 포함한 생성항의 균형문제가 다시 발생되며, 따라서 본 연구에서는 이를 해결할 수 있도록  $S_0$ 항을 포함한 생성항도 동일한 개념으로 접근하는 방법을 제안하였다. 생성항을 포함한 전반적인 수치모형 개발과정은 다음과 같다.

## 3. 일차원 유한체적 수치모형의 개발

### 3.1 수면경사법(Surface Gradient Method)

Godunov 방법을 이용한 다양한 수치해법은 수심경사법(DGM)을 사용하여 발전되어 왔다. 수심경사법은 격자내부에서 일정한 값을 가짐으로 가정한 공간적 오차를 줄여주기 위하여 인접 변수 값으로 격자 경계면에서의 자료를 재구성하는 방법이다. 그러나 이러한 자료 재구성 방법은 하상경사와 하폭의 변화에 의해 생성된 외력이 없는 경우에 대하여 개발되었다. 일반적으로 하상경사가 있는 경우 수심경사법에 의해서는 경계면에서의 수심을 정확히 재구성할 수 없다. 이는 Fig. 2(b)와 같이 격자 중심의 수심에 의한 경사가 실제 수면의 경사를 반영하지 못하기 때문이다. 그러므로 경계면에서의 흐름율이 부정확하게 계산되며, 부정확한 흐름율은 결국 잘못된 해를 계산하게 된다. 더구나 이 오차는 하상경사를 수치적으로 처리하기 위하여 중앙차분기법이 사용되었을 때, 부정확한 계산을 발생하게 된다. Zhou



(a) Surface gradient method

(b) Depth gradient method

Fig. 2. Comparison of Data Reconstruction using Gradient Method

et al.(2001)은 하상경사가 있는 경우에 이러한 문제점을 해결하기 위하여 수면경사법을 제안하였다. 수면경사법은 자료의 재구성성을 위하여 수위 값을 사용하는 것을 제외하면 수심경사법과 절차가 동일하므로 매우 간단하여 효율적이면서, 수치적으로 정확하고, 견고한 기법이다. Bae and Cho(2005)는 수면경사법을 적용한 후 HLLC 기법과 WAF 기법을 적용하였으며, 김대홍과 조용식(2005)은 수면경사법이 단차 등의 불연속지형에서 적용될 수 없는 한계를 극복하기 위하여 개선수면경사법을 제시하여 적용한 후 흐름을 계산에 HLLC 기법과 MUSCL 기법을 적용하였다.

선형적으로 재구성된 경계면 좌우의 흐름변수(수심, 유량) 조건으로부터 Riemann 해법을 사용하여 경계면에서의 흐름을 계산한다. Zhou et al.(2001)은 격자 경계면에서 정의된 하상고를 이용하여 격자 내부의 하상고를 선형보간함으로서 수면경사를 이용한 재구성성을 통하여 계산된 수심이 기존 수심경사법과 마찬가지로 격자의 평균값을 나타낸다는 것을 보이고, 이러한 수치 처리가 격자 내의 수심 값을 잘 보존하고 있음을 확인하였다. 수면경사법의 기본이론 및 유도과정은 김대홍과 조용식(2005), Zhou et al.(2001)을 참조할 수 있다.

### 3.2 흐름율의 계산

Zoppou and Roberts(2003)는 다양한 Riemann 근사해법을 계산의 정확도와 효율성에 대하여 비교하였다. 그 결과, Harten(1983)에 의해서 개발된 HLL Riemann 근사해법이 다양한 흐름조건에서 탁월한 계산결과를 제공하며, 다른 1차 정확도 기법에서 나타나는 entropy 위배조건을 피할 수 있음을 강조하였다. 따라서 본 연구에서는 HLL Riemann 근사해법을 사용하는 MUSCL-Hancock 기법을 적용하였다. MUSCL-Hancock 기법은 2차 공간 정확도를 위하여 수치적인 계산 이전에 자료를 재구성하고, 시간정확도를 위하여  $0.5 \Delta t$  시점에서 흐름율(F)을 예측하는 기법이다. 2차 정

확도 이상의 고정확도 수치해법에서는 불연속면에서 수치진동이 발생하게 되는데 이를 방지하기 위하여 본 논문에서는 Eq. (8)과 같은 minmod 제한자를 이용하였다.

$$\Delta_i = \max \left[ 0, \min \left( \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i}, \frac{U_i - U_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \right] \quad (8)$$

여기서 벡터,  $U = (A \quad Q)^T$ 는 Eqs. (1) and (2)의 흐름변수로 구성된다. Eq. (8)에서 흐름단면적  $A$ 의 차는 지형조건에 따라 매우 불연속적일 수 있으므로 3.1절의 수면경사법을 적용하여, 수위의 차로부터 경계면에서의 흐름단면적  $A$ 의 차이를 근사한다. 이는 연속적인 수위와 단면적이 수위의 함수로 계산됨을 고려해 볼 때 물리적인 접근방법으로 판단된다.

Eq. (8)을 이용하여 흐름변수는 Eq. (9)로 재구성된다.

$$\begin{aligned} U_{i-1/2}^R &= U_i^n - \Delta_i(x_i - x_{i-1}) \\ U_{i+1/2}^L &= U_i^n + \Delta_i(x_{i+1} - x_i) \end{aligned} \quad (9)$$

재구성된 자료는 Eq. (10)와 같이  $0.5 \Delta t$  시점의 값을 예측하는 과정이 필요하다.

$$\begin{aligned} U_{i-1/2}^{R*} &= U_{i-1/2}^R + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{i-1/2}^R) - F(U_{i+1/2}^L) + gS(U_i)] \\ U_{i+1/2}^{L*} &= U_{i+1/2}^L + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{i-1/2}^R) - F(U_{i+1/2}^L) + gS(U_i)] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $S(U_i)$ 는 Eqs. (1) and (2)에서 생성항의 공간적분 값 벡터이다.

자료의 재구성과  $0.5 \Delta t$  시점의 예측을 마치면, 경계면  $i-1/2$ 에서는  $U_{i-1/2}^{L*}$ 과  $U_{i-1/2}^{R*}$ 의 새로운 Riemann 문제가 성립됨으로 HLL Riemann 근사해법을 적용할 수 있다. HLL Riemann 근사해법은 초기 조건으로  $U_L \equiv U_{i-1/2}^{L*}$ ,  $U_R \equiv U_{i-1/2}^{R*}$ 을 가지는 Riemann 해의 구조에서 파의 특성속도 중 가장 작은 값인  $S_L$ 과 가장 큰

값인  $S_R$ 에 따라 두 특성선 사이의 상태를 근사적으로 가정하는 방법으로, 상류 및 사류의 흐름 영역에서 모두 적용이 가능하다(Fracarollo and Toro, 1995).

HLL Riemann 근사해법을 적용할 경우, 특성속도의 크기에 따라 유한체적 격자의 경계면에서 흐름율을 Eq. (11)과 같이 산정할 수 있다.

$$F_{i+1/2}^{HLL} = \begin{cases} F_L & \text{if } S_L > 0 \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{if } S_R < 0 \end{cases} \quad (11)$$

HLL Riemann 해법을 사용하기 위해서는 파의 특성속도인  $S_L$ 과  $S_R$ 을 먼저 알고 있어야 한다. 그러나 실질적으로 정확한 파의 특성속도를 구하는 것은 불가능하다. 그러므로 최소 그리고 최대 파속을 과소산정하지 않는 되도록 정확한 알고리즘이 필요하다. 본 연구에서는 Toro(1992)에서 사용된 바와 같이 두 개의 팽창파를 가정하고 중간상태의 값( $h_d^*$ ,  $Q^*/A^*$ )을 Eq. (12)와 같이 근사함으로써 파의 특성속도를 Eq. (13)으로 결정하였다.

$$h_d^* = \frac{1}{16g} \left[ \frac{Q_L}{A_L} - \frac{Q_R}{A_R} + 2(\sqrt{gh_{d_L}} + \sqrt{gh_{d_R}}) \right]^2 \quad (12)$$

$$\frac{Q^*}{A^*} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_L}{A_L} + \frac{Q_R}{A_R} + 2(\sqrt{gh_{d_L}} - \sqrt{gh_{d_R}}) \right]$$

$$S_L = \min \left( \frac{Q_L}{A_L} - \sqrt{gh_{d_L}}, \frac{Q^*}{A^*} - \sqrt{gh_d^*} \right) \quad (13)$$

$$S_R = \max \left( \frac{Q_R}{A_R} + \sqrt{gh_{d_R}}, \frac{Q^*}{A^*} + \sqrt{gh_d^*} \right)$$

### 3.3 생성항의 수치 처리

자연상태의 하천에서는 하상경사에 의한 중력항, 하폭 변화로 인한 압력항의 변화, 마찰저항력 등 생성항이 흐름에 미치는 영향을 무시할 수 없다. 그러나 정확하면서 물리적인 흐름율을 계산하기 위해서 적용되는 특성선법 및 Riemann 해법에서 생성항의 영향을 고려한 정확해는 존재하지 않는다. 따라서 적절한 생성항의 수치 처리가 필요하며, 생성항을 고려하지 않은 흐름율과 생성항의 수치 처리는 균형을 이루어야하므로 이러한 보존법칙을 흔히 균형법칙(balance law)이라고 부른다.

생성항을 처리하는 수치기법 중 가장 단순한 방법은 지점차분 기법을 사용하는 것이다. 일반적으로 지점차

분 기법은 수많은 상황에서 만족스러운 결과를 보여주었으나, 생성항의 영향이 매우 지배적인 지점에서 이 방법은 부적절하다(김원 등, 2005a). 이를 보완하기 위하여 Garcia-Navarro and Vazquez-Cendon(2000)은 Roe Riemann 근사해법을 이용한 흐름율 계산과 상류이송 차분의 생성항 처리기법을 제안하였고, LeVeque(1998)는 하상경사항이 시간에 경과에 따라 변화되지 않는 정상상태임을 고려하여 흐름율 계산 이전에 하상경사의 영향을 반영하여 자료를 재구성하는 기법을 제안하였다. 이와 같이 생성항의 적절한 수치처리를 위해서는 흐름율 계산에 사용된 기법에 따라 각기 다른 생성항 처리기법이 필요하며, 본 연구에서 개발된 생성항의 수치 처리는 다음과 같다.

#### 3.3.1 하상경사로 인한 중력항의 수치처리

Fig. 3에서와 같이 두 단면 사이가 선형인 것으로 가정하고 Eq. (10)으로 예측된 좌우 경계면의 흐름단면적 값을 사용하면, 하상경사에 의한 생성항은 유한체적의 하상경사와 흐름단면적의 시간/공간 적분의 곱으로 계산된다. 흐름단면적의 시간/공간 적분을 위하여 시간에 있어서 중간점 공식이 사용되면 Eq. (14)와 같다.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A(S_0) dx \quad (14)$$

$$= \frac{z_{i-1/2} - z_i}{6} \{2T_1H_1 + T_1H_2 + T_2H_1 + 2T_2H_2\}$$

$$+ \frac{z_i - z_{i+1/2}}{6} \{2T_2H_2 + T_2H_3 + T_3H_2 + 2T_3H_3\}$$

#### 3.3.2 하폭 변화로 인한 측면 정수압력항의 수치처리

두 직사각형 단면의 수면폭의 변화는 측면 정수압의 차이를 유발한다. 자연하천단면에서 측량단면간의 거리는 대략 100m에서 500m 정도이며, 불규칙한 단면형상은 수면폭의 변화가 불가피하다. 하상경사항을 고려할 때와 마찬가지로 두 단면 사이가 선형인 것으로 가정하면, 수면폭 변화에 의한 정수압력의 증감을 계산할 수 있다.

수면폭이 줄어드는 경우, 흐름방향과 반대방향의 정수압력이 발생하게 되며, 흐름방향에 직각방향으로 발생하는 정수압력은 좌안과 우안에서 상쇄됨을 알 수 있다. 수면폭의 변화로 생성된 정수압력은 Eq. (15)와 같다.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} L_2 dx = \frac{1}{6} (H_2^2 + H_2H_1 + H_1^2) (T_2 - T_1) \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{6} (H_3^2 + H_3H_2 + H_2^2) (T_3 - T_2)$$

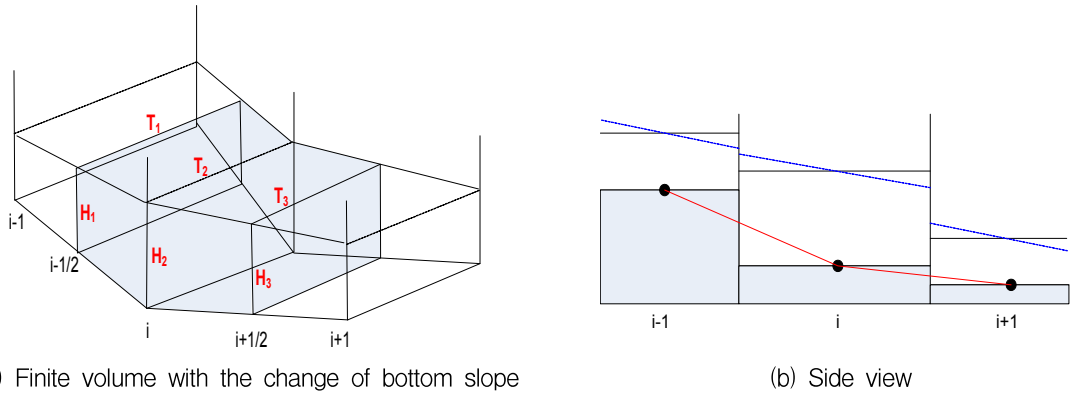


Fig. 3. Numerical Treatment of Gravity Term

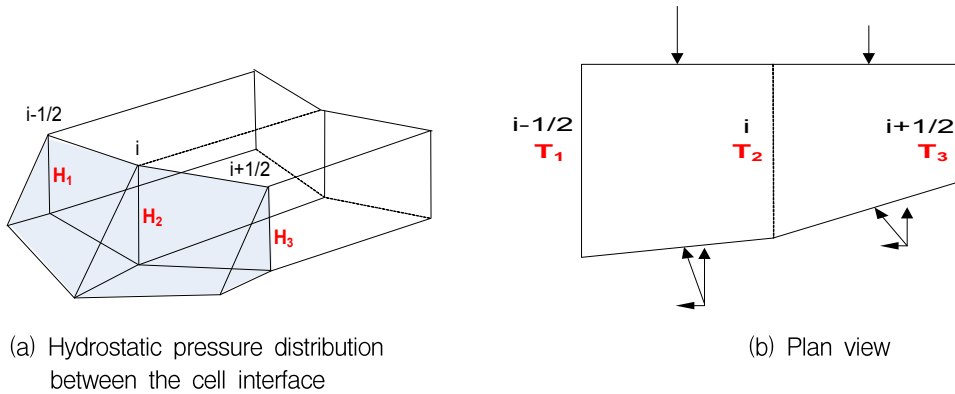


Fig. 4. Numerical Treatment of Hydrostatic Pressure Force due to Longitudinal Width Variation

### 3.3.3 마찰력항의 수치 처리

유한체적 내의 마찰력에 의한 생성항을 정확히 해석하는 것은 매우 어렵다. 그러나 생성항과 흐름율의 정확한 균형을 위해서는 마찰력항에 대한 고려가 반드시 필요하다. 개수로에서의 마찰경사를 계산하기 위하여 Manning 식을 사용하고, 흐름단면적의 공간 적분을 고려하면 마찰력항은 Eq. (16)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
 & g \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} AS_f dx \\
 &= \frac{gS_{f_i}}{6} [(2T_1H_1 + T_1H_2 + T_2H_1 + 2T_2H_2)(x_i - x_{i-1/2}) \\
 &+ (2T_2H_2 + T_2H_3 + T_3H_2 + 2T_3H_3)(x_{i+1/2} - x_i)]
 \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.3.4 경계조건과 계산시간의 결정

부정류 흐름 해석에 있어서 정확한 수치모형의 개발 성공여부는 지배방정식이 지닌 특성을 표현할 수 있는 수치 기법뿐만 아니라 경계조건을 수치적으로 적절히 부여함에 달려있다. Saint-Venant 방정식은 쌍곡선형의 편미분방정식으로 구성된 연립방정식이다. 따라서 두 흐름변수의 초기조건과 두개의 경계조건이 필요하다.

본 연구에서는 적절한 경계조건을 부여하기 위하여 Sanders(2001)의 연구결과를 참고하였으며, Table 1과 같다.

Table 1에서 알 수 있듯이 본 연구에 사용된 경계조건은 수위 및 유속의 값을 선형보간으로 외삽하였고, 수면경사는 인접 격자의 경사를 참조하였다. 따라서 경계에서 수위 및 유속의 선형성을 충분히 가정할 수 있는 경우에 한정하여 사용될 수 있다.

양해적 수치해법에서 시간간격은 해석의 안정성 측면에서 매우 중요하다. 특성속도가 매우 빠른 구간에서 다소 큰 계산시간이 사용된다면, 특성선은 유한체적의 영역을 벗어나게 된다. HLL Riemann 해법이 안정한 해를 제공하기 위해서는 특성선이 HLL Riemann 흐름을 계산에 사용된 영역 내에 존재하여야 한다. 이러한 조건은 양해법의 일반적인 수치 안정성 조건인 CFL (Courant-Freidrichs-Lewy) 조건으로 만족될 수 있다.

$$c_{cfl} = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\text{wave speed}}{\text{grid speed}} \leq 1 \quad (17)$$

본 연구에서는 특성선의 속도( $\lambda$ )를 Eq. (13)으로 산정하였으며, 산정된 특성속도와 격자의 거리 간격  $\Delta x$ 를 이용하여, 모든 계산단계의 계산시간을 자동적으로

Table 1. Boundary Condition

Flow Regime	Upstream	Downstream
Supercritical Flow	Specified Boundary	Open Boundary
	$y(1) : \text{specified}$ $Q(1) : \text{specified}$ $\Delta y(1) = 0$ $\Delta v(1) = 0$	$y(n) = 2y(n-1)-y(n-2)$ $v(n) = 2v(n-1)-v(n-2)$ $\Delta y(n) = \Delta y(n-1)$ $\Delta v(n) = \Delta v(n-1)$
Subcritical Flow	Specified Boundary(Q)	Specified Boundary(y)
	$y(1) = 2y(2)-y(3)$ $Q(1) : \text{specified}$ $\Delta y(1) = \Delta y(2)$ $\Delta v(1) = 0$	$y(n) : \text{specified}$ $v(n) = 2v(n-1)-v(n-2)$ $\Delta y(n) = 0$ $\Delta v(n) = \Delta v(n-1)$

계산하였다. 이 때 계산의 안정성을 확보하기 위하여 0.9의 Courant 수를 사용하였다.

### 3.4 흐름율과 생성항의 균형(balance law)

Vazquez-Cendon(1999)은 보존특성의 개념을 도입하였다. 보존특성은 초기의 정지상태에서 유입되는 유량이 없을 때, 흐름율과 생성항은 완벽히 균형을 이루어 계산이 진행되더라도 초기의 수위와 정지유량을 유지하여야 한다는 것이다. 그들은 흐름율 계산에 Roe 근사해법을 사용하였을 때, 이 조건을 만족시킬 수 있도록 생성항을 처리하는 방법을 제안하였다.

본 연구에서 제안한 생성항은 Eq. (14)~(16)과 같으며, 제안된 기법이 Eq. (18)과 같은 초기조건에서 보존특성을 만족하는 지는 반드시 검토되어야 한다.

$$Q \equiv 0 \quad \text{and} \quad y \equiv \text{const.} \quad (18)$$

정지상태인 일정한 수위로부터 특성속도는 Eq. (19)와 같고, 수면경사가 0이다. 수면경사법의 적용으로부터 경계면 좌우의 흐름단면적은 같으며, 특성속도의 절대값도 같아진다.

$$S_L = -\sqrt{gh_{d_L}}, \quad S_R = \sqrt{gh_{d_R}}, \quad |S_L| = |S_R| \quad (19)$$

Eq. (1)에서 흐름단면적의 변화는 경계면에서의 유입, 유출되는 유량의 시간적분 값에 의해서 계산된다. 수면경사법이 적용될 경우, 수면경사가 0이므로 재구성된 경계면에서의 수위와 격자내부의 수위는 동일하다. 재구성된 경계면에서의 유량이 0으로 같기 때문에 예측 단계를 거친 후에도 수위는 동일하게 유지된다. 앞서 설명된 바와 같이 수면경사법에서 보존변수인 흐름단면적은 수위의 함수로 고려됨을 주의하여야 한다.  $0.5\Delta t$  시점에서 예측된 경계면에서의 값으로부터 HLL 근사

해법을 적용할 경우, Eq. (18)의 조건은 각 경계면의 유량이 0이므로 흐름단면적은 변화되지 않고 보존특성을 만족한다.

Eq. (2)에서 유량의 변화는 경계면 흐름율의 시간 적분 차와 유한체적 내 생성항의 시간/공간 적분에 의해 계산된다. 연속방정식과 마찬가지로 수면경사법이 적용될 경우, 재구성된 경계면에서의 변수는 재구성전의 값과 동일하다. 따라서  $0.5\Delta t$  시점의 값을 예측하는 과정에서 흐름율의 차는 Eq. (20)과 같다.

$$\Delta F = \frac{1}{2} g \{ (h_{d_{i-1/2}})^2 T_{i-1/2} - (h_{d_{i+1/2}})^2 T_{i+1/2} \} \quad (20)$$

한편 Eqs. (14) and (15)로부터 수면폭 변화로 유발되는 생성항과 하상경사에 의한 생성항이 Eqs. (21) and (22)로 계산된다.

$$g \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} I_2 dx = \frac{g}{6} (h_{d_i}^2 + h_{d_i} h_{d_{i-1/2}} + h_{d_{i-1/2}}^2) (T_i - T_{i-1/2}) + \frac{g}{6} (h_{d_{i+1/2}}^2 + h_{d_{i+1/2}} h_{d_i} + h_{d_i}^2) (T_{i+1/2} - T_i) \quad (21)$$

$$g \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A S_0 dx = \frac{z_{i-1/2} - z_i}{6} g \{ 2T_{i-1/2} h_{d_{i-1/2}} + T_{i-1/2} h_{d_i} + T_i h_{d_{i-1/2}} + 2T_i h_{d_i} \} + \frac{z_i - z_{i+1/2}}{6} g \{ 2T_i h_{d_i} + T_i h_{d_{i+1/2}} + T_{i+1/2} h_{d_i} + 2T_{i+1/2} h_{d_{i+1/2}} \} \quad (22)$$

수위가 일정한 초기조건으로부터 경계면과 내부절점 사이의 하상고 차이는 Eqs. (23) and (24)와 같다.

$$z_{i-1/2} - z_i = h_{d_i} - h_{d_{i-1/2}} \quad (23)$$

$$z_i - z_{i+1/2} = h_{d_{i+1/2}} - h_{d_i} \quad (24)$$

따라서 두 경계면에서의 흐름을 차이는 두 생성항의 합과 정확히 일치하므로 유량이 변화되지 않고 예측단계에서 보존특성을 만족한다. 예측된 값을 사용하여 HLL 근사해법을 적용함으로써 우측 경계면의 흐름을 계산하면 Eq. (25)와 같다.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_{x_{i+1/2}}^{t+\Delta t/2} \\ &= \frac{\sqrt{gh_{d_{i+1/2}}}g(h_{d_{i+1/2}})^2 + \sqrt{gh_{d_{i+1/2}}}g(h_{d_{i+1/2}})^2}{4\sqrt{gh_{d_{i+1/2}}}} T_{i+1/2} \\ &= g \frac{(h_{d_{i+1/2}})^2 T_{i+1/2}}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

같은 과정으로 좌측 경계면에서의 흐름은 Eq. (26)과 같다.

$$\left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_{x_{i-1/2}}^{t+\Delta t/2} = g \frac{(h_{d_{i-1/2}})^2 T_{i-1/2}}{2} \quad (26)$$

두 흐름의 차는 예측단계의 흐름 차 Eq. (20)과 동일하므로 본 기법은 완벽하게 보존특성을 만족한다.

#### 4. 모형의 검증

본 연구에서 개발한 수치모형의 계산 정확도를 검증하기 위하여 하상과 하폭이 변화하는 다양한 조건에 모형을 적용하였다. 모형의 지배방정식인 Saint-Venant 방정식은 흐름을 계산과 생성항 계산으로 구분할 수 있다. 따라서 모형에 사용된 흐름을 계산과 생성항의 수치적 처리가 적절한 균형을 이루고 있는지가 모형 개발의 성공여부가 될 것이며, 이를 위하여 정확해가 제시되고 있는 다양한 수치실험에 본 모형을 적용하고자 한다.

##### 4.1 하상과 하폭이 변화하는 점변부정류 검증

Vazquez-Cendon(1999)은 작은 Froude 수에 대한 부정류 흐름의 해석해를 제시하였다. 실험을 위한 초기조건은 12m 수위의 정지된 상태이며, 경계조건은 Eq. (27)과 같이 4m의 진폭을 가지는 sin파의 조위이다.

$$h(0,t) = h(0,0) + \phi(t) \quad (27)$$

$$Q(L,t) = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\phi(t) = 4 + 4\sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

수심과 단위폭당 유량의 해석해는 Eq. (28)과 같다.

$$h(x,t) = h(x,0) + \phi(t) \quad q(x,t) = \frac{\phi'(t)}{B(x)} \int_x^L B(s) ds \quad (28)$$

수치해석을 위하여 600개의 격자와 Courant 수를 0.9로 지정하고, 하상조도 계수는 0.1로 하였다. Fig. 5에 표시된 것과 같이 하류방향으로 최대 유속이 발생하는 시각인 10,800초에서의 수위와 단위 폭당 유량을 해석해와 비교하여 Fig. 6에 나타내었다. 개발된 1차원 모형의 실제 하도 적용성을 검증하기 위해서는 공간격자가 균일하지 않은 경우에 대한 모형의 적용이 가능하여야 한다. 따라서 동일한 조건에서 하상 및 하폭이 변화하는 지점을 기준으로 Fig. 6에 함께 나타낸 것과 같이 최소 5m에서 50m의 비균일 공간격자를 구성하였다. 비균일 격자를 사용하여 계산된 수위와 단위 폭당 유량을 Fig. 6에 함께 나타내었다.

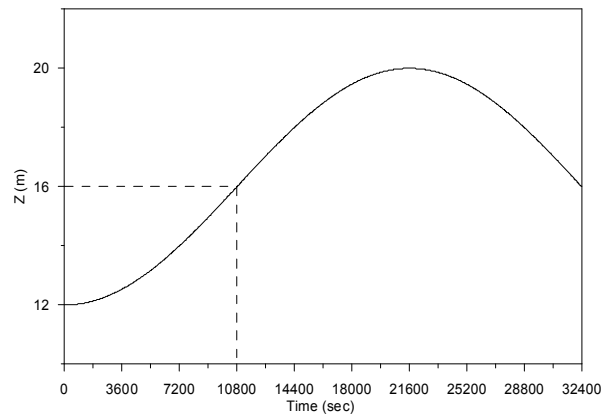


Fig. 5. Upstream Stage Hydrograph

Hubbard and Garcia-Navarro(2000)는 이 예제의 수치해석이 매우 어려운 문제라고 밝혔고, 그 이유는 매우 많은 계산시간에 기인한다. 양해적 기법에서는 아주 작은 수치 오차도 계산 시간이 진행될수록 그 크기가 증폭되고 왜곡될 수밖에 없기 때문이다. 본 연구 모형은 600개의 격자가 사용될 경우 수치해와 해석해가 잘 일치하고 있음을 보여주며, 하상 및 하폭의 변화지점을 기준으로 39개의 격자가 사용된 경우에도 단위 폭당 유량의 침두값에서 비교적 잘 일치하는 결과를 보임으로써 개발된 모형이 비균일 격자에서도 폭넓게 적용이 가능함을 입증할 수 있는 기법임을 확인할 수 있다.

##### 4.2 하상경사 변화에 따른 정상상태의 수렴 검증

정수중의 초기조건에서 경계조건에 변화로 흐름 상태는 변하게 된다. 그러나 경계조건이 일정하게 유지된



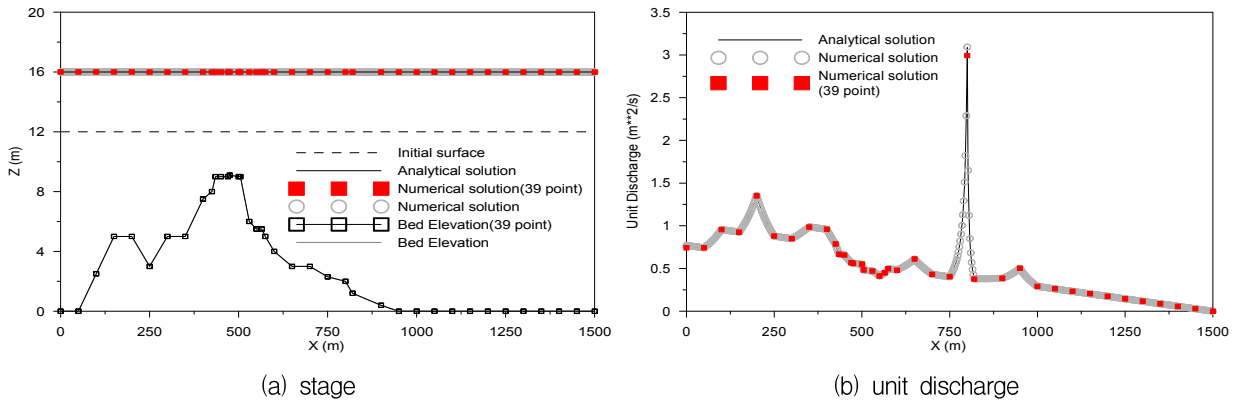


Fig. 6. Water Stage and Unit Discharge for Tidal Wave Propagation Flow ( $t = 10,800\text{ s}$ )

다면 흐름은 정상상태가 되며, 이러한 정상상태 수렴을 모의하는 것은 수치모형의 정확도를 검증하는 일반적인 방법이다. 이를 위하여 해석해가 존재하는 타원형의 하상용기가 있는 하도에 모형을 적용하였다. 이 지형의 형상은 Eq. (29)와 같으며, 하도길이는 25m이고, 마찰이 없는 1m 폭의 직사각형 단면이다.

$$Z(m) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 8 \\ 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{if } 8 < 0 < 12 \\ 0 & \text{if } x \geq 12 \end{cases} \quad (29)$$

Goutal and Maurel(1997)은 하도의 흐름상태가 도수가 없는 천이류 상태, 도수가 발생하는 천이류 상태, 그리고 상류 상태만으로 구성된 세 가지 실험조건을 제시하고, 모든 경우의 초기조건은 부여된 하류부 경계조건 수위와 동일하게 지정하고, 유량은 0으로 지정하였다. 그리고 실험 목적이 정상상태에서 수치기법을 검증하고, 모의결과의 수렴성을 확인함에 있음을 밝혔다. 본 실험의 해석해는 Bernoulli 방정식을 이용하여 계산될 수 있으며, 도수 발생 지점은 Rankine-Hugoniot 관계를 이용하여 찾을 수 있다.

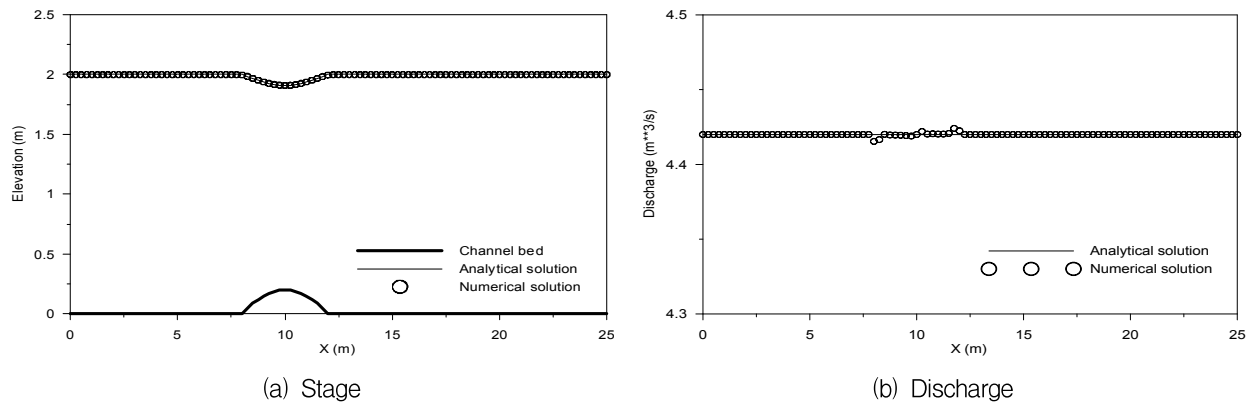


Fig. 7. Steady Subcritical Flow over a Bump

#### 4.2.1 상류 흐름이 발생하는 조건

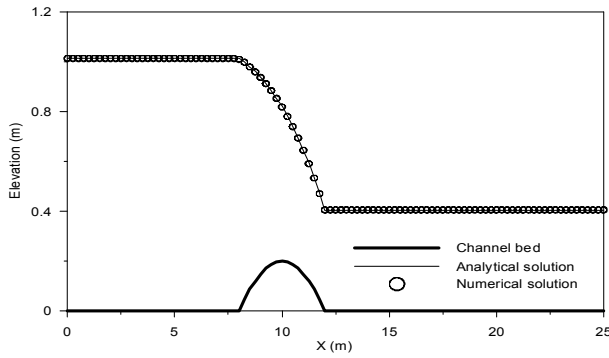
경계조건으로 2m의 수위경계를 하류단에 지정하고, 상류단에는  $4.42\text{ m}^3/\text{s}$ 의 일정한 유량을 지정함으로써 흐름영역은 상류로만 구성된다. 유한 체적의 개수가 100개인 경우, 360초 후에 수렴된 수위와 유량은 Fig. 7과 같다.

#### 4.2.2 도수없이 천이흐름이 발생하는 조건

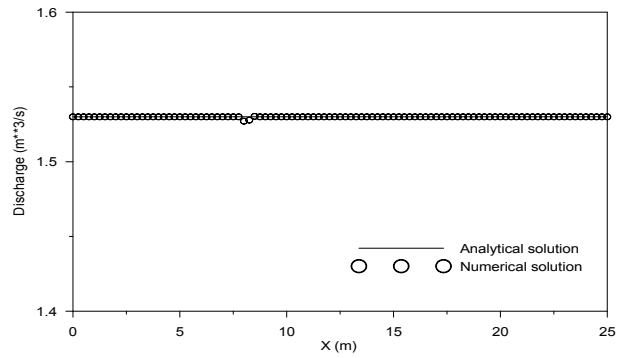
경계조건으로 0.406m의 수위경계를 하류단에 지정하고, 상류단에는  $1.53\text{ m}^3/\text{s}$ 의 유량을 지정한다. 이 경우, 용기된 하상을 넘어서면서 사류가 발생한다. 유한 체적의 개수가 100개인 경우, 360초 후에 수렴된 수위와 유량은 Fig. 8과 같다.

#### 4.2.3 도수가 발생하는 천이흐름 조건

경계조건으로 0.33m의 수위경계를 하류단에 지정하고, 상류단에는  $0.18\text{ m}^3/\text{s}$ 의 유량을 지정한다. 이 경우, 용기된 하상의 역경사부에서 도수가 발생한다. 유한 체적의 개수가 100개인 경우, 360초 후에 수렴된 수위와 유량은 Fig. 9와 같다. Fig. 9(a)에는 수면의 수렴과정을 함께 나타내었다.

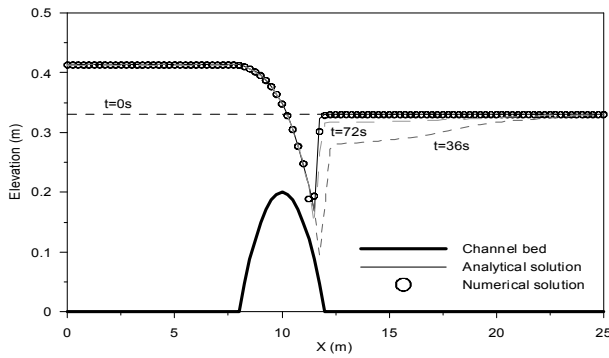


(a) Stage

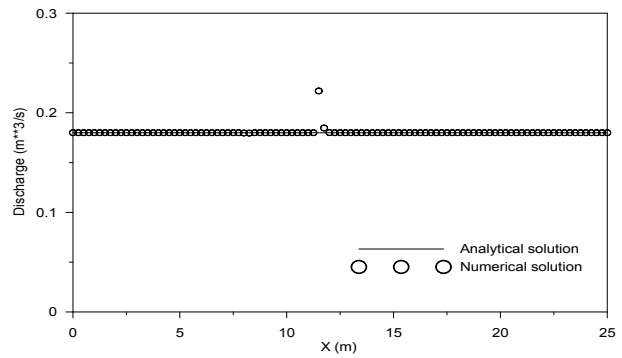


(b) Discharge

Fig. 8. Steady Transcritical Flow over a Bump without a Hydraulic Jump



(a) Stage



(b) Discharge

Fig. 9. Steady Transcritical Flow over a Bump with a Hydraulic Jump

수치 실험결과, 세 경우 모두 수위와 유량의 해석해와 잘 일치함으로써 개발된 생성항의 수치처리 기법이 비선형의 Riemann 해법에 의한 흐름율과 수치적 균형을 잘 이루고 있음을 알 수 있다. 다만 도수가 발생하는 천이조건에서 도수지점의 유량이 정상상태를 만족하지 못하고 있는데, 이는 현재까지의 수치기법의 한계이며 수치모델링 분야에서 도전해야할 과제이다(Cozzolino and Pianese, 2006).

### 4.3 하상경사 변화와 하상마찰에 따른 정상상태의 수렴 검증

MacDonald et al.(1995)은 해석적 수심함수가 주어진 일정유량의 조건에 적합한 하상경사의 해석해를 계산함으로써 몇 가지의 정상상태 조건을 제시하였다. 본 연구에서 제안된 마찰경사 생성항의 수치처리를 검증하기 위하여 Manning 조도계수가 0.03인 하폭 10m의 직사각형 단면 하도에서 하상경사가 변화하는 경우 (MacDonald-I test)에 개발된 모형을 적용하였다. 이 경우, 하도 연장은 1km이고 유량은  $20m^3/s$ 이다. MacDonald-I 수치실험의 해석적 하상경사는 Eq. (30)과 같다.

$$S_o(x) = \left(1 - \frac{4}{g\hat{y}(x)^3}\right)\hat{y}'(x) + 0.36 \frac{(2\hat{y}(x) + 10)^{4/3}}{(10\hat{y}(x))^{10/3}} \quad (30)$$

여기서,  $\hat{y}(x)$ ,  $\hat{y}'(x)$ 는 해석적 수심함수와 도함수이며 Eqs. (31) and (32)와 같다.

$$\hat{y}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(-16\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right) \quad (31)$$

$$\hat{y}'(x) = -\left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \frac{2}{125} \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-16\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right) \quad (32)$$

따라서 유출구의 수심은 0.748409m이다. Eqs. (30) and (31)를 이용한 수위의 해석해는 Fig. 10과 같다.

수치모의를 위하여 100개의 격자가 사용되었으며, 수심과 유량의 수치계산 결과를 해석해와 비교하여 Fig. 11에 나타내었다. 실험결과, 수치해와 해석해는 수심과 유량에서 잘 일치하고 있으며, 이는 마찰경사의 고려를 위한 수치적 처리 또한 보존특성을 잘 만족하고 있음을 보여준다.

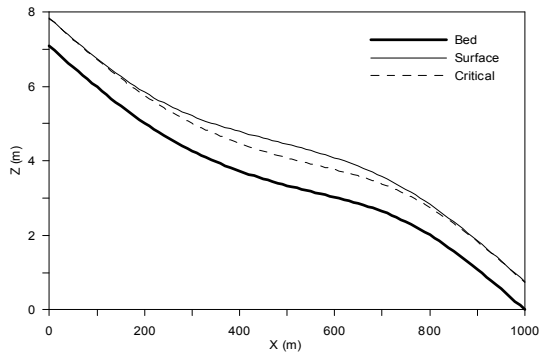
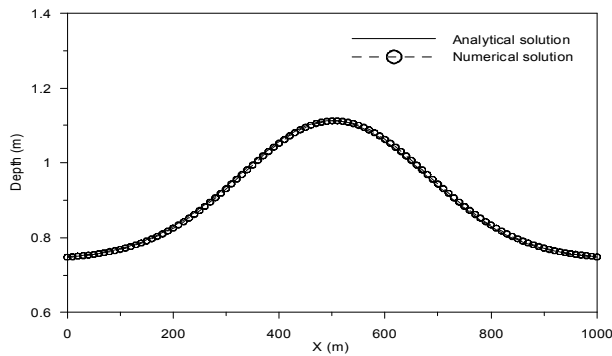
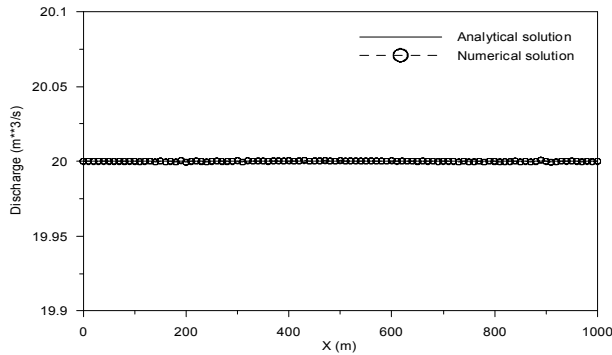


Fig. 10. Analytical Solution of the Stage and Bed Elevation (MacDonald-I)



(a) Stage



(b) Discharge

Fig. 11. Verification of Numerical Treatment for Friction Force (MacDonald-I)

## 5. 결 론

본 연구에서는 하상과 하폭이 변하는 개수로에서 상류-사류의 천이류 해석, 불연속류 해석을 위하여 Riemann 해법에 의한 흐름율과 보존법칙을 만족할 수 있는 생성항 수치처리 기법을 개발하였다. 개발된 기법의 검증 목적으로 사용되는 다양한 조건의 하도에 대하여 본 모형을 적용하여 모형의 안정성과 정확성을 검증하였다. 본 연구를 통하여 얻은 주요 결론은 다음과 같다.

1) 본 연구에서는 불연속 흐름의 해석에 정확한 해를

제공하는 Riemann 근사 해법을 이용하여 흐름율을 계산하고, 하상과 하폭이 변하는 불규칙한 개수로에서의 적용을 위하여 흐름율과 생성항의 보존특성을 만족시킬 수 있는 수치기법을 제안하여 정확하고, 견고하며, 매우 안정적인 1차원 유한체적 모형을 개발하였다.

2) 1차원 생성항 처리를 위해서 새로이 개발된 수치적 처리를 통하여 보존특성이 만족됨을 수학적으로 증명하였고, 다양한 흐름조건의 하도에 적용함으로써 비물리적인 수치진동의 발생없이 해석해에 거의 일치하는 합리적인 결과를 얻을 수 있었다.

3) 본 연구에서는 고정확도 수치해석 기법인 Riemann 해법을 이용한 유한체적기법이 생성항이 존재하는 1차원 수리해석에 적용될 수 있음을 확인하였고, 이로부터 향후 다양한 조건의 실제하천 수리해석에 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

## 감사의 글

이 연구는 소방방재청 자연재해저감기술개발사업(과제명:내배수 침수재해 저감기술개발) 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- 김대홍, 조용식 (2004). "HLLC Approximate Riemann Solver를 이용한 천수방정식 해석." **한국수자원학회 논문집**, 한국수자원학회, 제37권, 제10호, pp. 845-855.
- 김대홍, 조용식 (2005). "불규칙 지형에 적용가능한 쌍곡선형 천수방정식을 위한 개선표면경사법." **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제25권, 제3B호, pp. 223-229.
- 김원, 한건연, 우효섭, 최규현 (2005a). "상류이송기법에서의 새로운 생성항 처리 기법." **한국수자원학회 논문집**, 한국수자원학회, 제38권, 제2호, pp. 155-166.
- 김원, 한건연, 우효섭 (2005b). "일차원 상류이송형모형의 자연하도에 대한 적용." **한국수자원학회 논문집**, 한국수자원학회, 제38권, 제5호, pp. 333-343.
- 이길성, 이성태 (1998). "충격파 모의를 위한 2차원 유한체적 비정상 흐름모형." **한국수자원학회 논문집**, 한국수자원학회, 제31권, 제3호, pp. 279-290.
- Bae, Y.H. and Cho, Y.S. (2005). "Numerical Analysis of Discontinuous Flows with Finite Volume Method." *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 9, No. 5, pp. 439-445.
- Cozzolino, L. and Pianese, D. (2006). "High-order

- finite volume modelling of one-dimensional Flows." *River Flow 2006*, pp. 493-502
- Delis, A.I. (2003). "Improved application of the HLLC Riemann solver for the shallow water equations with source terms." *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 59-83.
- Fraccarollo, L. and Toro, E.F. (1995). "Experimental and Numerical Assessment of the Shallow Water Model for Two-dimensional Dam-Break Type Problems." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 6, pp. 843-864.
- Garcia-Navarro, P. and Vazquez-Cendon, M.E. (2000). "On Numerical Treatment of the Source Terms in the Shallow Water Equations." *Computers & Fluids*, Vol. 29, pp. 951-979.
- Goutal, N. and Maurel, F. (1997). *Proceedings of the 2nd workshop on dam break wave simulation*, HE43/97/016/B.
- Goutal, N. and Maurel, F. (2002). "A finite Volume Solver for 1D Shallow-Water Equations Applied To an Actual River." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 38, pp. 1-19.
- Harten, A. (1983). "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No.3, pp. 357-393.
- Hu, K., Mingham, C.G. and Causon, D.M. (1998). "A Bore-Capturing Finite Volume Method for Open-Channel Flows." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 28, pp. 1241-1261.
- Jin, M. and Fread, D.L. (1997). "Dynamic Flood Routing with Explicit and Implicit Numerical Solution Schemes." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 3, pp. 166-173.
- Kim, D.H., Cho, Y.S. and Kim, W.G. (2004). "Weighted Averaged Flux-Type Scheme for Sallow-Water Equations with Fractional Step Method." *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 130, No. 2, pp. 152-160.
- LeVeque R.J. (1998). "Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods : The Quasi-Steady Wave-Propogation Algorithm." *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, Issue 1, pp. 346-365.
- MacDonald, I. Baines, M.J. Nichols, N.K. and Samuels, P.G. (1995). *Steady Open Channel Test Problems with Analytical Solutions*, Numerical Analysis Report 3/95, University of Reading.
- Sanders, B.F. (2001). "High-Resolution and Non-Oscillatory Solution of St. Venant Equations in Non-Rectangular and Non-Prismatic Channels." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 39, No. 3, pp. 321-330.
- Toro, E.F. (1992). *Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equation*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.
- Vazquez-Cendon, M.E. (1999). "Improved Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water Equations in Channels with Irregular Geometry." *Journal of Computational Physics*, pp. 497-526.
- Vukovic, S. and Sopta, L. (2003). "Upwind Schemes with Exact Conservation Property for One-Dimensional Open Channel Flow Equations." *SIAM J. SCI. Comput.*, Vol. 24, No. 5, pp. 1630-1649.
- Yoon, T.H. and Kang, S.K. (2004). "Finite Volume Model for Two-Dimensional Shallow Water Flows on Unstructured Grids." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 7, pp. 678-688.
- Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G. and Ingram, D.M. (2001). "The Surface Gradient Method for the Treatment of Source Terms in the Shallow-Water Equations." *Journal of Computational Physics*, pp. 1-25.
- Zhou, J.G., Causon, D.M., Ingram, D.M. and Mingham, C.G. (2002). "Numerical solutions of the shallow water equations with discontinuous bed topography." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 38, pp. 769-788.
- Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G. and Ingram, D.M. (2004). "Numerical Prediction of Dam-Break Flows in General Geometries with Complex Bed Topography." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 4, pp. 332-340.
- Zoppou, C. and Roberts, S. (2003). "Explicit Schemes for Dam-Break Simulations." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 1, pp. 11-30.

(논문번호:08-17/접수:2008.02.11/심사완료:2008.05.30)