

# 반무한체 표면아래의 소성변형을 고려한 3차원 탄소성 접촉해석

문길환 · 이상돈 · 조용주<sup>†</sup>

부산대학교 기계공학부

## 3-Dimensional Elastic-Plastic Contact Analysis Considering Subsurface Plastic Strain in a Half-Space

Kilhwan Moon, Sangdon Lee, and Yongjoo Cho<sup>†</sup>

Dept. of Mechanical Engineering, Pusan national University

**Abstract** – An elastic-plastic contact analysis is developed using a semi-analytical method. The elastic contact is solved within a Hertz theorem. The reciprocal theorem with initial strains is then introduced, to express the surface geometry as a function of contact stress and plastic strains. The irreversible nature of plasticity leads to an incremental formulation of the elastic-plastic contact problem, and an algorithm to solve this problem is set up. Closed form expression, which give residual stresses and surface displacements from plastic strains, are obtained by integration of the reciprocal theorem. The distribution of contact stress, residual stress and plastic strain are obtained by the changed surface geometry.

**Key words** – elastic-plastic(탄소성), contact(접촉), residual stress(잔류응력), plastic strain(소성변형률), half space(반무한체)

### 1. 서 론

기계부품의 파손은 크게 구조 강도에 관련된 것과 접촉면에서의 손상으로 나눌 수 있다. 지금까지 구조 강도와 관련된 연구는 활발히 이루어져 이론과 적용에 있어서 상당 수준에 도달하게 되었지만 접촉면의 파손 기구의 측면에서는 상대적으로 미흡하다. 기계 시스템이 정밀화됨에 따라 접촉면 파손기구의 측면이 부각되고 있으며 관련 연구가 증가하고 있다.

접촉 압력의 계산은 마찰, 마멸, 표면 손상, 접촉 피로 수명 등과 같은 트라이볼로지 현상을 파악하는데 있어서 가장 중요한 분야이기 때문에 많은 연구가 이루어져 왔다. 컴퓨터를 이용한 접촉 압력의 계산은 크게 두 가지 방법에 기초를 둔 기법들로 나누어져 연구가 진행되고 있다.

첫번째 분야는 유한요소 해석(Finite Element Analy-

sis)으로 접촉한 물체를 미소의 요소로 나누어서 해석을 하는 기법이다. Kogut[1]는 FEA 를 통해 표면의 돌기들이 높은 압력을 받을 때의 표면의 소성변형을 계산하였다. 하지만, 이러한 기법은 표면의 크기가 전체 물체의 크기에 비해 매우 작을 때 표면을 나누는 미소요소들의 크기가 매우 작아 해석을 해야 할 요소의 수가 많아져 계산시간이 늘어나는 단점이 있다. 실제의 거친 표면의 탄소성 해석을 실행하게 될 경우 엄청난 계산시간이 필요하게 될 것이다.

이러한 트라이볼로지 분야의 특수성 때문에 여러 연구자에 의해 유한 요소모델에서의 한계를 반해석적(Semi-Analytical Method) 기법을 통해 극복하고자 하는 시도가 있었다. 이러한 SAM 기법은 특히 3차원 접촉 문제에 있어서 매우 작은 접촉 영역만을 고려할 수 있어 FEA 기법에 비해 적은 계산 시간이 요구되는 장점이 있다. Wang[2]은 Jacq[3]의 연구에 기반을 둔 3차원 탄소성 접촉해석 기법을 제시하였다.

본 연구에서는 SAM 기법을 이용한 탄소성 접촉 해

<sup>†</sup>주저자 · 책임저자 : yjcho@pusan.ac.kr

석 기법을 구축하고자 한다. 그 이유는 계산시간의 단축 등의 장점과 더불어 본 실험실에서 선행연구로 진행한 탄소성 접촉 해석 기법 또한 SAM 기법에 기반을 두고 있기 때문이다[4].

## 2. 탄소성 접촉 해석

### 2-1. 표면 변위

탄소성 접촉에서 표면의 수직 변위는 접촉 압력 뿐만 아니라, 소성 변형에 의해서도 발생하게 된다. Jacq 등[3]은 수직 하중이 작용하는 경우 탄소성 접촉에서 표면의 변위를 상반정리(Reciprocal Theorem)을 통해서 유도하였다.

$$\begin{aligned}
 u_{k(total)} &= u_{k(pressure)} + u_{k(residual)} \\
 &= \int_{\Gamma} u_i^* [M, p^*(A)] p_i(M) d\Gamma \\
 &\quad + 2\mu \int_{\Omega_p} \varepsilon_{ij}^p(M) \varepsilon_{ij}^* [M, p^*(A)] d\Omega \quad (1)
 \end{aligned}$$

Fig. 1에 격자계를 나타내었다. A점은 변위를 알고자 하는 지점이며 M점은 압력 혹은 소성변형이 발생한 지점을 나타낸다.

$(u, \varepsilon, \sigma)$ 는 초기 소성변형에 의한 상태이며  $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ 는 A점에 작용하는 단위 하중에 의한 상태이다. 여기서 압력에 의한 변형 성분인 첫 번째 항의 적분 구간은 표면이며 소성 변형에 의한 변형 성분인 두 번째 항의 적분 구간은 표면 아래 체적이다. 첫 번째 항에서  $u_i^*$ 는 A점의 단위 하중에 의한 M점에서의 변형이며,  $p(M)$ 는 물체에 실제로 부가된 하중에 의한 M점에서의 압력을 나타낸다. 두 번째 항에서  $\varepsilon_{ij}^p(M)$ 는 M점의 소성 변형을 나타내며  $\varepsilon_{ij}^*$ 는 A점의 단위 하중에 의한 M점에서의 변형을 표현한다. 결국 첫 번째 항은 압력에 의한 표면의 탄성 변위를 나타내며 두 번째 항은 표면 아래 소성 변형에 의한 표면의 잔류 변위(Residual Displacement)를 나타낸다. 표면 잔류 변위를 얻기 위해 다음의 절차를 필요로 한다. 우선 소성 변형된 영역을  $N_v$ 개의 사각 격자로 나눈다.

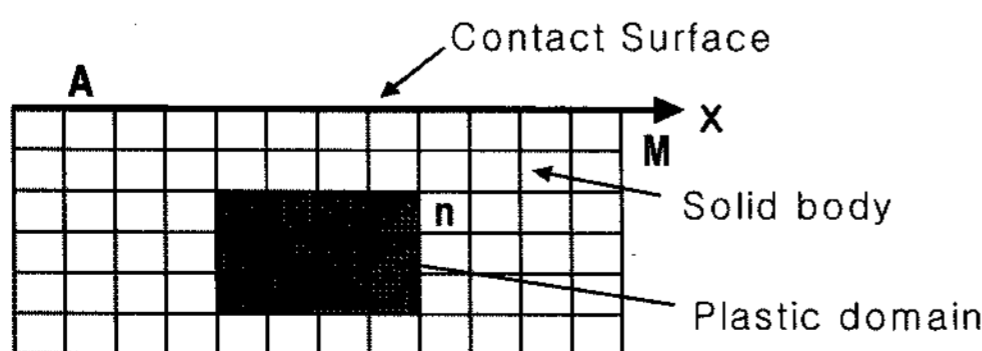


Fig. 1. Grid system in the x-z section.

$$\begin{aligned}
 u_3^*(A) &= 2\mu \sum_{n=1}^{N_v} \varepsilon_{ij}^p(n) \int_{\Omega_{cn}} \varepsilon_{3ij}^* d\Omega \\
 &= 2\mu \sum_{n=1}^{N_v} \varepsilon_{ij}^p(n) D_{3ij}(n) \\
 \text{with } D_{ij} &= 2\mu \int_{\Omega_{cn}} \varepsilon_{3ij}^* d\Omega \quad (2)
 \end{aligned}$$

$\varepsilon_{ij}^*$ 는 A점에서의 단위 수직 하중에 의한 각 격자의 변형률을 나타낸다.  $D_{ij}$ 에는 격자 n의 소성 변형에 의해 발생하는 A점에서의 잔류 변위를 나타내는 영향함수이다.

### 2-2. 잔류 응력

반무한체 내의 잔류응력을 구하기 위해 Fig. 2와 같이 다음의 세가지 해를 중첩해야 하며, 각각의 해는 Chiu[6,7]에 닫힌 형태로 제공된다.

[해1] 재료는 등방 탄성체이며 무한하다고 가정하자. 균일한 소성 변형률을 갖는 직육면체 격자(C)에 의한 M점에서의 응력이 해1이다.

[해2] 표면을 대칭면으로 하는 무한체에서 C점과 대칭이 되는 위치에 존재하는 직육면체 격자(C')를 고려하자. C'의 소성 변형률 중 성분의 방향과 크기는 C점 격자와 같고 성분은 크기가 같고 방향이 다르다고 가정하자. 이 경우 무한체 내의 M점에 발생하는 응력이 해2이다.

[해3] 해1과 해2를 중첩하게 되면 대칭면에서 전단응력은 사라지고 수직응력은 두 배가 된다. 해1과 해2를 중첩했을 때 대칭면에서 발생하는 수직응력이 반무한체 표면에 작용한다고 가정하자. 반무한체 표면에서 이러한 수직응력에 의한 M점에서의 응력이 해3이다.

따라서 해1과 해2를 더하고 해3을 감하여 C점에 의한 M점의 잔류 응력을 구할 수 있다. 실제 해석에서는 소성 변형이 존재하는 영역을  $N_v$ 개로 나누어 영역 내의 모든 격자가 M점에 미치는 영향을 더하여 A점의 잔류응력을 얻을 수 있다. 해 1, 2는 소성 변형

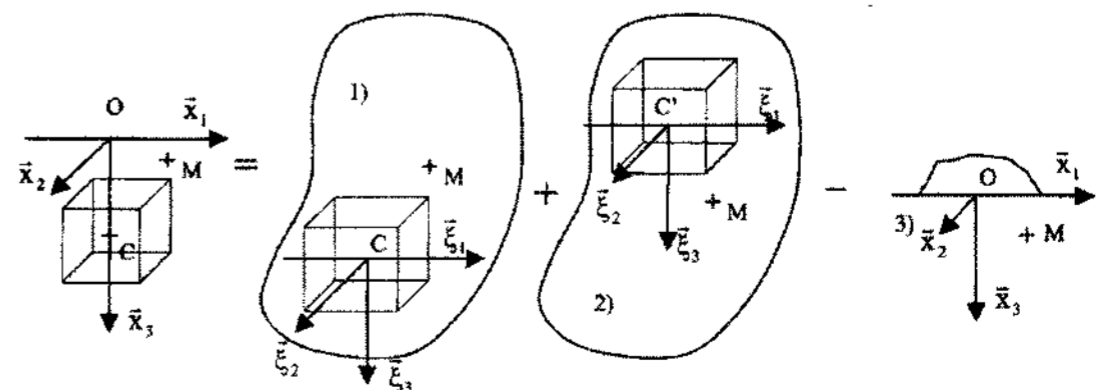


Fig. 2. Superposition of solution.

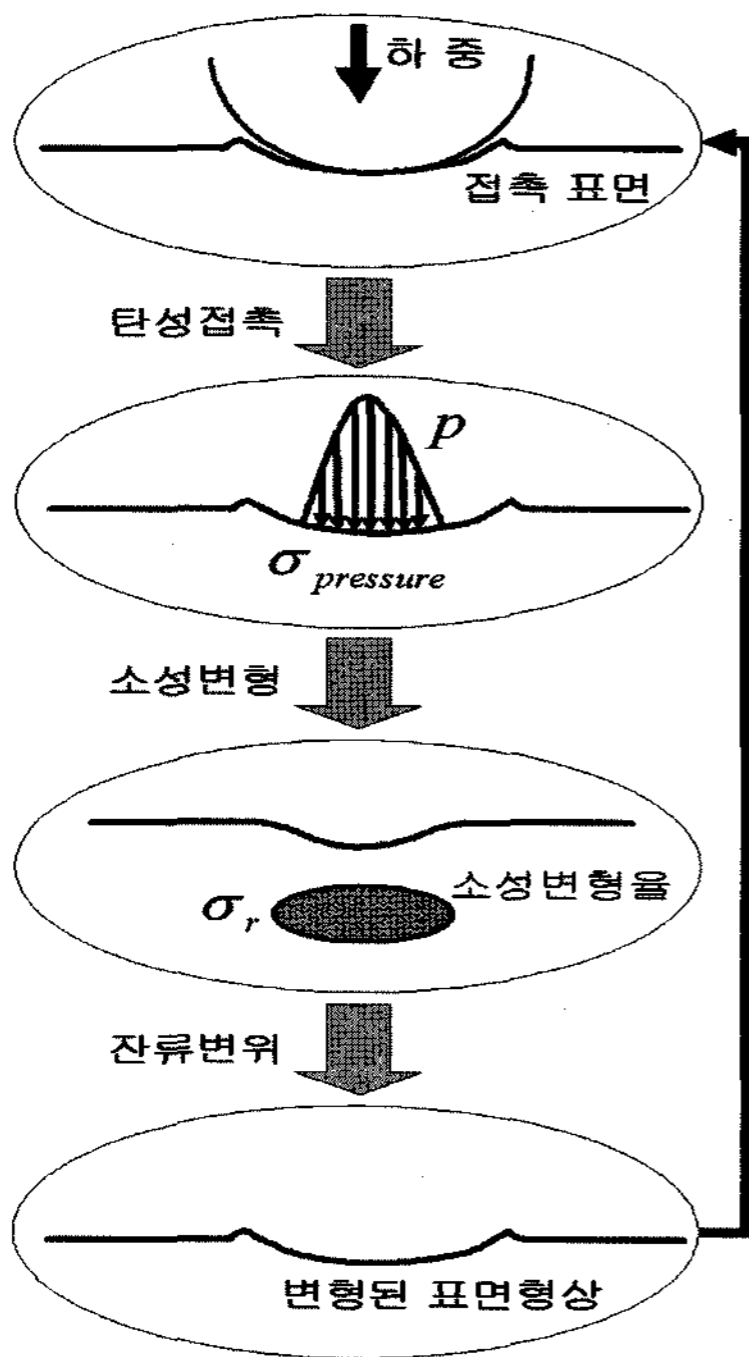


Fig. 3. Process of elastic-plastic contact.

격자를 중심으로 하는 좌표계로 표현된다. 해 3은 반무한체 표면을 원점으로 하는 좌표계로 표현된다.

2-3. 탄소성 해석 절차

표면 한 점의 변위는 잔류 변위와 접촉 압력에 의해 발생하는 변위의 합으로 표현된다. 탄소성 접촉 해석을 하기 위해 우선 탄성 접촉 해석을 통해 표면의 하중 증분에 따른 표면의 압력, 변위, 그리고 표면 아래의 응력을 얻는다. 그 후 표면 아래의 소성 변형량은 항복 조건과 경화 법칙을 적용하여 얻을 수 있다. 하지만 소성 변형률 증분은 압력 증분에 따른 응력 증가에 영향을 받을 뿐만 아니라 소성변형 영역 및 크기의 증가에 따른 잔류 응력 증가에도 영향을 받기 때문에 반복적 연산을 통해 얻어야 한다. 다음으로 소성 변형에 의한 표면의 잔류 변위를 얻을 수 있으며, 표면의 잔류 변위는 표면형상의 변화를 가져온다. 따라서 변화된 표면 형상을 이용하여 탄성 접촉해석이 다시 이루어져야 하며 표면의 형상 변화가 더 이상 발생하지 않을 때 까지 이러한 절차를 반복 수행하여야 한다.

Fig. 3에 탄소성 접촉 해석 과정을 나타냈다.

탄소성 해석의 전체적인 알고리즘은 다음의 절차를 따른다.

- ① 하중( $W$ ), 초기 형상( $h_i$ ), 압력( $p$ ), 소성변형( $\epsilon^p$ )과 그와 관련된 잔류 변형( $u_3^r$ ), 경화상태(Hardening state)는 초기조건으로 주어진다.
- ② 소성 변형률 증분과 초기 잔류 변형 증가량을 '0'으로 설정한다.
- ③ 탄성 접촉해석을 통해 하중 증가에 따른 압력 증가와 표면 아래 응력의 증가량을 얻는다.
- ④ 소성변형률 증분 알고리즘을 통해 소성 변형률 증분과 표면의 잔류 변형 증가량을 얻는다.
- ⑤ 잔류변형 증분( $\Delta u_3^r$ ,  $\Delta u_3^r$ )의 수렴여부를 결정한다.
- ⑥ 수렴하지 않는 경우 나중에 얻은 잔류변형 증분( $\Delta u_3^r$ )을 초기 잔류변형 증분( $\Delta u_3^r$ )으로 설정하고 ③로 돌아간다.
- ⑦ 수렴하는 경우 압력, 소성 변형률과 잔류 변형률의 각각 증분량을 초기값에 더하고 소성 변형률 증분과 잔류 변형률 증분은 '0'으로 둔다.
- ⑧ 알고자 하는 상태까지 점차적으로 하중을 증가시키면서 ③~⑦과정을 반복 수행한다.

3. 해석결과

Figs. 4, 6, 7, 8의 응력계산은 프와송비 의 일정값에서 무차원 형태로 나타낸다.[8]

Fig. 4는 Fig. 2의 해1, 2에 대한 해석결과로, 무한탄성 영역에서 입방체의 초기 변형률에 의한 응력장을 수치 계산을 통하여 Chiu[6]의 결과와 동일함을 확인하였다.  $\bar{\epsilon}_{11}$ 을 제외한 모든 초기변형률 구성요소는 0으로 가정한다. 입방체 내부에서 균일한 초기변형률  $\bar{\epsilon}_{11}$ 을 가진 세가치 형태의 입방체 영역에 대한  $x_1$ 축을 따라 수직응력의 변화를 나타낸 것이다.

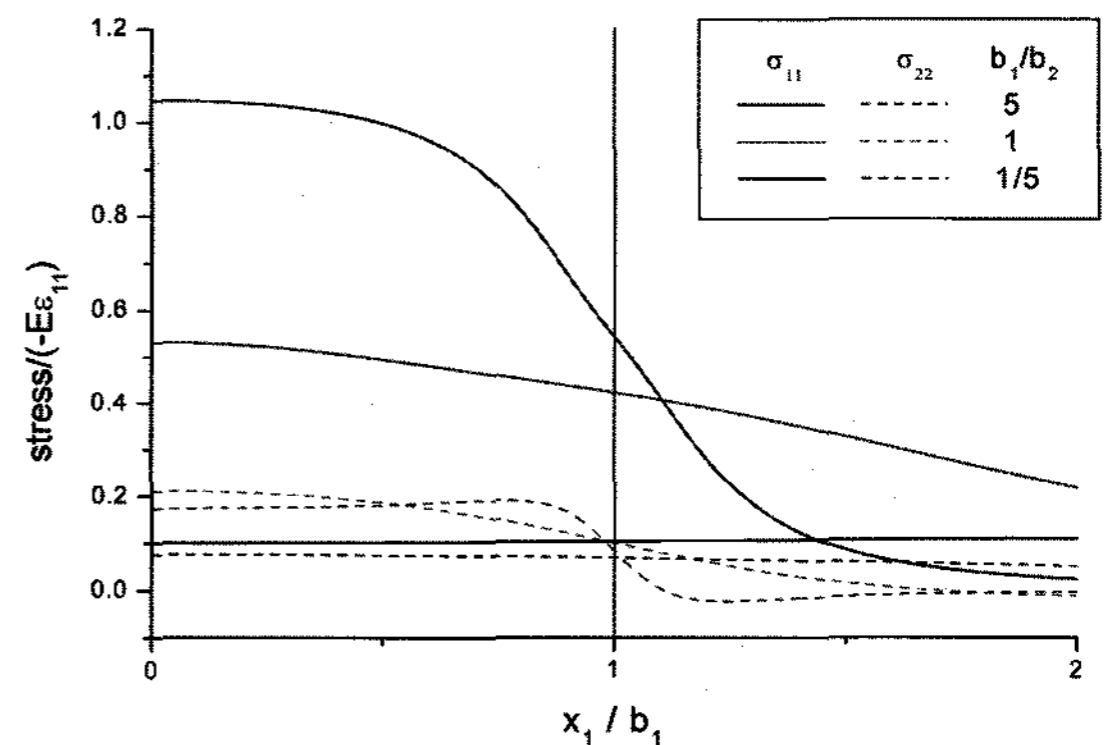


Fig. 4. Variation of normal stresses  $\sigma_{11}/E\bar{\epsilon}_{11}$  along the  $x_1$  axis for three different  $b_1/b_2$  values.

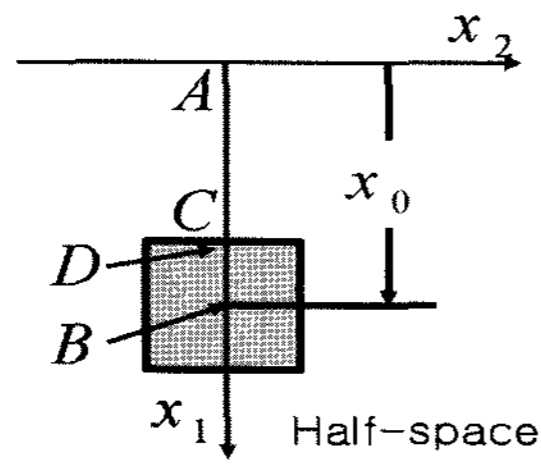


Fig. 5. Different locations(A, B, C, D) in a half-space.

Fig. 5는 Fig. 6, 7, 8의 대한 반무한체에서 입방체 중심에 대한 위치를 나타낸 것으로, A는 표면, B는 입방체 중심, C와 D는 경계면이다.

Fig. 6, 7, 8은 Fig. 2의 해3에 대한 해석결과로, 초기 변형률이 균일한 입방체를 가진 반무한체의 응력장을 수치계산한 결과이다.

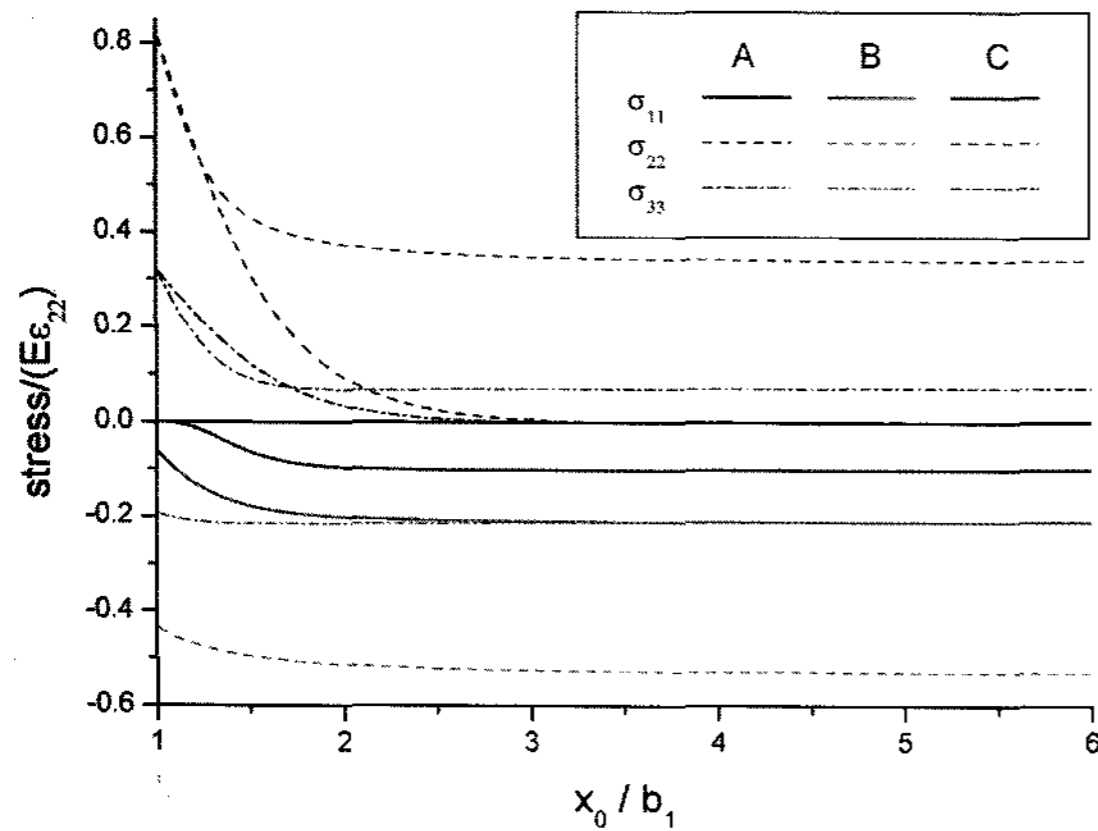


Fig. 6. Stresses at different locations in half-space with uniform initial strain  $e_{22}$ .

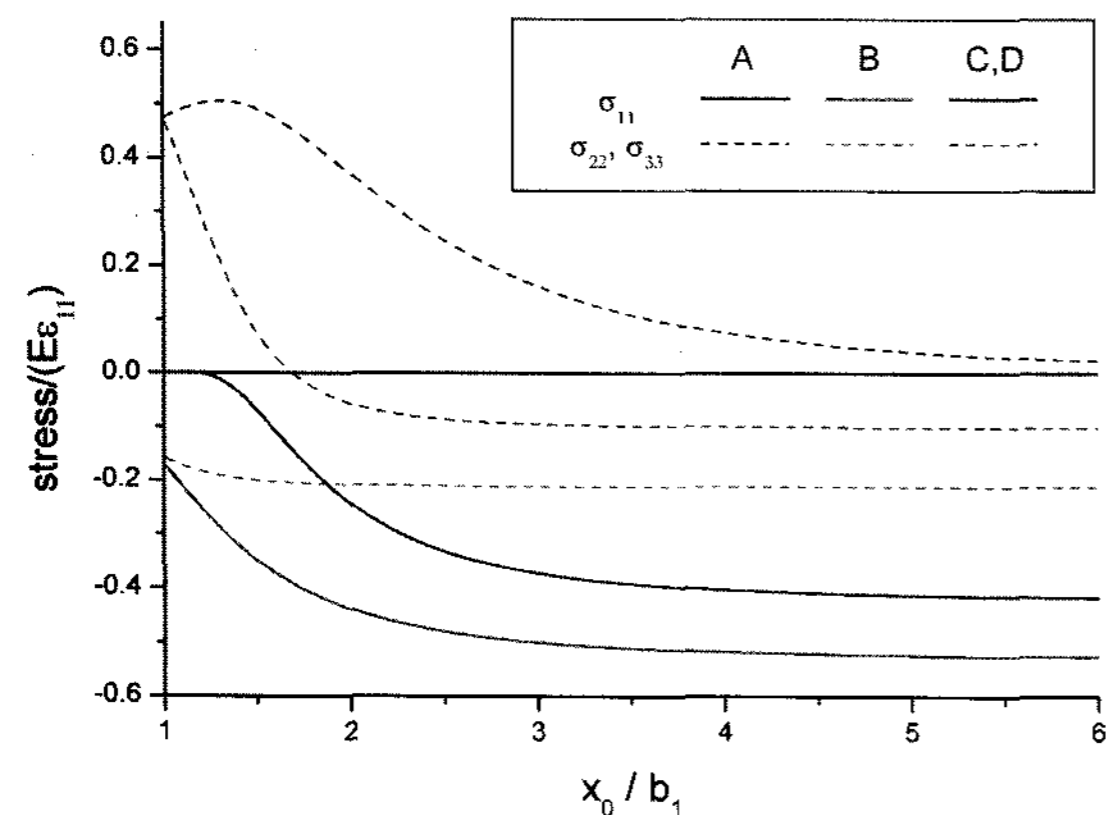


Fig. 7. Stresses at different locations in half-space with uniform initial strain  $e_{11}$ .

Fig. 6는 균일한 초기변형률  $e_{22}$ 를 가진 입방체의 점 A, B, C에 대한  $x_0$ 에 따른 응력변화로, Chiu[7]의 결과와 동일함을 확인하였다.

Fig. 7은 균일한 초기변형률  $e_{11}$ 를 가진 입방체의 점 A,B,C,D에 대한  $x_0$ 에 따른 응력변화로, Chiu[7]의 결과와 동일함을 확인하였다.

Fig. 8은 균일한 초기변형률  $e_{11}=e_{22}=e_{33}$ 인 동일한 응력을 가진 입방체의 점 A, B, C, D에 대한  $x_0$ 에 따른 응력변화로, Chiu[7]의 결과와 동일함을 확인하였다.

탄소성해석에 사용된 조건은 다음과 같다. 접촉구의

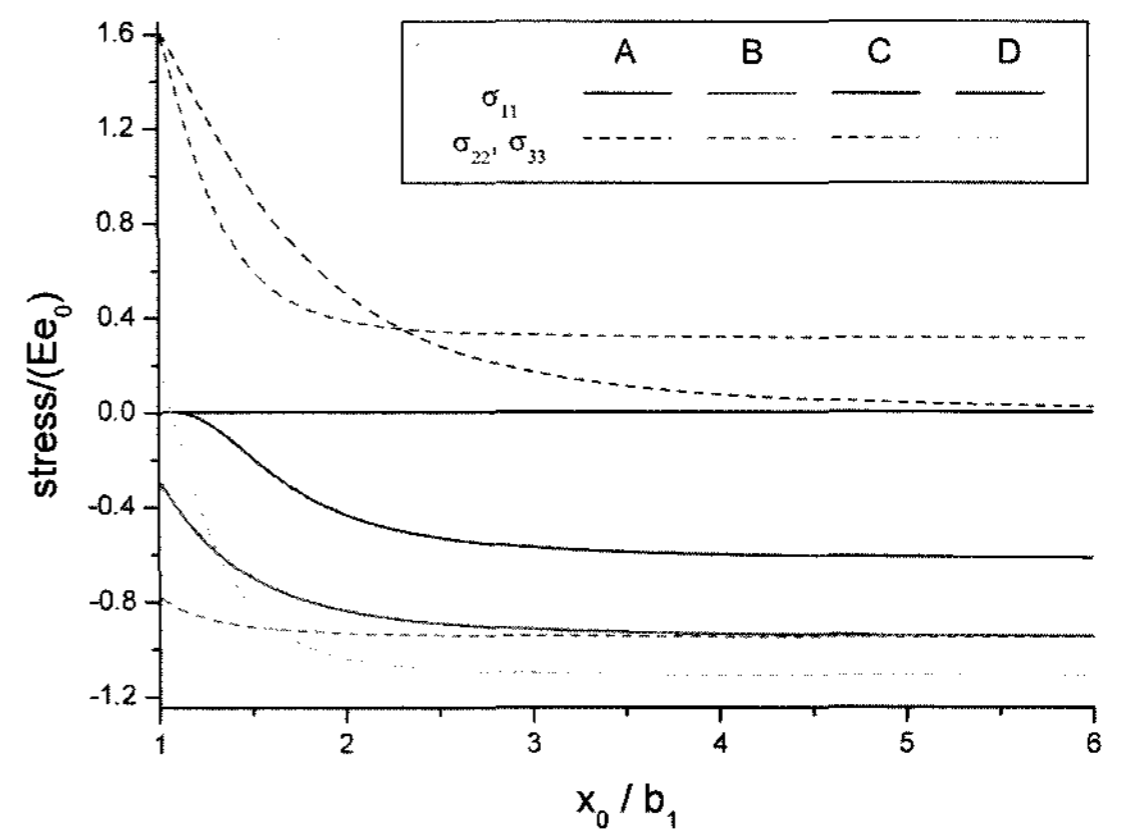
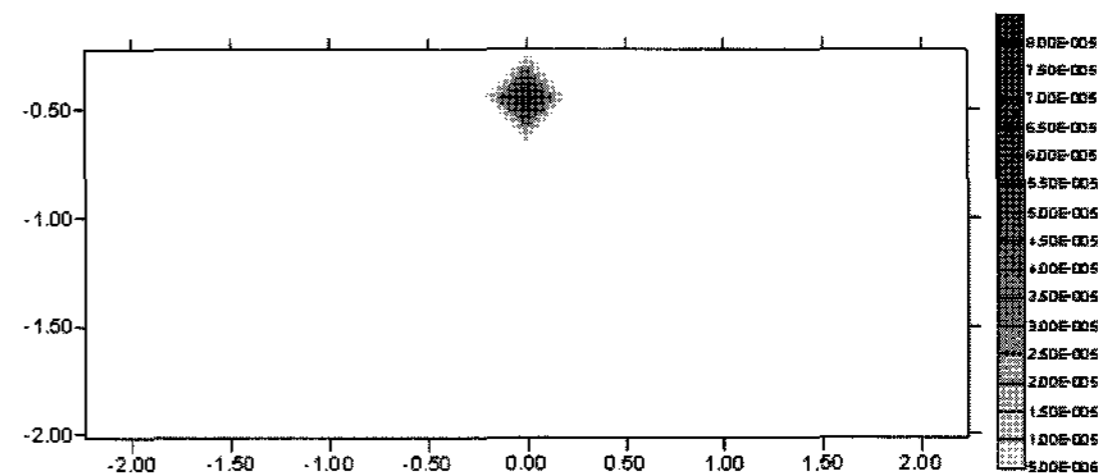
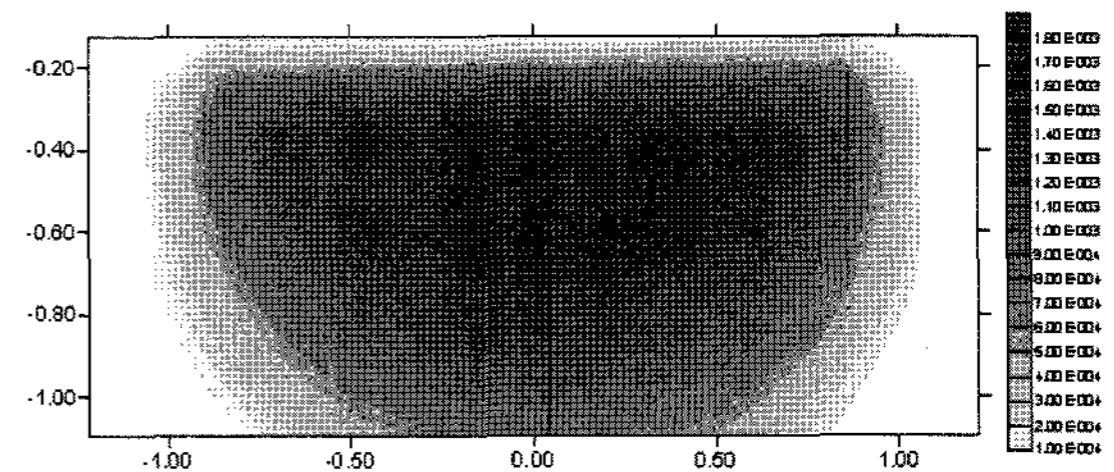


Fig. 8. Stresses at different locations in half-space with uniform initial strain  $e_{11}=e_{22}=e_{33}$ .



(a) load : 0.8 N



(b) load : 5 N

Fig. 9. Distribution of equivalent  $\epsilon^p$  in x-z section.

반경  $r=0.5$  mm, 프와송비  $\nu=0.4$ , 탄성계수  $E=210$  GPa, 항복응력  $\sigma_{Y0}=1200$  MPa이다. Linear hardening

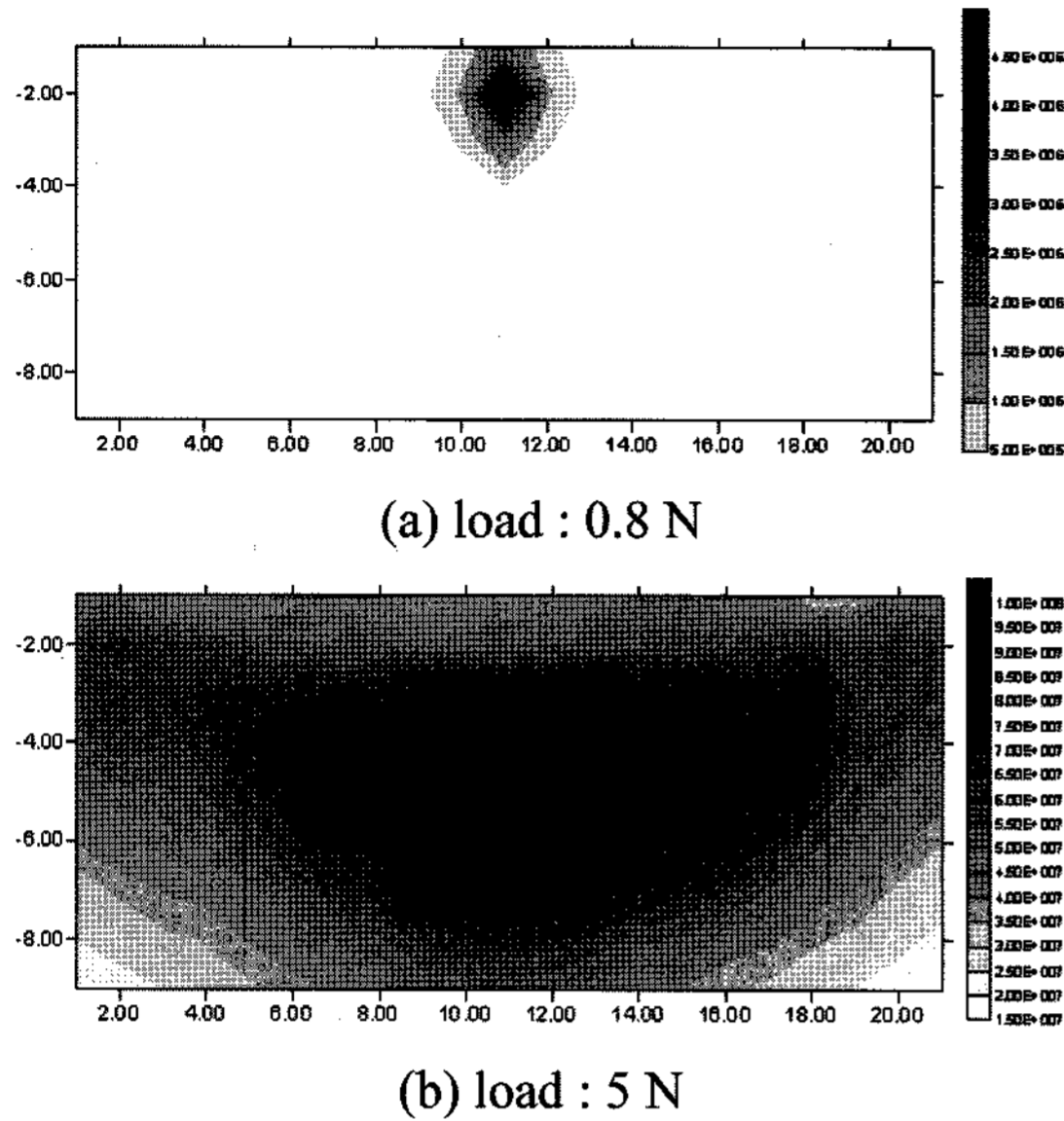


Fig. 10. Distribution of residual stress in x-z section.

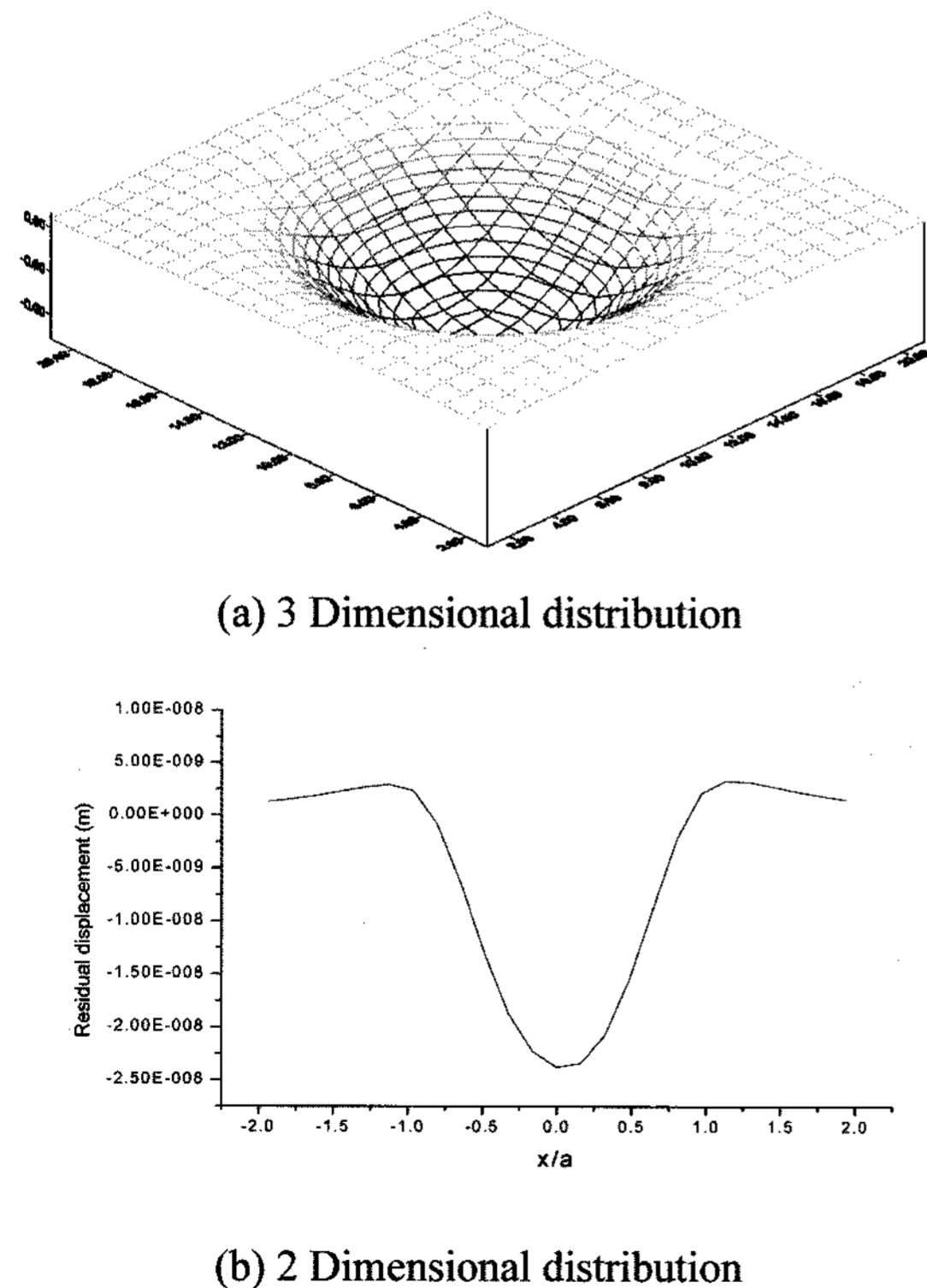


Fig. 11. Distribution of residual displacement.

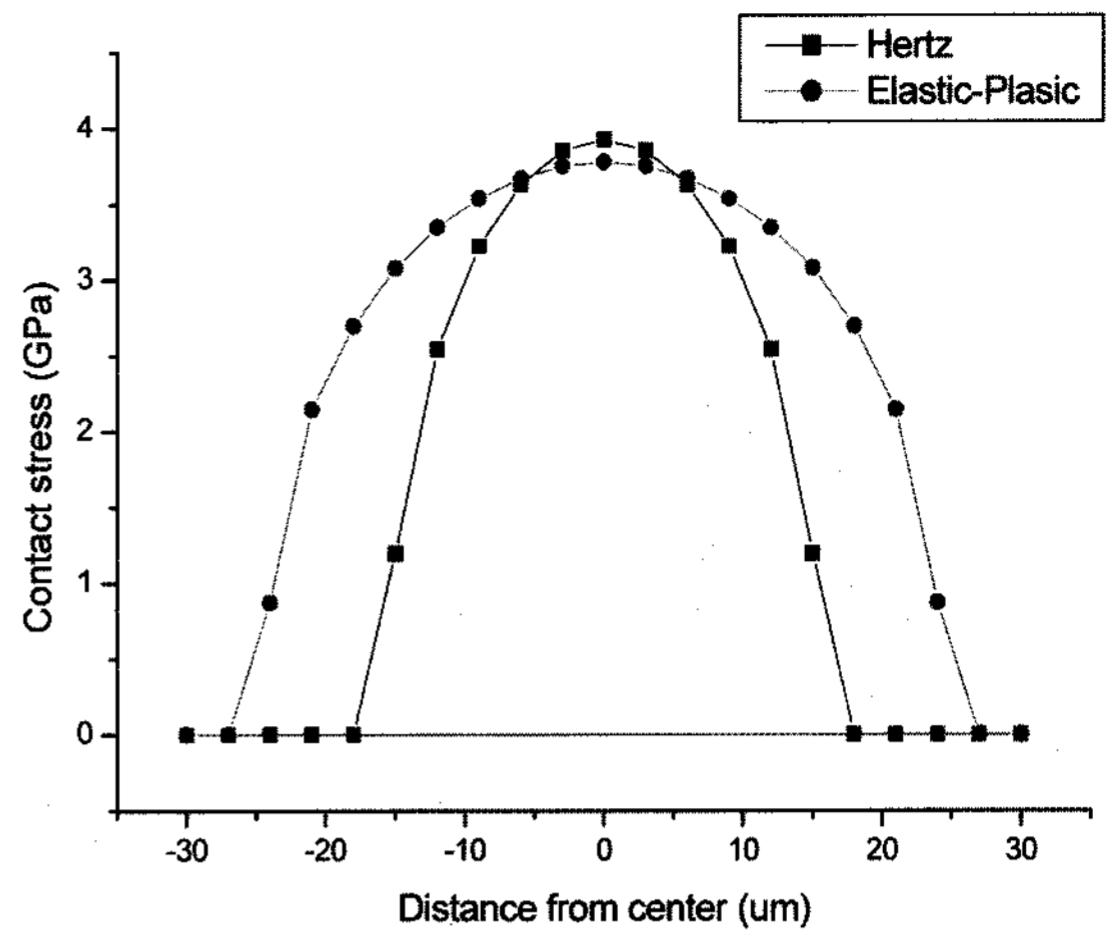


Fig. 12. Influence of plasticity on pressure distribution.

법칙을 사용하였으며, 기울기  $E_T=0.8E$ 이다.

Fig. 9는 소성변형률의 분포를 나타낸 것으로, 0.8 N에서는 0.008%, 5 N에서는 0.18%의 최대값이 발생하였다.

Fig. 10은 잔류응력의 분포를 나타낸 것으로, 0.8 N에서는 4.5 MPa, 5 N에서는 101 MPa의 최대값이 발생하였다.

Fig. 11은 잔류변위의 분포를 나타낸 것으로, (a)는 3차원, (b)는 2차원 형상이다.

Fig. 12는 접촉응력의 분포를 나타낸 것으로, Hertz 탄성접촉의 경우와 탄소성접촉의 경우를 비교하였다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 접촉해석에서 실제 재료의 항복에 따른 소성변형을 반영하기 위한 목적으로, 표면아래의 소성변형을 고려한 3차원 탄소성 접촉 해석에 대한 연구를 하였다.

본 연구에 의한 결과는 다음과 같다.

- (1) Chiu의 단힌해를 계산하여, 해의 중첩을 통하여 반무한체 내의 잔류응력을 구하였다.
- (2) 재료의 소성변형에 의하여 발생하는 소성변형률을 구하여 잔류응력과 표면형상 변화를 계산하였다.
- (3) 잔류응력의 영향으로 변화된 표면형상에 의한 접촉응력 최대값은 Hertz 탄성접촉에 의한 접촉응력보다 낮게 발생하였다.

이와 같은 결과에 따라 향후 표면거칠기를 고려한

접촉해석에서 탄소성 접촉해석을 이용하여 실제 접촉 상황을 고려할 수 있을 것이다.

## 후 기

본 연구는 산업자원부와 한국산업기술재단의 지역혁신인력양성사업으로 수행된 연구결과임.

## 참고 문헌

1. Kogut, L. and Etsion, I., "Elastic-Plastic Contact Analysis of a Sphere and a Rigid Flat", *J. Tribology*, vol. 69, No. 5, pp. 657-662, 2002.
2. Wang, F. and Keer, L. M., "Numerical Simulation for Three Dimensional Elastic-Plastic Contact With Hardening Behavior", *Trans. ASME*, Vol. 127, pp. 494-502, 2005.
3. Jacq, C., *et al.*, "Development of a Three- Dimensional Semi-Analytical Elastic-Plastic Contact Code", *J. Tribology*, Vol. 124, No. 4, pp. 653-667, 2002.
4. Y. J. Cho, T. W. Kim and M. J. Lee., "The Stress Field in a Body Caused by the Tangential Force of a Rectangular Patch on a Semi-infinite Solid", *KSTLE International Journal*, Vol. 2, No. 1, pp. 29-34, 2001.
5. Love, A. E. H., "Stress Produced in a Semi- Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary", *Phil. Trans. Royal Society*, A228, pp. 377-420, 1929.
6. Chiu, Y. P., "Stress-Field Due to Initial Strains in a Cuboid Surrounded by an Infinite Space", *J. Appl. Mech.*, Vol. 44, No. 4, pp. 587-590, 1977.
7. Chiu, Y. P., "Stress-Field and Surface Deformation in a Half Space with a Cuboidal Zone in Which Initial Strains Are Uniform", *J. Appl. Mech.*, Vol. 45, No. 2, pp. 302-306, 1978.
8. Liu, S. and Wang, Q., "Elastic Fields due to Eigenstrains in a Half-Space", *J. Appl. Mech.*, Vol. 72, pp. 871-878, 2005.