

Hertz 접촉 문제의 유한 요소 해석

Finite Element Analysis of Hertzian Contact Problem

고 동 선* 김 형 종**
Ko, Dong-sun Kim, Hyung-Jong

Abstract

Generally, Hertz theory is used to analyze the contact problem of two bodies. It is simple derivation of solution in the contact part. And calculation time is short. Moreover, it can mean well that many wear occurs relatively. However, material property becomes plastic deformation when large perpendicular pressure acts on a small contact surface product. In this case, Hertz theory is inapplicable. Therefore this thesis carried the finite element analysis in consideration of material elasticity-strain and the shape of the geometric from contact point. And it compared with Hertz theory that change of the contact surface and contact pressure.

키워드 : 접촉압력, 유한요소해석, Hertz 접촉

Keywords : Contact pressure, FEA(Finite Element Analysis), Hertz contact

1. 서론

두 개의 탄성체 사이의 접촉에서 발생하는 응력과 변형에 대한 문제는 강도 시험, 공학적으로 사용되는 세라믹에 가해지는 충격과 마모, 불과 물러 배어링, 기어의 이빨 등의 실제 현상에서 자주 발생하며 많은 부분에 적용이 가능하다[1]. 이 경우, 접촉부에서는 접촉 여부에 따라 국부적으로 응력 집중이 발생하게 된다. 이러한 두 탄성체 사이의 해석이 쉽고 비교적 간단한 접촉 현상을 일반적으로 Hertz 접촉이라고 한다. Hertz 접촉이론은 마찰

공학, 접촉응력해석, 마모연구 등 접촉과 관계되는 학문에서 가장 기본적인 개념으로 응용되고 사용하는 이론이다. Hertz는 두 탄성체의 접촉에 의해 발생하는 응력을 이론적으로 계산한 최초의 과학자이다. 그는 두 개의 접촉하는 유리 렌즈에서 발생하는 광 간섭 줄무늬를 발견하고, 이러한 현상이 유리의 탄성 변형에 기인한다고 생각하여 Hertz 접촉 이론을 창안, 1882년 발표하였다[2].

그의 이론에서 가장 잘 알려진 가설로는 강체구와 평평한 평면 사이 혹은 강체구와 구의 접촉인데, 접촉반지름과 가압 하중, 접촉할 때 발생하는 압력, 그리고 재료의 탄성 물성치 등의 관계를 정리한 것이다. 이러한 두 탄성체 사이의 접촉부분에서의 접촉응력은 상하 재료의 돌기부분이 서로 접촉할 때 재료의 표면 및 내부에 발생한다. 접촉하는 물체의 다양한 형상과 접촉형태에 따라서 접촉면이 작은 원부터 얇은 선에 이르기까지 다양한 모양의 영역으로 나타날 수 있다[3]. 접촉응력을

* 강원대학교 대학원 기계·메카트로닉스공학과 석사과정

** 강원대학교 기계·메카트로닉스공학부 교수, 공학박사

예측하기 위하여 사용되는 간단한 방법은 구나 원통의 재료를 다른 평면이나 구형 재료에 접촉시킨 후 수직 하중을 가하는 모델을 작성하는 것이다.

이에 본 연구에서는 Hertz 접촉이론을 통하여 하중에 따른 여러 가지 모델의 접촉압력 및 접촉 반지름 등을 이론적 방법으로 구한 후, 이를 FEM 프로그램인 ABAQUS를 이용한 유한 요소 해석값들과 비교하였다.

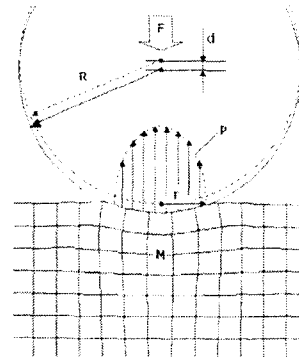


Fig. 1 Schematic drawing of a contact between two bodies, illustrating the relevant parameters

2. 이론고찰

2.1 Hertz 접촉이론의 개요

재료 내에 발생하는 모든 변형이 탄성변형이라고 가정하면 Hertz 접촉이론 적용이 가능하다. Fig. 1과 같이 가압되고 있는 두 물체 중 최대응력이 발생하는 지점은 일반적으로 M이라는 곳에서 발생한다. R은 구 반지름을 나타내며, d는 최대응력 발생 깊이로 표현되었다.

Hertz 접촉이론은 상당히 제한적인 경우에만 적용 가능한 식으로써 아래에서 제시한 설명은 두 탄성체 사이의 이론적인 점 또는 선의 접촉 상태를 수학적 간단한 형태로 공식으로 정리하기 위한 기본적인 가정들이다[4].

(1) 접촉면이 매끄러워야 하며 2차의 곡선으로 표면을 나타내야 한다. 또한 표면은 연속적인 곡선으로 가정되어야 한다.

(2) 선형적인 탄성 특성을 가지는 재료라 가정한다.

(3) 접촉 표면 사이의 마찰은 무시한다. 즉, 두 물체 사이에서는 수직압력만이 전달될 수 있음은 의미한다.

(4) 접촉하는 물체의 곡률 반경은 접촉면의 반경에 비하여 매우 크다.

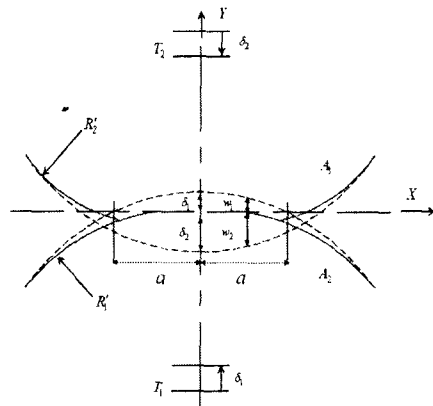


Fig. 2 Detailed view of contact surface between two elastic bodies

2.2 공식유도

Hertz 접촉이론에 대하여 보다 자세히 살펴보기 위해 두 탄성체의 접촉부분의 기하학적 관계로부터 각 관련 인자들의 상호 연관성을 고찰하고자 한다. Fig. 2에서의 R_1, R_2 의 반경을 가지고 있는 두 물체가 접촉 상태에 있다고 한다면 변형이 발생하기 전 두 물체가 한 점 O에서 접촉하고 있다고 하자. 이때 A_1, A_2 사이의 거리는 아래와 같다.

$$h = |A_1 - A_2| = \frac{1}{2R_2} x^2 + \frac{1}{2R_1} y^2 \quad (1)$$

수직 하중이 가해져서 두 물체가 압축 상태에 있다면 A_1, A_2 사이의 거리 h' 은 아래와 같다.

$$h' = h - (\delta_1 + \delta_2) + (w_1 + w_2) \quad (2)$$

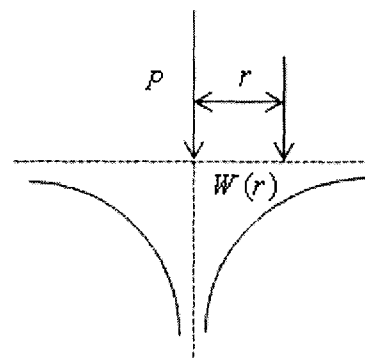


Fig. 3 Displacement due to concentrated load under elastic half space

만약 h' 이 접촉 영역 내부에 존재하게 된다면 $h' = 0$ 이므로 식(1)을 이용하여 정리 할 수 있다.

$$w_1 + w_2 = \delta - \frac{1}{2R_2} x^2 - \frac{1}{2R_1} y^2 \quad (3)$$

위에서 살펴본 식을 보다 다양한 모델의 조합으로 확대하면 Fig. 3과 같이 중심에 P라는 하중이 가해졌을 경우, 일정 거리 r만큼 떨어진 곳에서의 탄성 변형량을 얻을 수 있다[5].

$$w(r) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{P}{r} \quad (4)$$

2.3 각 모델에 따른 접촉

Hertz 접촉이론은 두 탄성체 사이가 접촉할 때 발생하는 국부 응력을 파악하는데 폭넓게 쓰인다. 따라서 접촉하는 형상이 구와 구, 구와 평면, 구와 원통, 원통과 원통, 원뿔과 구, 타원과 타원의 접촉 등 다양한 모델의 접촉응력을 구할 수 있다. 본 연구에서는 구와 구, 구와 평면, 구와 구형 컵, 이렇게 3가지 모델에 대해 알아보기로 한다.

2.3.1 구와 구의 접촉

앞서 고찰한 결과 식을 다양한 원형 접촉면에 대하여 적용해 보려면 다음의 등가 강성과 재료 적합성의 개념을 도입하여 계산하여야 한다[6].

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

$$k = \frac{9}{16} \left[(1-\nu_1^2) + \frac{E_1}{E_2} (1-\nu_2^2) \right] \quad (5)$$

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad r = x^2 + y^2$$

$$w(r) = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi p_0}{4a} (2a^2 - r^2)$$

구의 곡면을 평평한 면으로 가정하여 생각하면 접촉면에 비하여 곡률반경이 매우 크다고 할 수 있다. 이를 적용하면 가압 하중과 최대 접촉 압력, 접촉 반지름, 수직방향의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p_m = \frac{P}{\pi a^2} = \left(\frac{3E}{4\pi k} \right) \frac{a}{R} \quad (6)$$

$$p_0 = \frac{3}{2} p_m = \sqrt{3} \text{ of } \frac{6L(E^*)^2}{\pi^3 R^2} \quad (7)$$

$$a = \sqrt{3} \text{ of } \frac{3}{4} \frac{PR}{E^*} \quad (8)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \sqrt{3} \text{ of } \frac{9P^2}{16R(E^*)^2} \quad (9)$$

2.3.2 구와 평면과의 접촉

구와 평면($R_1 = \infty, R_2$) 역시 구와 구의 접촉과 위의 공식이 일치한다. 다만 R^* 가 다를 뿐이다.

$R_1 = \infty$ 이므로 $\frac{1}{R_1}$ 이 0이 되어 아래와 같다.

$$R^* = R_2 \quad (10)$$

2.3.3 구와 구형 컵의 접촉

구와 구형 컵의 접촉 역시 위의 식들을 이용하면 된다. R^* 는 다음과 같다.

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}, \quad R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad (11)$$

위 세 가지 모델들의 최대 접촉 압력 p_0 와 최대변위 δ , 그리고 접촉 반지름 a 는 식(5)부터 식(11)을 정리하여 최종적으로 아래와 같이 간단하게 정리 할 수 있다[7].

$$p_0 = 0.918 \sqrt{3} \text{ of } \frac{P}{(R^*)^2 (E^*)^2} \quad (12)$$

$$\delta = 1.04 \sqrt{3} \text{ of } \frac{L^2 (E^*)^2}{(R^*)^2} \quad (13)$$

$$a = 0.721 \sqrt{3} \text{ of } PR^* E^* \quad (14)$$

3. 해석 과정

3.1 해석 프로그램

FEM 프로그램 중 하나인 ABAQUS의 어원은 주판을 뜻하는 단어인 Abacus에서 유래하였다. 수학 계산에 있어 주판이 새로운 변화를 가져왔듯이 ABAQUS도 유한 요소 해석에 있어서 새로운 변화를 일으켰다. 어느 프로그램보다도 잘 정리된 입력파일의 문법과 Quasi-Static 해석을 통한 해석 결과의 정확성으로 인하여 가장 신뢰성 높은 프로그램 중 하나가 되었다.

3.2 해석모델

해석모델은 앞에서 언급한대로 구와 구의 접촉, 구와 평면과의 접촉, 구와 구형 컵의 접촉, 이렇게 3가지로 정하였다. 구와 구의 접촉 시 해석모델의 size는 $R_1 = R_2 = 40$, $R_1 = 80$, $R_2 = 40$ 로 두 가지 조건으로 해석하였고, 구와 평면의 접촉은 $R_1 = \infty$, $R_2 = 40$ 으로 하였다. 마지막으로 구와 구형 컵의 접촉의 경우, $R_1 = -80$, $R_2 = 40$ 과 $R_1 = -41$, $R_2 = 40$ 의 두 가지 경우로 결정하

였다(단위 mm). 접촉하는 두 물체는 같은 탄성계수와 푸아송 비를 주었다($E=210Gpa$, $\nu=0.3$). Fig. 4처럼 축대칭을 이용하여 대칭되는 1/8부분만 해석하였다.

3.3 경계조건 및 하중과 mesh

경계조건은 Fig. 5와 같다. x-z평면상에 있는 아래방향은 y-symmetry를 주고 y-z평면상에 놓여 있는 축 방향은 x-symmetry를 주었다. 하중은 두 물체의 수직방향으로 각각 500N, 1000N, 1500N, 2000N, 2500N, 3000N을 주었고, 총 여섯 번의 하중을 가해 그때의 접촉 압력들을 살펴보았다. 두 모델의 접촉면의 마찰계수는 두 물체 사이에 오직 수직압력만이 전달될 수 있게 0으로 하였다. mesh는 두 모델이 접촉하는 부분의 요소를 최대한 작게 나누어 접촉 시 압력변화를 잘 관찰 할 수 있게 표현하였다. 40_40 모델의 경우 노드의 수는 3,471개, 요소의 수는 3,312개였다.

3.4 해석 결과

3.4.1 요소크기에 대한 접촉 압력과 접촉 반지름 선도

Fig. 6은 요소의 크기에 대한 접촉 압력과 접촉 반지름에 대한 그래프를 비교한 것이다. 40_40 모델을 사용하였으며 하중은 500N으로 하였다. 그리고 각 요소의 크기를 2배 차이 나게 하여 그때의 해석값을 비교하여 보았다. 확인 결과 요소망 밀도에 대한 값의 차이가 거의 없음을 알 수 있었다.

3.4.2 모델의 접촉 압력과 접촉 반지름 선도

Fig. 7은 ABABQUS 6.6-1을 이용하여 각각의 모델에 하중을 다르게 주고 그때의 접촉 압력과 접촉 반지름을 그린 그래프이다. ABABQUS에서 Interaction의 경우, node to surface와 surface to surface의 2가지 방법이 있다. node to surface방법보다 surface to surface방법으로 해석한 결과값이 Fig. 8에서와 같이 그래프의 굴곡을 많이 줄여줄을 확인 할 수 있었고 따라서 surface to surface방법으로 해석값을 사용하였다. 각 모델의 접촉압력은 Fig. 9에서와 같이 ABABQUS의 visualization에서 CPRESS(Contact Pressure at Surface Integration Point) 값을 적용하였다.

접촉압력은 식(14)에서 보듯이 수직 방향 하중에 비례하고 접촉 반지름의 제곱에 반비례한다. 따라서 하중이 가장 큰 3000N과 접촉 반지름이 가장 작은 40_40 모델에서 가장 큰 접촉 압력이 발생한다. 또한 하중이 가장 작은 500N에 접촉반지름이 가장 큰 40_41 모델의 접촉 압력이 가장 작음을 알 수 있다. 수직 방향의 하중에 대한 모델의 최대 압력 변화는 Fig. 10과 같이 선형적으로 분포하며, 하중이 증가할수록 하중에 대한 최대 접촉 압력의 기울기가 작아짐을 확인할 수 있다.

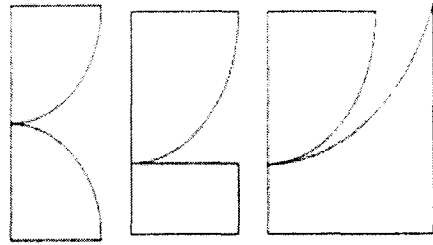


Fig. 4 Symmetry models of analysis

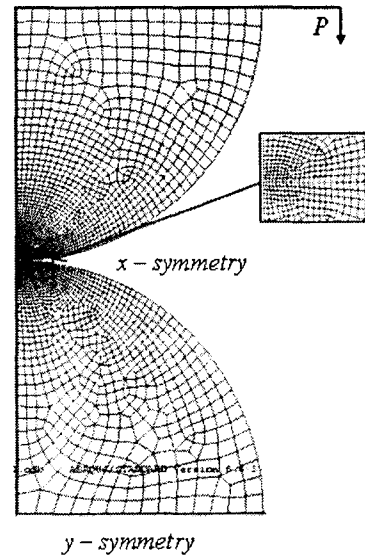


Fig. 5 Finite element model and boundary condition (40_40 Model)

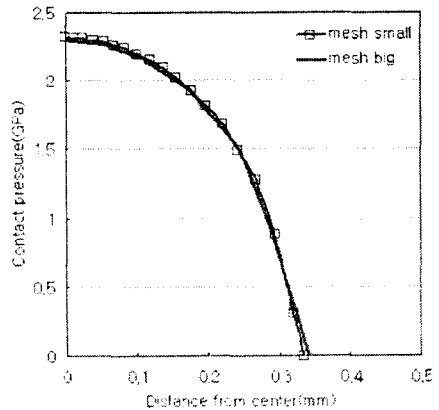


Fig. 6 Contact pressure - distance from center graph by element size

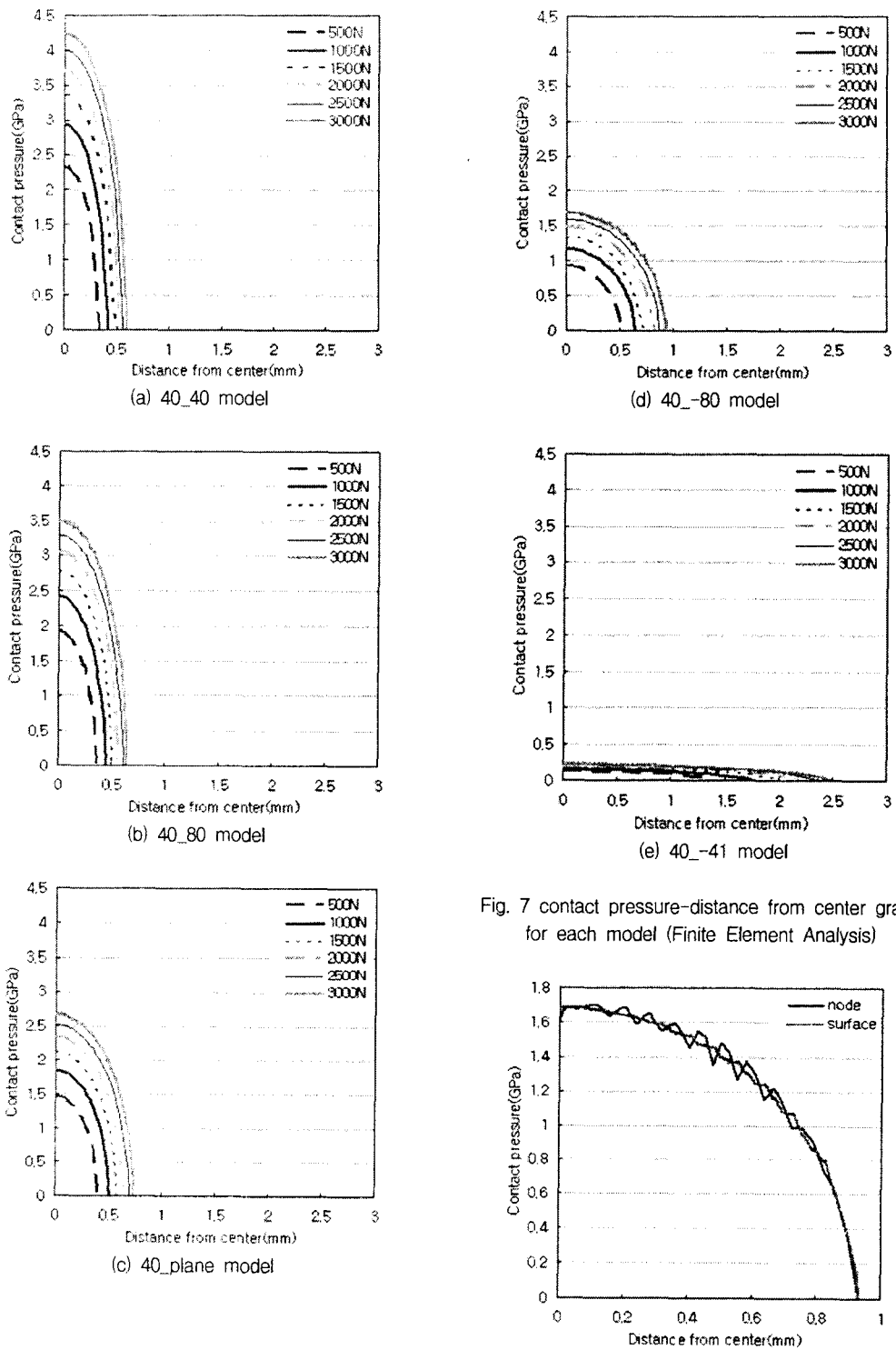


Fig. 7 contact pressure-distance from center graph for each model (Finite Element Analysis)

Fig. 8 40_-80 model comparison of node to surface and surface to surface

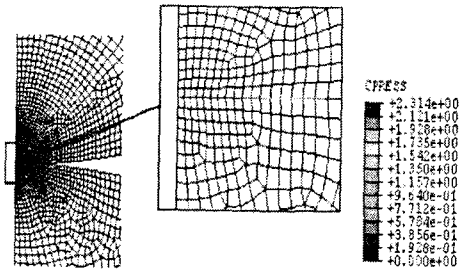


Fig. 9 CPRESS(Contact Pressure at Surface Integration Point) of two spheres contact

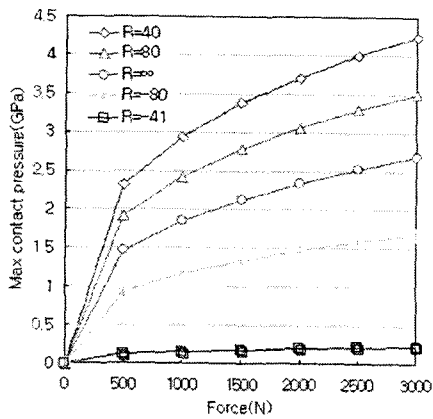


Fig. 10 Max contact pressure-force graph of each model (Finite Element Analysis)

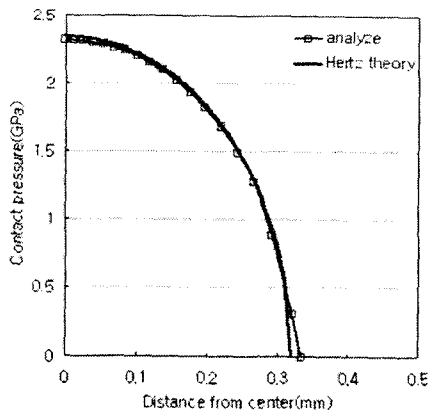


Fig. 11 Comparison of the analysis and Hertz theory for contact pressure-distance from center graph at 40_40 model of force 500N

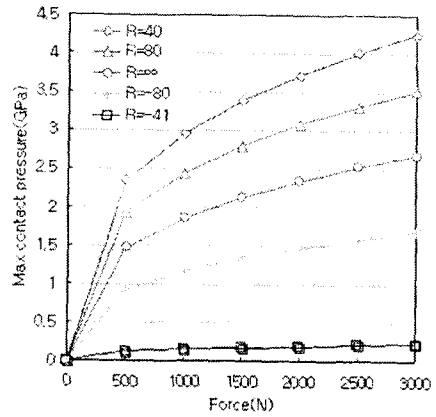
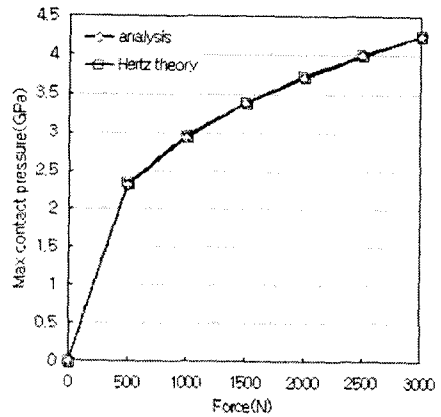
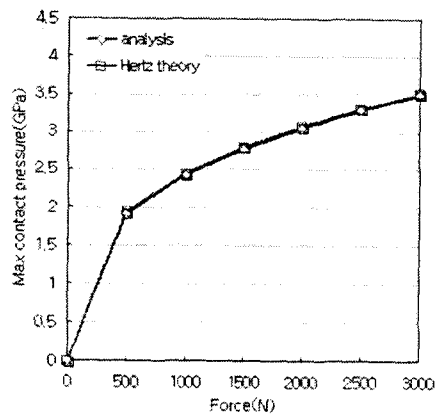


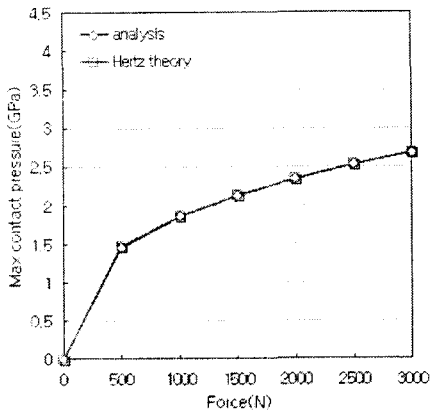
Fig. 12 Max contact pressure-force graph of each model (Hertz contact theory)



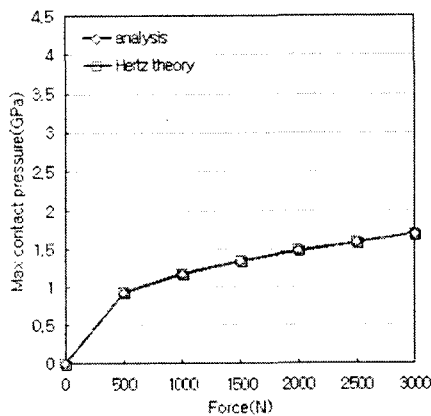
(a) 40_40 model



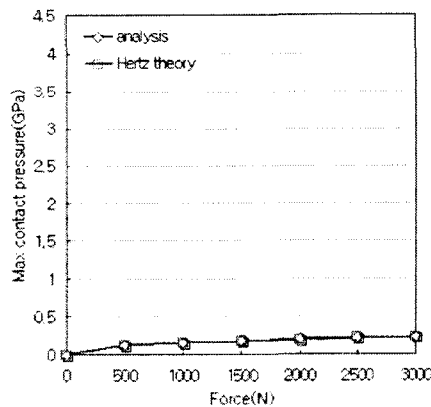
(b) 40_80 model



(c) 40_plane model



(d) 40_-80 model



(e) 40_-41 model

Fig. 13 Comparison of the analysis and Hertz theory for max contact pressure-force graph

4. 해석결과 및 이론과의 비교

4.1 접촉 압력과 접촉 반지름의 비교

각 모델의 접촉 압력에 대한 접촉 반지름 분포도 역시 해석값과 이론값이 거의 일치함을 알 수 있다. 다만 ABAQUS의 유한 요소 해석값의 경우, 접촉 반지름이 0이 아닌 지점에서 최대압력이 발생하였다. 이는 Hertz 접촉이론식과 맞지 않았다. Fig. 11은 40_40 모델에서 수직하중이 500N일 때의 접촉 압력과 접촉 반지름을 Hertz 이론값과 유한 요소 해석값으로 비교한 그래프이다. 두 가지의 그래프를 서로 비교해 본 결과, mesh를 나눌 때 접촉되어 있어 조밀하게 부분보다 접촉되지 않아 성기게 나누어진 외각부분에서 오차가 크게 발생하였다. 다시 말해, 접촉 반지름이 커질수록 mesh가 성기게 나누어져 해석값의 오차가 많이 발생한다는 것을 확인할 수 있었다.

4.2 수직방향 하중과 최대 접촉 압력 비교

Fig. 12는 식(12), (13), (14)을 이용하여 각 하중에 대한 최대 압력을 구한 후, 이를 그래프로 작성한 것이다. Fig. 13은 각 모델의 유한 요소 해석값과 Hertz 이론값을 비교한 것이다. 두 가지 결과를 비교해본 결과 Hertz 접촉이론식의 이론값과 해석값이 거의 일치하게 나타났다.

5. 결론

본 연구에서는 Hertz 접촉이론의 유한 요소 해석을 실시하였다. FEM 프로그램인 ABAQUS를 이용한 유한 요소 해석값과 이론에 의한 수치적인 값을 비교해 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 여러 가지 접촉 해석 시 Hertz 접촉이론을 이용하여 쉽게 그 값을 얻을 수 있었다. 단, Hertz 접촉이론이 탄성체만으로 적용이 한정되어 있어 큰 하중이나 변위가 주어진 물체에는 이를 보완할 다른 이론들이 필요하였다.

(2) 모든 조건이 같은 모델의 경우, 요소 밀도 차는 크게 나타나지 않았다. 본 연구의 경우 40-40 모델을 기준으로 하여 접촉부분의 요소크기를 각각 0.012 mm, 0.024 mm로 두 배로 차이 나게 하여 비교해 보았는데, 큰 차이가 없었다.

(3) mesh를 나눌 때 접촉되고 있는 부분은 조밀하게 나누고 접촉된 부분에서 멀어질수록 mesh를 성기게 나누었다. 그 결과, 성기게 나누어진 부분에서 수직하중에 의한 접촉시 접촉 반지름의 오차가 Hertz 접촉이론값에 비해 크게 발생하였다.

(4) 접촉 압력과 접촉 반지름의 그래프는 해석값과 이론값이 거의 일치하게 나왔다. 다만 이론상으로는 접촉 반지름이 0인 지점에서 최대압력이

발생하는데 비해서 유한 요소 해석값은 그러하지 않았다. 그 원인은 symmetry라 생각된다. 접촉 반지름이 0인 지점의 노드는 1/8모델의 축대칭 상에서 x-symmetry의 영향을 받는다. 그러므로 이론처럼 그 지점의 압력값이 최대가 되지 않는 것이다. 또한 서로 다른 형상의 두 물체를 접촉시키는데 두 물체가 접촉되는 부분의 노드와 요소가 서로 떨어져 있어 문제가 발생할 수도 있다. 마지막으로 FEA(Finite Element Analyze)의 접촉처리에 있어 해석과 이론이 다를 수도 있다.

참 고 문 헌

- [1] 최정흠, 한동철, 김기환, "유한요소해석을 이용한 한국형 고속철도 차량의 차륜 마모 예측", *한국철도학회 2005년도 춘계학술대회논문집*, pp.78-83, 2005. 5.
- [2] 구영필, 조용주, "FFT를 이용한 Hertz Contact 해석", *한국운활학회 학술강연회 제27권*, pp.131-138, 1998. 6.
- [3] 황재용, 김기환, 김청균, "차륜과 레일 사이의 접촉응력에 관한 트라이볼로지적 해석", *한국운활학회 학술강연회 제25권*, pp.210-217, 1997. 6.
- [4] M. bahrami, M.M. Yovanovich and J.R. Culham, "A comp sack model for spherical rought contacts", *Tran of the ASME Vol. 127*, pp.884-889, 2005.
- [5] Rene M. Overney, "Contact Mechanics", *University of Washington Nano Lab*, pp.1-7, 2004.
- [6] Walter D. pilkey, "*Formulas for stress strain and structural matrices*", John Wiley & Sons. Inc, pp.403-437, 1994.
- [7] D. L. Bartel, D. T. Davy and T. M. Keaveny, "*Orthopaedic Biomechanics*", Pearson Prentice Hall, pp.223-229, 2006.
- [8] 이상엽, "Hertz 접촉이론을 이용한 사이클로이드 감속기의 접촉하중에 관한 연구", *서울대학교 대학원*, pp.27-32, 2006.