한국초등수학교육학회지 *12*(1) 79-100. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 12*(1) 79-100.

Freudenthal의 재발명 방법에 기초한 제7차 초등수학교과서 확률 단원 재구성

강 호 진[1] · 강 흥 규[2]

Freudenthal은 수학적 개념을 가장 수학답게 가르치는 것, 그럼으로써 창의성을 기를 수 있게 하는 것은 어떤 수학적 개념이나 원리의 역사적인 수학화 과정을 재현하는 것이 되며, 이러한 역사적인 수학화를 교실에서 재현하는 방법을 '재발명 방법(reinvention method)'이라고 하였다. 이에 본 연구에서는 재발명 방법에 관한 이론들을 종합·분석하여, 효과적인 확률 개념 지도를 위해 제7차 초등 수학 교과서를 재구성해보고, 재구성한 내용을 직접 교수 실험함으로써 그 효과를 검증하고자 한다. 실험에 앞서 문헌 연구를 통해 재발명 방법에 대한 선행 연구를 종합·분석하면서 그와 대비되는 구상화 방법까지 고찰하였다. 현행 제7차 초등 수학 교과서를 면밀히 분석한 결과 현재 수학교과서의 확률 단원은 형식화를 강조하고 있고, 다루고 있는 확률 개념이 한정되어 있으며, 확률을 표현하는 방법 또한 분수로 제한하고 있음을 확인하였다. 이에 다양성과 현실 맥락을 주요 방향으로 하여 확률 단원 전체를 재구성하여 실험반에 적용하였다. 수업 결과 재발명 방법을 통해 학습을 진행하는 것이 학습자의 확률 개념을 형성하는 데 효과적이었으며, 다양한 표현 양식은 학습자의 확률에 대한 이해도를 높일 수 있는 것으로 나타났다.

[주제어] 확률, 재발명 방법, 구상화 방법, 경우의 수, 나뭇가지 그림

Ⅰ. 서 론

확률은 우리가 일상생활에서 충분히 많이 쓰고 있어서 경험적으로 이미 잘 알고 있는 지식처럼 보이지만 실제로는 확률이 갖는 모호성 때문에 쉽게 오류에 빠질 수 있다. 두 개의 주사위를 던졌을 때 (3,4)의 경우와 (4,3)의 경우는 같은 경우일까? 아니면 다른 경우일까? 그리고 확률은 2+3=5처럼 확실한 것이 아니다. 내일 비가 올 확률이 90%라고 할 때, 대부분의 사람들이 비가 올 것으로 생각하고 우산을 준비하겠지만 실제로는 비가 오지 않을 수도 있는 것이다.

초등학교 수학에서는 확률을 <6-나>단계의 '6. 경우의 수' 단원에서 처음 도입하여 <8-나> 단계의 확률을 학습하기 위한 기초를 다지도록 하고 있다. "경우의 수를 이해하고 확률의 의미를 안다"라는 학습 목표를 시작으로 확률을 학습하고 있지만 실제로 우리나라의 학생들은 수학교과의 어느 영역보다도 확률과 통계 영역을 어려워하고 있다(김경옥, 1992). 확률의 모호성과 불확실성의 난점을 극복하지 못하고 개념 이해가 부족한 까

1) [제1저자] 수원 잠원초등학교
2) 공주교육대학교 수학교육과

닭이다.

확률은 전통적으로 불확실성과 모호성, 무작위성 등의 성질 때문에 학습하기 어려운 개념으로 생각되어 왔다. 따라서 학교에서는 확률의 개념 학습보다는 특정 사건의 확률을 구하는 알고리즘을 학습하도록 하고 있다. 그 결과로 학생들은 확률 개념의 이해 부족으로 인해 특정 상황의 확률 값을 구하는데 어려움을 겪거나 실생활에서 확률이 갖는 의미를 제대로 이해하지 못하는 경우가 많다.

이 연구는 이러한 문제점을 바탕으로, Freudenthal의 재발명 방법을 확률 학습에 적용하여 제7차 초등 수학 교과서 확률 단원을 재구성하고, 그 결과를 살펴보고자 한다.

이에 본 연구에서는 확률을 가르치는데 있어 몇 가지 노력해야 할 점을 찾아 개선하고 적용하기 위해 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

가. 현실 맥락을 중시하는 Freudenthal의 재발명 방법을 알아본다.

나. 현재의 교과서가 지나치게 형식화를 강조하고 있다고 보여지는 바, 이를 극복할 수 있는 대안으로서, 재발명 방법에 기초하여 제7차 초등 수학 교과서 확률 단원을 재구성한다.

다. 재구성한 학습지도안을 실험반에 적용하고 그 결과를 양적, 질적 방법으로 분석한다.

Ⅱ. 구상화 방법과 재발명 방법

Freudenthal은 수학적 개념을 가장 수학답게 가르치는 것, 그럼으로써 창의성을 기를 수 있게 하는 것은 어떤 수학적 개념이나 원리의 역사적인 수학화 과정을 재현하는 것이며, 이러한 역사적인 수학화를 교실에서 재현하는 방법을 '재발명 방법(reinvention method)'이라고 하고, 이에 대비되는 형식화와 응용을 강조하는 방법을 ' 구상화 방법(concretization method)'이라고 하였다. 이 장에서는 확률 개념에 적용될 교수학적 원리로서의 재발명 방법과 구상화 방법을 살펴보고자 한다.

1. 구상화 방법

구상화 방법이란 수학을 학습하는데 과거에 완성된 개념이나 알고리즘을 학습하여 다양한 문제 상황에 응용, 적용하면서 수학적 개념의 이해를 추구하는, 전통적으로 우리나라의 수학교육이 채택하고 있는 방법이다. 구상화 방법의 가장 큰 특징은 개념과 원리를 빠르고 강하게 형식화한다는 것인데, 거기에서는 단순한 하나의 사례만 다룬 후 곧바로 완성된 개념이나 원리를 형식화해서 제시한 다음 숙달을 위한 연습을 거치고 마지막으로 적용 문제를 다룬다. 물론 교과서에서는 개념이나 원리를 형식화하기 이전에 '생활에서 알아보기' 를 통해서 의미를 풍부하게 하는 시도를 하고 있지만, 그 맥락이 그리 풍부하지는 못하며 그것을 통해서 개념이나 원리를 이해시키기에는 너무 빈약하다. 따라서 이후의 급격한 형식화에서 의미의 결여가 불가피하게 발생된다. 형식화하고 적용 연습한 다음에는 새로운 영역에 개념과 원리를 응용할 수 있기 위해서는 이미 필요한 만큼 충분히 이해가 성취되어 있어야 함에도 불구하고 그렇지 못한 상태가 된다. 결국 전통적인 방식의 교재에서 개념과 원리의 이해는 형식적인 공식으로 제시되기 이전의 생활에서 알아보기와 사례 들기를 통해서가 아니라 그 이후의 다양한 연습과 응용을 통해서라고 볼 수 있다. 이러한 구상화 방법을 도식화 하면 다음과 같다(강홍규, 2005).

ⅰ) 형식화와 공식화를 통해서 개념이나 원리의 정수(精髓)를 제시
ⅱ) 간단한 사례에 적용 연습함으로써 개념과 원리를 이해
ⅲ) 이해된 개념과 원리를 여러 상황에 응용

구상화 방법이 갖는 가장 큰 장점은 수학에 있어서의 경제성이다. 개념과 원리의 정수를 기호와 상징을 통하여 미리 알려주고 시작하기 때문에 문제를 해결해 나가는 데 있어서 불필요한 시행착오를 줄일 수 있다. 누군가가 미리 겪었던 시행착오를 겪지 않고 효율적이고 경제적으로 지식을 습득하는 것, 이것이 바로 진정한 수학에서의 진보라고 할 수 있을 것이다.

그러나 구상화 방법의 가장 큰 맹점은 창의성을 기를 수 없다는 데 있다. 왜냐하면 이 방법은 학습자가 탐구하기도 전에 미리 개념의 원리나 정수를 제시해주고 시작하기 때문이다. 구상화 방법은 학습에서의 효율성은 획득했을지 몰라도, 지식 교육의 진정한 목표, 즉 사고 결과로써의 지식보다는 그 지식을 사용하고 만들어낸 사고 과정이 더 중요하다는 명제에는 모순이다. 이 방법에서 학생들이 배우는 것은 교사가 건네준 공식을 그대로 적용하는 연습과 그 결과 획득된 기성의 개념과 원리일 뿐, 답이 주어지지 않은 미지의 상태에서 그 답을 치열하게 찾아가는 탐구의 정신은 아닌 것이다.

2. 재발명 방법

구상화 방법과 대비되는 재발명 방법의 가장 큰 특징은 개념·원리 지도의 출발점이 형식화되고 공식화된 기성의 완성물(text)이 아니라 현실 맥락(context)이라는 점이다. 이 현실 맥락은 그 속에 개념과 원리가 '암묵적으로' 녹아있는 풍부한 의미구조를 가지고 있다. 아동은 현실 맥락 문제를 해결하는데 있어서 교사로부터 규격화된 개념과 원리를 건네받지 않고서도, 그 현실상황이 함유하고 있는 풍부한 의미 구조를 바탕으로 비형식적인 전략을 개발하여 스스로 문제를 해결하고, 이 방법을 다양한 현실맥락에 적용시킴으로써 자신의 비형식적인 전략을 점진적으로 세련시켜서, 종국적으로는 교사가 알고 있는 것과 같은 수준의 완전한 개념과 원리에 도달하게 된다(정영옥, 1997: 70).

수학적 사고에는 알고리즘과 같은 사고 패턴과 문제해결 전술·전략이 있다. 그러한 사고 패턴 전술·전략도 알고리즘과 마찬가지로 중요하며 연습되어야 하지만, 너무 일찍 해서는 안되며 학생 스스로 재발명할 수 있을 때까지 가르쳐서는 안 된다. Freudenthal은 교재구성과 함께 현실적인 문제상황을 탐구하여 정리수단인 수학적 아이디어를 직관적으로 발견·발명하여 비형식적으로 다루도록 하고, 이의 점진적인 형식화가 이루어지도록 인도해야 할 것이며, 이를 위해 반성적 사고를 유발하여 사고수준의 비약이 일어나도록 안내해야 할 것으로 본다. 이러한 입장에서 그는 관찰, 인지적 갈등, 토론, 반성을 야기시키는 상호작용과 협동이 보다 효율적으로 이루어질 수 있도록 하기위해서 이질적인 학급편성을 하고, 학습된 내용을 새로운 문맥에서 반성하고 횡적·종적으로 비교하고 통합하는 회고학습을 할 기회를 충분히 제공하는 것이 바람직함을 강조하고 있다(김성여, 2003: 21).

학생이 하나의 현실 맥락으로부터 비형식적인 전략을 개발하고 그에 따라 주어진 문제를 성공적으로 해결한다면 교사는 아동의 그러한 비형식적 전략을 조기에 형식화시키고 공식화시키려는 유혹을 받기 쉽다. 그러나 학생은 그 속에 내포된 개념과 원리를 무의식적으로 사용할 뿐 아직 명확히 의식하고 있다고 볼 수 없다. 재발명 방법에서는 학생의 비형식적 방법을 쉽사리 형식화해서 명시적으로 드러내려 하지 않으며, 대신에 그러한 방

법을 다양한 현실상황에서 반복적으로 적용하게 함으로써 아동이 충분히 익숙해 질 때까지 기다린다. 이러한 측면은 간단한 사례를 통해서 개념과 원리를 급격하게 공식화시킨 다음 서둘러 형식적인 연습으로 진행하는 전통적인 개념 지도 방법과 크게 대비된다.

재발명 방법에서 개념과 원리를 지도하는 과정을 도식화하면 다음과 같다(강흥규, 2005).

i) 현실맥락(context) 제시
ii) 학생 스스로 비형식적인 문제해결 방법 고안
iii) 이 방법을 다양한 현실맥락에 적용
iv) 충분히 무르익었을 때 점진적으로 압축시키고 형식화

그러나 재발명 방법을 수업에서 실행하기 어려운 이유는 재발명의 기반이 되는 현실맥락을 구성할 때 그 속에 풍부한 의미 구조를 부여하는 일이 교사들에게 큰 부담이 되기 때문이다. 또한 학습 시간이 많이 필요하다는 것도 또 다른 어려움이기도 하다. 그러나 일단 잘 구현된 현실 맥락이 제공되고 그 속에서 학생들의 자발적인 탐구가 원만히 진행된다면 학생의 탐구력을 증진 시키고 이해를 높이는데 더할 나위없는 효과가 있을 것이다.

Ⅲ. 교과서 분석

1. 교과서 분석의 준거

재발명 방법을 통한 확률 개념 지도를 위해 선행되어야 할 부분은 교과서 분석이다. 따라서 이 장에서는 현행 초등학교 6학년 교과서의 확률 영역을 아래의 네 가지 준거에 의해 분석해보고 시사점을 도출해보고자 한다.

첫째, 7차 초등 수학교과서의 확률 단원의 구성 형식과 각각의 내용 그리고 각 차시에서 사용하는 주된 개념은 무엇인지 살펴보고자 한다. 이에 각 차시의 내용 및 핵심 개념은 무엇인지 알아보는 것을 교과서 분석의 첫 번째 목표로 삼았다.

둘째, 재발명 방법의 근간이 되는 현실 맥락을 교과서가 얼마나 따르고 있는지 살펴보고자 한다.

셋째, 확률 단원에서 얼마나 형식화를 강조하고 있는지 살펴보고자 한다.

넷째, 확률을 어떤 표현양식으로 나타내고 있는지 살펴보고자 한다.

2. 교과서 분석 내용

초등 수학 교과에서 확률 영역은 <6-나> 6. 경우의 수 단원에서만 제시되고 있다. <6-나> 6. 경우의 수 단원의 주된 내용은 어떤 일이 일어날 수 있는 경우의 수의 의미를 알아보고, 여러 가지 경우의 수를 구해보게 하는 것이다. 특히 순서가 다른 짝짓기의 방법이나 나뭇가지 그림을 그리는 방법을 통해 경우의 수를 구하도록 하고 있는데 이는 8-나 단계에서 공부할 확률의 기초를 이룬다. 이러한 초등 수학 교과서의 확률 단원을 앞서 제시한 네 가지 준거에 의해 분석해 보도록 하겠다.

가. 확률개념

위와 같은 준거로 교과서를 분석해 본 결과 초등 수학교과서의 확률 단원은 경우의 수 개념이 확률 개념보다 먼저 제시되어 있음을 알 수 있다. 경우의 수 개념과 확률 개념은 떨어질 수 없는 불가분의 관계이지만 확률을 $(\text{확률}) = \dfrac{(\text{부분경우의수})}{(\text{전체경우의수})}$ 로 정의하는 우리나라 교과서에서 경우의 수 개념은 확률을 구하기 위한 일종의 보조 개념이라고 할 수 있다. 주 개념인 확률 개념을 먼저 제시 할 것인가, 보조 개념인 경우의 수 개념을 먼저 제시할 것인가의 의견이 분분하겠지만 Freudenthal의 재발명 방법을 근간으로 하고 있는 미국의 교과서 'Mathematics in Context'[3]의 경우 확률 개념을 먼저 제시하고 경우의 수 개념을 나중에 제시하고 있다. 그 이유는 재발명 방법이 확률의 계산 보다는 확률 직관의 형성을 우선시 하므로, 형식화의 근간이 되는 경우의 수 이론을 먼저 다루는 것은 확률 직관 형성을 방해할 수 있다고 보기 때문이다.

또 확률 단원은 심화 보충 차시를 제외하면 전체 6차시로 구성되어 있는데 1~5차시까지 경우의 수 개념이 다루어져 있어 확률 개념보다 경우의 수 개념이 훨씬 더 큰 비중을 차지하고 있다는 것을 알 수 있다. <6-나> 6. 경우의 수 단원이 <8-나> 단계에서 공부하게 될 확률의 기초적 지식을 구성하는 단계라고는 하지만 학생들이 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 확률 개념과의 결합이 없이 무턱대고 구해보라는 식의 여러 가지 경우의 수를 구하는 방법들은 확률 영역을 학습하는 학생들에게 문제 해결의 동기 부여를 해주기 어려울 뿐만 아니라, 확률 개념과 경우의 수 개념이 유기적으로 연결되어 있다는 인식을 심어주기 어렵다.

나. 현실맥락

우리나라 초등 수학 교과서는 개념학습을 위해 매 차시 가장 첫 번째 활동으로 현실 맥락적 요소인 '생활에서 알아보기'를 제시하고 있다. 매 개념 학습마다 생활에서 알아보기를 통해 의미를 풍부하게 하려는 시도를 하고 있긴 하지만 그 의미가 그리 풍부하지 못하고 그 뒤에 이어지는 활동 문제 또한 단편적인 물음에 대한 간단한 답변하기로 이루어져 있어서 풍부한 현실 맥락을 갖췄다고 보기 어렵다. 그리고 곧바로 약속하기를 통해 급격한 형식화를 시도하고 있어서 개념학습이 어렵고 학생들의 창의성을 기르는데 어려움이 있다.

다. 형식화

확률은 6차시에 처음 다루어지고 있다. 언뜻 보면 '생활에서 알아보기'를 시작으로 다양한 현실맥락을 통해 확률 개념을 형식화 하는 것처럼 보이지만 활동과 익히기 문제는 경험적 확률을 통해 확률 개념을 인지할 수 있도록 하는 보조수단이고, 부분 경우의 수 $(\text{확률}) = \dfrac{(\text{부분경우의수})}{(\text{전체경우의수})}$ 의 알고리즘으로 쉽게 형식화 할 수 있는 확률 개념인 이론적 확률로 이끌기 위한 발판에 불과하다. 이를 반증이라도 하듯 확률 개념을 형식화한 이후 그 뒤로 다양한 상황에 적용·응용하는 과정에서 경험적 확률을 단 한 번도 다루지 않았다.

3) 이후부터는 'MiC 교과서'라고 부를 것이다.

앞 차시의 경우의 수 개념을 형식화하는 과정에서도 단 한 가지 활동을 통해 형식화하고, 이후에 형식화된 개념을 고착화하는 적용·응용 과정에 더 많은 시간을 투자하였다.

라. 표현방법

7차 교과서에서는 확률을 표현하는 방법으로 분수만을 사용하고 있다. 그러나 우리 실생활에서 확률을 표현하는 방법은 매우 다양하다. 예를 들어 살펴보면, 로또 복권 1장을 샀을 때 1등에 당첨될 확률은 1/8140000이고, 저녁 9시 뉴스의 일기예보에서 알려주는 내일의 비올 확률은 60%이다. 그리고 올림픽에서 우리나라 축구 대표팀이 일본을 이길 확률은 7:3이라고 한다. 물론 이외에도 확률을 표현하는 방법은 다양하다. 그러나 교과서에서는 확률을 분수로만 계산하도록 하고 있어 현실을 제대로 반영하지 못하고 있다는 느낌이 든다. 또 보조 교과서인 수학 익힘책에서는 문제를 푸는 과정을 쓰는 공란을 분수의 모양과 비슷한 네모칸으로 처리함으로써 다른 표현방법으로의 접근을 시도하는 것조차 어렵게 만들고, 오직 분수로만 확률을 표현하는 학습을 더욱 강화하고 있다.

Ⅳ. 교수 실험

이 장에서는 재발명 방법에 기초하여 재구성한 내용을 토대로 수업을 진행하기 위해 구체적인 연구 방법 및 절차를 확인해 보고 교수 학습 과정안을 작성해 보았다. 교수 실험은 절차에 따라 비교반 선정 그리고 예비수업과 본 수업으로 나누어 진행하였으며 그 과정은 다음의 표와 같다.

[표 1] 비교반 선정 및 교수 실험 과정

기 간	과 정	내 용
07년 10월 4주	사전검사	2학기 중간고사 수학 시험을 사전검사로 대체
07년 11월 1주	실험반 비교반 선정	실험반(6반)을 선택한 후 SPSS를 통해 실험반과 가장 유사한 비교반(5반) 선정
07년 11월 3주	예비수업	재구성한 내용을 예비로 4반에 적용
07년 11월 4주	지도안 수정	예비수업을 바탕으로 지도안 및 학습지 수정
07년 11월 5주	본 수업	총6차시로 완성된 지도안으로 수업
07년 12월 1주	사후검사	계산평가와 수행평가로 나누어 사후검사 실시

1. 실험반과 비교반 선정

실험반을 선정하는 데 가장 중요한 것은 선수학습이 덜 된 학급을 선택하는 것이었으나, 대다수의 학생들이 선수학습을 마친 상태여서 아무래도 학습 성취 수준이 낮은 학급을 선택할 수밖에 없었다. 학습 성취 수준이 낮은 학생들은 기존에 선수 학습 했던 내용들을 완벽히 기억하고 있지 않기 때문에, 단순 알고리즘 적용이 아닌 스스로의 탐구과정을 통해 문제를 해결해 나갈 것이라고 판단했기 때문이다. 실험반으로 선택한 6학년 6반을 선택하여, 남자 20명, 여자 18명으로 남자와 여자가 8~10명으로 구성된 4개 분단으

로 구성하였다. 이 학급은 그 동안 실시했던 분기별 중간, 기말 고사에서 수학 학습 성취도가 하위 수준을 보였고, 수학 수업에 대한 흥미 또한 부족하였다. 높은 이해력을 요구하는 확률 영역을 학습하는데 이해하기 쉬운 현실맥락에서 접근하여 해결 전략을 스스로 수립하는 재발명 방법을 적용하는 것이 좋을 것으로 판단되어 실험반으로 선정하게 되었다.

비교반은 1학기 중간고사와 기말고사 수학 성적을 토대로 실험반과 유사한 평균 점수를 보이는 3개반을 선정한 뒤, 별도의 사전검사를 실시하지 않고 2학기 중간고사 수학성적을 사전검사로 하여 6반과 가장 동질적인 반을 선택한 결과 5반이 선택되었다. 통계처리 프로그램인 SPSS에서 독립표본 t-검정을 통해서 6반과 5반의 2학기 중간고사의 총점을 비교한 결과 6반(M=59.19, SD=14.23)이 5반(M=62.58, SD=17.48)보다 평균이 3.39점 낮았으나, 이는 통계적으로 유의하지 않았다($t(70)=-0.902$, $p>0.05$). 선정된 비교반은 현행 교육과정에 충실하게 지도할 수 있도록 사전 협조하였다.

[표 2] 두 집단 (5반, 6반)의 2학기 중간고사에 대한 집단통계량

	학급	N	평균	표준편차	평균의 표준오차
2학기 중간고사	6	36	59.19	14.23	2.37
	5	36	62.58	17.48	2.91

[표 3] 두 집단 (5반, 6반)의 2학기 중간고사에 대한 독립표본 검정

변수	학급	n	M	SD	t	p
2학기 중간고사	6반	36	59.19	14.23	−0.902	0.370
	5반	36	62.58	17.48		

2. 교과서 재구성의 방향

본 연구에서는 재발명 방법을 근간으로 하여 다음과 같은 방향으로 교과서를 재구성 하고자 한다.

첫째, 현실맥락을 풍부히 제시하여 다양한 상황에서 확률 개념을 학습할 수 있도록 한다. 수학 교과서 <6-나>단계 6. 경우의 수 단원에서는 여러 가지 상황을 제시하고는 있지만 수학적 논의가 불필요한 간단한 상황이 많이 제시되고 있어 문제를 재해석 하거나 실생활과 연결시켜 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하고 있지 않다. 교사용 지도서에서는 우리 생활에서 경우의 수와 확률이 사용되는 예를 다양하게 찾아보도록 지도하고, 뉴스나 신문 또는 일상적인 대화에서 경우의 수나 확률이란 단어가 사용된 경우를 찾아보고, 경우의 수와 확률이 의미하는 바를 학생들 나름대로 설명해 보게 하여 경우의 수와 확률의 학습을 하도록 되어 있긴 하지만 정작 교과서에서는 실생활과 접목하여 확률의 수학적 개념화를 꾀하는 내용은 많지 않고, 단원의 마지막 부분에 '실생활에 적용하여 봅시다.' 부분을 통해 실생활과 연관 지으려고 시도하고 있을 뿐이다. 그러나 그마저도 앞에서 배웠던 순서에 따른 짝짓기 방법을 통해 경우의 수를 알아보는 절차적 지식의 다지기 수준에 머무르고 있다.

둘째, 실생활에서 경험할 수 있는 다양한 확률 개념을 학습하도록 해야 한다. 확률에 대해 학습하지 않은 어린이들도 유리/불리나 우연의 개념에 대해 어느 정도 이해하고 있다.

만약 어느 한 가지를 결정해야 하는 상황에서 만약 공정하지 못한 방법으로 결정하려고 한다면 많은 수의 학생들이 반대를 하는 모습은 우리가 현장에서 쉽게 경험할 수 있는 일이다. 이렇듯 학생들이 가지고 있는 비형식화 된 확률 개념들을 체계적으로 가르쳐 확률에 대한 올바른 이해를 심어줄 수 있도록 해야 한다. 그러나 현행 7차 초등 수학 교과서의 확률 단원에서는 경우의 수 개념과 확률 개념만을 다루고 있어 확률을 학습하는 기초를 제공해야하는 초등 수학 교과서가 다양한 확률 개념을 포함하지 못하고 있어 확률의 본질을 이해할 수 있는 다양한 개념을 심어주는데 부족함이 있다.

셋째, 확률도 일종의 측정으로써 정확한 양적 비교가 이루어지기 전에 질적 비교가 선행되어야 한다. 어떤 직관과 감각을 먼저 형성한 후 수치 계산을 해야 하는데, 이것은 수 감각을 먼저 익힌 후 수 개념과 수 계산을 나중에 하는 것과 유사하다. 다시 말해 확률도 다른 수 개념과 마찬가지로 어림하기가 가능하다는 것이다. 그러나 현재 우리 교과서는 확률을 도입 시작과 동시에 $(\text{확률}) = \dfrac{(\text{부분 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$ 의 알고리즘을 통해 곧바로 수치 계산에 들어가고 있다.

넷째, 확률을 표현하는 방법을 다양하게 해야 한다. 확률 개념은 다른 수학적 개념들과 달리 확률 그 자체로써 다양한 해석이 가능하다. 확률에 대한 이해가 어느 한 쪽으로 치우치는 순간, 확률 속에 내재되어 있는 다른 면을 보지 못하고 오직 자신이 생각하는 개념 속에서 무한한 패러독스에 빠질 수 있다. 따라서 확률 개념의 다양화와 함께 확률 표현 양식 또한 어느 한 쪽으로 치우침이 없이 다양하게 표현되어야 할 것이다. 그러나 교과서에서는 확률을 분수라는 한 가지 방법으로만 표현하도록 강요하고 있어 오히려 다양한 사고를 하는데 방해가 되고 있다.

다섯째, 경우의 수 개념보다 확률 개념을 먼저 제시해야 한다. Freudenthal의 재발명 방법은 어떤 수학적 개념이나 원리가 수학화 되는 과정을 다시 학습자 스스로 재현하는 것이다. 이 방법의 가장 큰 특징은 개념·원리 지도의 출발점이 형식화 되고 공식화 된 기성의 완성물(text)이 아니라 현실맥락(context)라는 점이다. 확률 개념과 경우의 수 개념의 수학화 과정을 살펴보자. 확률을 구하기 위해서 경우의 수 개념을 도입하였고, 그리하여 $(\text{확률}) = \dfrac{(\text{부분 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$라는 알고리즘을 만들어 낸 것이다. 그래서 현재 교과서는 이미 만들어진 $(\text{확률}) = \dfrac{(\text{부분 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$라는 기성의 완성물(text)를 사용하기 위해서 필요한 경우의 수 개념을 먼저 도입하고 있지만 본 논문에서는 확률 개념을 제시하고 난 뒤 경우의 수 개념을 도입하려 한다.

여섯째, 형식화 과정을 학습의 맨 나중에 구성한다. 현재 우리나라 교과서는 형식화하기 가장 알맞은 형태의 간단한 사례를 통해 곧바로 형식화 하고, 그 다음 다양한 문제에 형식화 된 공식이나 알고리즘을 적용하는 구성을 취하고 있다. 그러나 이 방법은 학습자가 쉽게 개념이나 원리의 핵심에 다가갈 수 있다는 장점이 있지만 그 만큼 창의성을 기르기 어렵다는 단점이 있다. 따라서 학습자 스스로 문제를 탐구하고 충분한 개념이해를 바탕으로 스스로 방법을 발명해 낸 다음 형식화를 시도해야 한다.

3. 재구성의 구체적 내용

확률은 어떤 사건이 일어날 가능성을 수치로 나타낸 것으로서, 수학적 정의는 전체와 부분 사이의 비이다. 이 비 값은 분수, 백분율, 소수 등 여러 가지로 표현될 수 있다. 따라

서 제7차 초등 수학 교과서 확률 단원을 재구성할 때, 다양한 표현 방식을 사용하는 것과, 편협한 소재에서 벗어나 가급적이면 실생활에서 많이 겪어보고 사용 가능한 많은 소재들을 통해 확률 개념을 이해할 수 있도록 하는 것을 주요 내용으로 하였다. 본 장에서는 이러한 확률 개념을 아동이 스스로 재발명하는 것을 도와줄 수 있도록 재구성한 구체적 내용을 살펴보고자 한다.

가. 1차시 ; 공정성과 가능성 이해하기

1차시에서는 확률도 일종의 측정으로 보고 양의 비교에 앞서 질적 비교를 통해 각 상황의 유리 / 불리 / 공정을 판별하고 각각의 개념을 학습하도록 하였다. 1차시에 사용한 학습지의 각 문항들은 전체 경우의 수가 같은 것들로 구성을 하였다. 그래서 전체 경우의 수는 비교하지 않고, 비교 상황에 비해 특정 사건이 일어날 경우의 수가 큰 경우 더 유리한 것으로 인식할 수 있도록 하였다. 그러나 이후에 배우게 될 전체 경우의 수가 다른 상황에서는 특정 사건이 일어날 경우의 수가 크다는 것이 언제나 가능성이 높다는 것을 의미하는 것은 아니기에 (특정 경우의 수가 많은 것)=(가능성이 높은 것)으로 형식화 하지는 않았다. 그리고 이후 유리하다는 말은 수학적으로 가능성이 높다라는 말로, 불리하다, 공정하다라는 말은 각각 가능성이 낮다, 가능성이 같다라는 것으로 용어를 바꾸어 사용할 수 있도록 해서 다음 차시에서 배우게 될 가능성 사다리와 연계될 수 있도록 하였다.

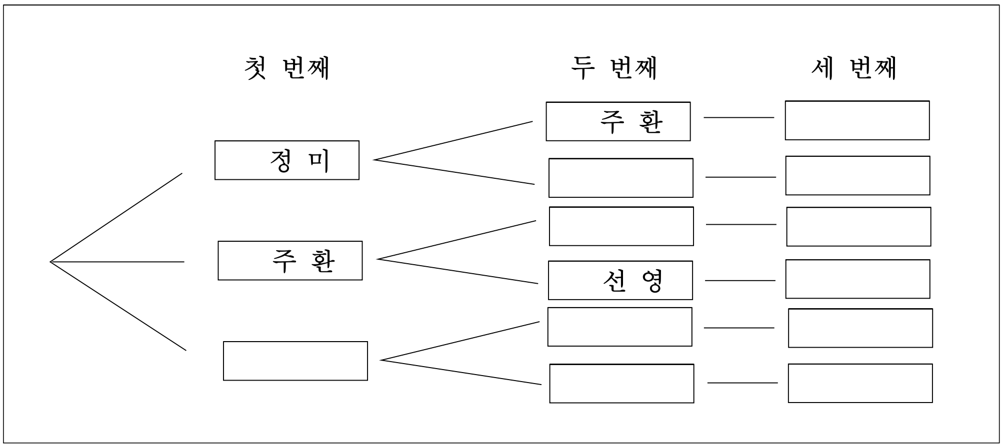
나. 2차시 ; 가능성을 사다리에 표시하기

2차시는 어떤 사건의 일어날 가능성을 사다리[4)]에 직관적으로 표시하는 활동에서부터 시작하였다. 이번 활동 역시 양적 비교는 하지 않은 채 질적 비교만을 통해 “반드시 일어나는 사건”은 사다리의 제일 위칸에, “절대 일어나지 않는 사건”은 사다리의 제일 아래칸에, 그리고 “일어날 수도 있고 그렇지 않을 수도 있는 사건”은 사다리의 중간에 표시하도록 했다. 사다리에 가능성을 표시하는 첫 번째 활동은 확률이라는 양의 직관이 형성되는 단계로서, 상대적인 크고 작음만을 구별할 뿐, 수치화되지는 않는 단계이다. 그래서 사다리를 10칸(암묵적으로 한 칸은 10%를 의미한다.)으로 제시할 뿐 수치화된 확률은 표시하지 않고 활동하도록 하였다. 사다리에 가능성을 표시하는 두 번째 활동은 이렇게 형성된 확률 양감을 백분율(이미 학습하였음)과 연계시키는 단계이다. 반드시 일어나는 사건의 가능성을 100%, 절대 일어나지 않는 사건의 가능성을 0%, 일어날 수도 일어나지도 않을 수도 있는 사건의 가능성을 0%~100%라고 나타내기로 하고, 바로 이전에 가능성을 직관적으로 사다리에 표시했던 사건들에 대해서 백분율 값으로 변환하게 하였다. 이 때 백분율 값은 명확한 계산으로 변환하는 것이 아니다. 첫 단계는 “전체 ~개 가운데 ~개”라는 비율 표현을 스스로 발명하도록 하는 단계이다. 이것은 이전 단계에서 사다리와 백분율을 연계시킨 것을 바탕으로, 수치가 주어진 활동–예를 들면 1부터 100까지 씌어진 숫자카드가 들어있는 주머니에서 하나를 뽑는 경우–을 접하면서부터 이루어질 수 있다. 100개 중에 30개를 뽑게 되었다면 그 사건은 전체 100개 가운데 30개 이므로 확률은 곧 30%가 된다. 이렇게 확률을 비형식적인 비율 표현으로 나타내게 하는 전략은 다음 차시에서 이론적 확률과 경험적 확률을 연관시키는데 핵심 전략이 된다.

4) 가능성 사다리(chance ladder)는 MiC 교재에서 차용하였다.(V., Jonker, F., van Galen, N., Boswinkel & M., Wijers: 1997)

다. 3, 4차시 ; 나뭇가지 그림으로 경우의 수 파악하기

3차시와 4차시에서는 앞서 배운 비형식적인 비율 표현을 통해 경우의 수를 자연스럽게 도입하려고 하였다. 비형식적인 비율 표현으로 확률을 나타내기 위해서는 전체 경우의 수와 그 사건이 일어날 경우의 수를 반드시 구해야하는데 이를 통해 자연스럽게 전체 경우의 수와 특정 경우의 수를 구하도록 유도했다. 전체 경우의 수는 교과에서도 다루고 있는 나뭇가지 그림을 통해 실수로 몇 가지의 경우의 수를 빠트리는 실수가 없도록 했다. 나뭇가지 그림을 도입하는데 있어서 교과서와 약간의 차별을 두었는데 나뭇가지 그림을 처음 가지부터 그리도록 지도했다는 점이다. 교과서에서는 처음의 가지를 그리지 않고 첫 번째 경우 이후에 가지를 그리도록 했는데 이는 곱의 법칙을 형식화하는데 적합하지 않아 첫 번째 가지부터 정확하게 그릴 수 있도록 지도했다.



<그림 1> 재구성한 내용의 나뭇가지 그림

교과서는 첫 번째 가짓수부터 내림차순의 곱으로 정의되는 곱의 법칙을 형식화 하지 않았기 때문에 위와 같은 방법(첫번째 가지가 그려지지 않은)으로 지도하지만 이 방법은 학생들에게 첫 번째 가지에서 출발하는 모든 경우의 수(2×1)에 처음의 가짓수인 3을 곱해서 전체 경우의 수(6)을 구하는 전략을 갖게 할 수 있다. 이는 첫 번째 상황의 모든 경우의 수를 구해야만 하는데, 그러기 위해서는 반드시 나뭇가지 그림을 그려야만 하는 문제가 따른다. 그러나 재구성한 내용의 나뭇가지 그림을 통해 곱의 법칙을 유도한다면 학생들이 이해를 하는데 더욱 좋다. 첫 번째 가지가 3개이고, 두 번째 가지가 2개, 마지막인 세 번째 가지가 1개이므로 전체 경우의 수는 3×2×1이다. 결국 다시 나뭇가지 그림을 그리지 않고서도 첫 번째 나올 수 있는 가짓수, 두 번째, 세 번째를 내림차순의 곱으로 쉽게 구할 수 있는 것이다. 이렇게 3, 4차시에서는 위와 같은 나뭇가지 그림을 통해서 곱의 법칙을 형식화 하고자 하였다.

또 비형식적인 비율 표현을 통해 반복 실행 상황에서 특정 사건이 일어나는 경우의 수를 구하도록 하였다. 만약 내가 어떤 게임에서 이길 확률을 비형식적인 비율 표현으로 전체 12 가운데 5라고 나타냈다면, 내가 그 게임을 36번 한다고 할 때 확률 전체 12 가운데 5는 전체 36 가운데 15라고 나타낼 수 있으므로 대략 15번 정도 이기게 될 것이라고 할 수 있다. 이렇게 3~4차시에서는 전체 경우의 수와 특정 경우의 수의 개념을 비형식적

인 비율 표현을 통해 알아보고 다음에 배우게 될 확률 개념의 기초를 다지도록 하였다.

라. 5차시 ; 확률을 분수로 표현하기

5차시에서는 확률의 형식화를 시도하였다. 전체 경우의 수가 다른 상황으로 학습지의 문항들을 구성하여 단순 수치 비교만으로는 두 가지 상황의 일어날 확률 비교를 할 수 없도록 하였다. 결국 정확한 비교라는 측면에서 분수 표현 양식을 사용하도록 유도하였으며, $(\text{확률}) = \dfrac{(\text{부분경우의수})}{(\text{전체경우의수})}$ 의 알고리즘으로 확률을 형식화 하였다.

마. 6차시 ; 여러 가지 상황에서의 확률 알아보기

마지막 6차시에서는 복잡한 상황(순열, 조합)에서의 확률을 나뭇가지 그림과 구조도를 통해 구하도록 하였고, 지금까지 배웠던 경우의 수 개념과 확률 개념을 고착화할 수 있도록 하였다. 그리고 모든 차시의 문항들은 학습 단계를 고려하여 경우의 수가 간단한 동전 1개를 던지는 상황(전체 경우의 수가 2개)에서 경우의 수가 복잡한 상황(전체 경우의 수가 36개)으로 순차적으로 구성하였으며, 6차시의 경우 순열 2문항, 조합 2문항으로 구성하였다. 아래의 표는 재구성한 내용을 주제, 표현양식, 주요개념, 보조개념의 기준으로 분석한 것이다.

[표 4] 각 차시별로 재구성한 내용

차시	주 제	표현양식	주요개념	보조개념
1	공정성, 가능성 이해하기	-	가능성	유리/불리, 공정성
2	가능성을 사다리에 표시하기	사다리, 백분율, 비형식적 비율 표현	가능성	
3~4	나뭇가지 그림으로 경우의 수 파악하기	비형식적 비율 표현	가능성	나뭇가지 그림 경우의 수
5	확률을 분수로 표현하기	분수	확률	
6	여러 가지 상황에서의 확률 알아보기	분수	확률	

4. 교수학습 과정안

다음은 본 수업 중 재발명 방법으로 재구성한 수업의 교수-학습 과정안(1차시)이다.

<table>
<tr><td>학습주제</td><td colspan="2">공정성, 가능성 이해하기</td><td>차시</td><td>1/6</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="4">어떤 상황의 유리 / 공정 / 불리를 판별하고 그 근거를 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">수업단계</td><td colspan="3">교수-학습 활동</td><td rowspan="2">비고</td></tr>
<tr><td>교사</td><td colspan="2">학생</td></tr>
<tr><td>현실맥락</td><td>■ 학습지 1의 1번 문제
- 어떤 상황을 공정하게 결정하는 회전판을 여러분이 원하는 모양으로 색칠해보세요.</td><td colspan="2">- 다양한 모양의 회전판을 그리고 색칠하기</td><td></td></tr>
</table>

	- 여러분이 색칠한 회전판은 어떤 특징을 가지고 있나요?	- 색칠한 곳과 색칠하지 않은 곳의 개수가 같습니다.	
비형식적 방법 고안	■ 학습지 1의 2번 문제 - 아버지가 제안한 방법은 공정한가요? - 공정하다고 생각하는 이유를 설명해보세요.	- 공정하다고 생각합니다. - 아버지가 선택한 동전의 면과, 내가 선택한 동전의 면의 가짓수가 각각 2개씩으로 같기 때문입니다.	
다양한 현실맥락에 적용	■ 학습지 1의 3번 문제 - 공정하게 결정하는 상황을 제시해보세요.	- 공정하게 결정하는 상황 제시하기	결정방법이 공정하면 모두 정답 인정
	■ 학습지 1의 4번 문제 - 누가 이겼을까요? - 그 이유는 무엇일까요?	- 철수입니다. - 검은색의 바둑알이 더 많기 때문입니다.	
	■ 학습지 1의 5번 문제 - 어느 게임판이 더 유리할까요? - 그 이유는 무엇일까요?	- (가)입니다. - 검은 타일판의 개수가 더 많기 때문입니다.	
	■ 학습지 1의 6번 문제 - 주사위 던지기 놀이를 해봅시다. - 누가 유리하다고 생각합니까? - 그 이유는 무엇입니까? - 실제로 그렇습니까?	- 주사위 던지기 놀이하기 - 2의 배수가 유리합니다. - 주사위에서 2의 배수가 나오는 가짓수가 더 많기 때문입니다. - 그렇지 않은 경우도 있었습니다.	3의 배수가 이기는 경우도 있지만 가짓수가 더 많은 2의 배수가 유리함을 인식시킨다.
형식화	■ 학습지 1의 7번 문제 - 누가 가장 유리한가요? - 그 이유는 무엇입니까? - '유리하다'라는 말은 어떻게 바꿔 쓸 수 있습니까?	- 명호입니다. - 나올 수 있는 가짓수는 홀수가 제일 많기 때문입니다. - '가능성이 높다'라는 말로 바꿔 쓸 수 있습니다.	
	공정하다. : 가능성이 같다. **유리하다. : 가능성이 높다.** **불리하다. : 가능성이 낮다.**		

5. 사후 검사

실험 분석은 회수한 학습지를 토대로 사용한 해결 방안, 선호 표현 양식, 가지고 있는 오개념 등을 파악하였고, 학습자의 상호 반응을 분석하기 위해 녹화한 비디오를 확인 분석하였다. 그리고 모든 수업이 끝난 후에 양적 계산 평가지와 질적 수행 평가지, 두 가지의 평가지를 양쪽 반에 모두 투여하여 학습 성취 수준을 파악하였다.

양적 계산 평가지는 학습자가 확률을 계산 하는 능력이 얼마나 향상되었는지를 파악하는 평가지로써, 확률 내용의 형식화가 얼마나 잘 형성되어 있는지를 파악하고자 하였다. 문제는 알고리즘에 의한 계산문제 12문제(부분문제 포함 13문제)를 사용했으며, 각각의

문제에는 풀이과정을 적도록 하여, 학습자가 스스로 확률에 대해 어떻게 형식화하고 있는지 살펴볼 수 있도록 하였다. 질적 수행 평가지는 계산 위주의 문제 보다는 확률의 의미와 개념에 초점을 맞추어 문제를 해결하는 능력을 파악하는 문제를 사용하였다. 문제는 전체에 대한 부분의 비, 경험적 확률과 수학적 확률의 연결, 경우의 수의 동일성, 순열, 조합 등의 9문제(부분문제 포함 19문제)를 사용하였으며, 가장 첫 번째 문제로는 답을 구하는 문제가 아닌 학습자의 확률 표현 양식 선호도를 알아볼 수 있는 문제를 사용하였다.

[표 5] 사후 검사지의 구성체제와 문항별 내용

<table>
<tr><th>문항</th><th>양적 계산 평가지</th><th colspan="2">질적 수행 평가지</th></tr>
<tr><td>1</td><td>단일사건의 확률
(바둑알)</td><td colspan="2">확률 표현 양식의 선호도</td></tr>
<tr><td>2</td><td>단일사건의 확률
(10장의 숫자 카드)</td><td colspan="2">근원사건의 동일성</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">복합사건의 확률
(서로 다른 동전 2개)</td><td>(1)</td><td>비율과 확률과의 연결
(구획된 원)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>비율과 확률과의 연결
(구획되지 않은 원)</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>비율과 확률과의 연결
(구획되지 않은 사각형)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>복합사건의 확률
(동전1개, 주사위 1개)</td><td colspan="2">전체 경우의 수가 다른 두 사건의 확률 비교</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td rowspan="4">복합사건의 확률
(서로 다른 동전 3개)</td><td>(1)</td><td>수학적 확률과 경험적 확률의 연결</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>수학적 확률과 경험적 확률의 연결</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>수학적 확률과 경험적 확률의 연결</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>수학적 확률과 경험적 확률의 연결
(근원사건의 동일성에 대한 이해)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">복합사건의 확률
(서로 다른 주사위 2개)</td><td>(1)</td><td>나뭇가지 그림 그리기</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>나뭇가지 그림의 공식화</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7</td><td rowspan="2">순서가 있는 경우의 수에 대한 확률</td><td>(1)</td><td>복잡한 상황의 나뭇가지 그림 그리기</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>나뭇가지 그림의 공식화</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">순서에 따른 짝짓기 방법의 경우의 수</td><td>(1)</td><td>순열 상황의 나뭇가지 그림 그리기</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>나뭇가지 그림의 공식화</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9</td><td rowspan="2">순서가 있는 경우의 수에 대한 확률</td><td>(1)</td><td>조합 상황의 구조도 그리기</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>구조도의 공식화</td></tr>
<tr><td>10</td><td>조합 상황의 확률</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>11</td><td>조합 상황의 확률</td></tr>
<tr><td rowspan="2">12</td><td colspan="3">(1) 수학적 확률과 경험적 확률의 연결(단일사건)</td></tr>
<tr><td colspan="3">(2) 수학적 확률과 경험적 확률의 연결(복합사건)</td></tr>
</table>

양적 계산 평가지와 질적 수행 평가지 모두 실험반과 비교반에 동일하게 적용될 수 있는 문제들로 구성하려고 하였다. 실험반은 다양한 소재를 가지고 확률을 학습하였기 때문에, 실험반에서만 다루었던 소재를 통해 실험 결과가 실험반에게만 긍정적으로만 작용하는 것을 방지할 필요가 있었다. 따라서 각각의 평가지는 가능한 수학 교과서와 보조교과서인 수학 익힘책의 문제들을 활용하거나, 그 소재가 교과서를 벗어나지 않는 범위 내에서 평가문제를 만들어서 실험반과 비교반의 처치 결과를 객관적으로 비교할 수 있도록 하였다.

Ⅴ. 결과 분석

1. 정량적 결과분석

본 연구에서는 공분산분석(ANCOVA)을 사용하여 실험반과 비교반이 사후평가에서 어떤 차이를 보이는지 알아보았다. 공분산분석은 사후평가 점수 자체를 비교하지 않으며, 대신 사전평가에서의 점수차를 감안하여 사후평가의 점수를 교정하여 비교하였다.

각 학급별 2학기 중간고사와 사후계산평가의 평균과 표준편차 그리고 표본의 크기는 다음의 [표 6]과 같았다. 그리고 이들 자료를 2학기 중간고사를 공변수, 학급을 독립변수, 그리고 사후계산평가를 종속변수로 한 공분산 분석한 분석표는 [표 7]과 같았다. 먼저 공변수인 2학기 중간고사의 효과는 유의하였다($F(1,70)=36.878$, $p=.000$). 그리고 2학기 중간고사를 통제했을 때 수업방법에 따른 두 학급간의 사후계산평가 점수의 조정평균에도 유의한 차이가 있었다($F(1,70)=4.729$, $p=.033$).

[표 6] 각 학급별 2학기 중간고사와 사후계산평가의 평균과 표준편차

	2_중간(X)		사후계산평가(Y)		표본의 크기
학급	평균	표준편차	평균	표준편차	
6	59.19	14.23	7.56	3.476	36
5	62.58	17.48	6.51	3.469	37
전체	60.89	15.92	7.03	3.488	73

[표 7] 사후계산평가를 종속변수로 한 공분산 분석

분산원	제곱합(SS)	자유도(df)	평균제곱 (MS)	F	p
모형	315.219	2	157.610	19.676	.000
2학기중간	295.406	1	295.406	36.878	.000
학급	37.879	1	37.879	4.729	.033
오차	560.726	70	8.010		
전체	4481.000	73			

각 학급별 2학기 중간고사와 사후수행평가의 평균과 표준편차 그리고 표본의 크기는 다음의 [표 8]과 같았다. 그리고 이들 자료를 2학기 중간고사를 공변수, 학급을 독립변수, 그리고 사후수행평가를 종속변수로 한 공분산 분석한 분석표는 [표 9]와 같았다. 먼저 공변수인 2학기 중간고사의 효과는 유의하였다($F(1,70)=462.527$, $p=.000$). 그리고 2학기 중간고사를 통제했을 때 수업방법에 따른 두 학급간의 사후수행평가 점수의 조정평균에도 유의한 차이가 있었다($F(1,70)=7.285$, $p=.009$).

[표 8] 각 학급별 2학기 중간고사와 사후수행평가의 평균과 표준편차

	2_중간(X)		사후수행평가(Y)		표본의 크기
학급	평균	표준편차	평균	표준편차	
6	59.19	14.23	11.51	3.749	37
5	62.58	17.48	10.14	4.435	36
전체	60.89	15.92	10.84	4.130	73

[표 9] 사후수행평가를 종속변수로 한 공분산 분석

분산원	제곱합(SS)	자유도(df)	평균제곱 (MS)	F	p
모형	497.006	2	248.503	23.796	.000
2학기중간	462.527	1	462.527	44.290	.000
학급	76.081	1	76.081	7.285	.009
오차	731.022	70	10.443		
전체	9799.000	73			

2. 정성적 결과분석

가. 분석의 준거

본 실험은 <6-나> 확률 단원을 재구성하여 수업한 것이다. 비교반 학생들과의 학습 성취 비교를 통해 나타나는 차이와 특징적인 면을 살펴보고, 각 반에서 나타나는 확률에 대한 이해, 흥미, 표현양식, 전략 등을 분석하기 위해 다음의 다섯 가지 분석 준거를 설정하였다.

첫째, 문제 해결 과정에서 사용하는 확률 개념 표현 양식의 다양성
둘째, 전체에 대한 부분의 비로서의 확률 개념에 대한 이해
셋째, 수학적 확률과 경험적 확률의 연결
넷째, 경우의 수를 구하는 과정에서의 나뭇가지 그림의 역할
다섯째, 경우의 수에 대한 이해

나. 분석의 결과

(1) 문제 해결 과정에서 사용하는 확률 개념 표현 양식의 다양성

실험반과 비교반의 표현양식 선호도를 조사하였다. 다양한 표현 양식을 학습한 실험반에서는 많은 학생들이 백분율 표현 양식을 선호하는 것으로 나타났다. 그러나 다양한 표현 양식을 학습하지 못한 비교반 또한 공교롭게도 실험반과 같은 정도의 선호도를 보였다. 다양한 표현양식을 학습하지 않은 비교반에서도 백분율을 선호하는 학생들이 많은 이유는 자신이 살아오면서 이미 경험한 확률이 백분율로 제시(예를 들면, 내일 비올 확률은 70%처럼 백분율로 제시)되어 있었기 때문이다. 이처럼 확률을 이미 백분율로 경험해온 학생들이 많이 있는데 교과서에서 확률 표현 양식을 분수로만 고집하는 모습은 개선해야 할 점이다.

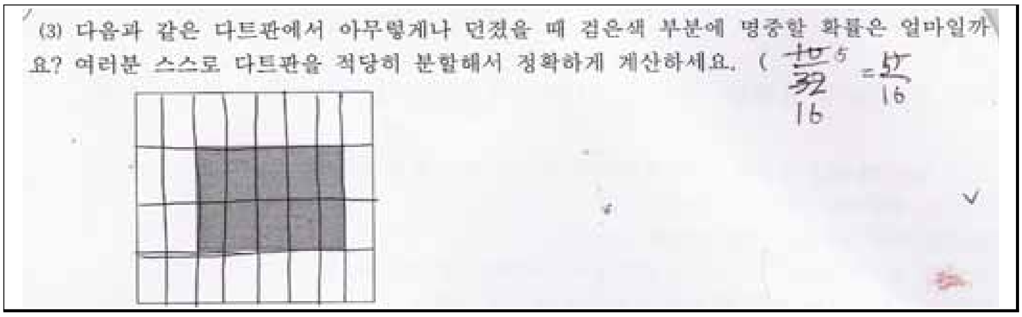
[표 10] 확률표현양식에 대한 두 집단의 선호도

	분수	백분율	무응답
실험반(6반)	19%	67%	14%
비교반(5반)	19%	67%	14%

(2) 전체에 대한 부분의 비로서의 확률 개념에 대한 이해

비교반과 실험반 모두 분수와 백분율을 통해서 비 개념에 대해서 충분히 선수학습 되어

있었음을 확인할 수 있었다. 비 개념은 확률 학습을 하는데 가장 중요한 개념이다. 확률 또한 측정의 일부분으로 전체에 대한 부분의 비라고 한다면 학생들이 확률을 배우기 이전에 비율 단원을 통해서 학습했던 비 개념을 확률에 적용하여 확률을 측정하고 이해할 수 있다. 이러한 관점에서 두 반의 평가문제에 대한 정답률을 볼 때 실험반과 비교반의 학생들은 이전에 배웠던 비 개념을 확률이라는 새로운 개념에 비교적 잘 적용하고 있다고 할 수 있다.


(3) 다음과 같은 다트판에서 아무렇게나 던졌을 때 검은색 부분에 명중할 확률은 얼마일까요? 여러분 스스로 다트판을 적당히 분할해서 정확하게 계산하세요. ($\frac{\cancel{40}\,5}{\cancel{32}\,16} = \frac{5}{16}$

< 그림 2 > 비율 개념을 확률 개념과 연결시키는 문제를 잘 해결한 사례

[표 11] 비율 개념을 확률 개념과 연결시키는 문제에 대한 정답률

	3-(1) 정답률	3-(2) 정답률	3-(3) 정답률
실험반(6반)	97.3%	70.3%	72.2%
비교반(5반)	94.4%	66.7%	42.7%

(3) 수학적 확률과 경험적 확률의 연결

수학적 확률과 경험적 확률을 연결시킬 때, 비형식적 비율 표현 방법을 사용하였던 실험반의 학생들이 수학적 확률을 주고 반복 실행 상황에서의 가능성을 구하는 문제에서 비교반의 학생들보다 더 높은 정답률을 보였다. 이는 교과서에서 확률을 도입하는데 있어서 반복 실행 상황의 경험적 확률을 통해 도입하기는 하지만 도입이후에 급격하게 확률을 $(\text{확률}) = \frac{(\text{부분 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$로 정의하여 문제에 적용, 응용하는 학습을 주로 했기 때문에 비교반의 학생들이 실험반의 학생들보다 수학적 확률과 경험적 확률의 관계를 잘 이해하지 못하는 것으로 나타났다.

5. 다음 문제를 읽고 물음에 답하세요.

(1) 주사위를 120번 던졌다. 홀수가 나온 것은 몇 번일까요? (60번)

(2) 이승엽 선수가 안타칠 확률은 25%입니다. 내년에 400번 타석에 선다면 대략 몇 개의 안타를 치겠습니까? (100개)

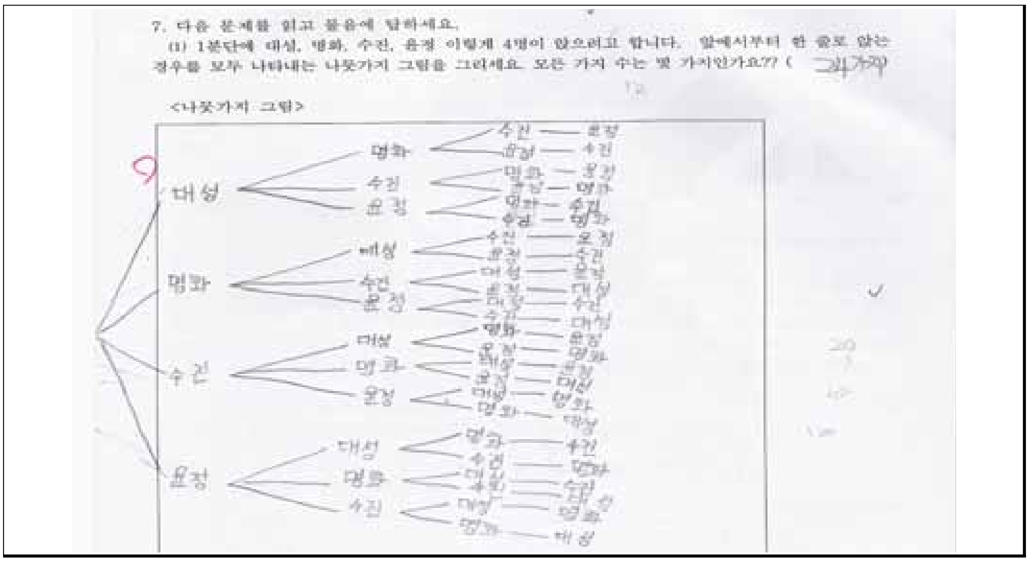
< 그림 3 > 수학적 확률과 경험적 확률의 연결을 묻는 문제를 잘 해결한 사례

[표 12] 수학적 확률과 경험적 확률을 연결시키는 문제에 대한 정답률

	5-(2)의 정답률
실험반(6반)	75.7%
비교반(5반)	58.3%

(4) 경우의 수를 구하는 과정에서의 나뭇가지 그림의 역할

수행평가지 8번 문제는 네사람 가운데 두 명을 뽑아 서로 다른 의자 2개에 앉도록 하는 경우의 수를 구하는 문제였다. 이 문제에서는 나뭇가지 그림을 핵심전략으로 사용하여 순열 상황에서의 확률을 구할 수 있는 지 알아보고자 하였다. 순서에 따른 짝짓기 방법을 주로 학습했던 비교반의 학생들보다 나뭇가지 그림을 핵심 전략으로 사용했던 실험반의 학생들이 조금 더 높은 성취 수준을 나타내었다. 나뭇가지 그림을 공식화하는 문제에서도 역시 실험반의 학생들이 비교반의 학생들보다 높은 성취수준을 보였는데, 여기서 재미있는 점은 비교반의 학생들 가운에 몇몇은 4×3×2를 4×6으로 쓰는 모습을 보였다는 점이다. 이는 나뭇가지 그림을 통한 곱의 법칙이 완전히 형식화 되어 있지 않아서 나타나는 현상으로 만약 이 학생이 나뭇가지 그림을 그리지 않고 공식으로만 문제를 해결할 때, 한 가지 경우의 수를 실수로 빠뜨리고 센다면 전체 경우의 수를 4×5로 계산하는 오류를 범할 수 있기 때문에, 나뭇가지 그림 그리기에 이은 정확한 형식화가 필요하다고 할 수 있다.



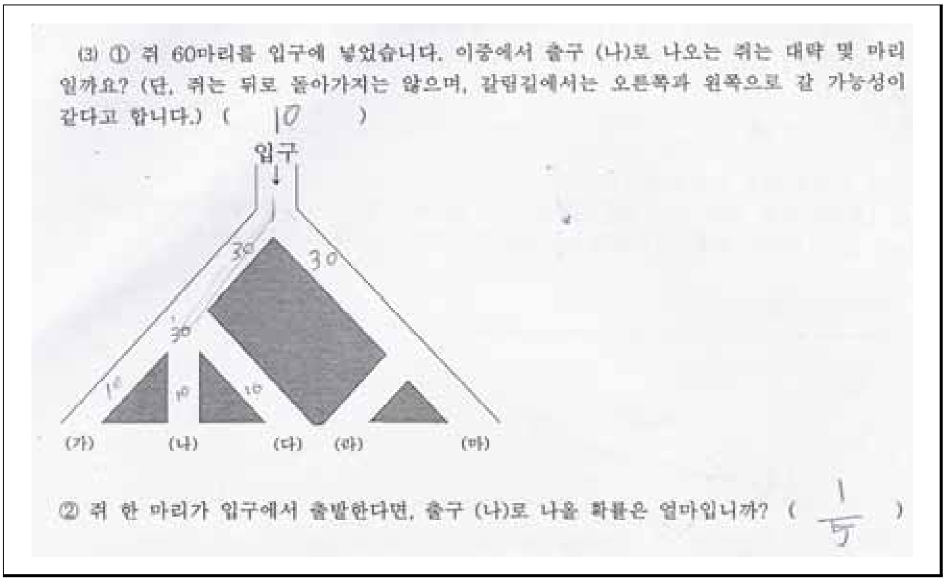
< 그림 4 > 나뭇가지 그림을 잘 그린 사례

[표 13] 나뭇가지 그림을 통해 순열 문제를 해결하는 문제에 대한 정답률

	8-(1) 정답률	8-(2) 정답률
실험반(6반)	40.6%	32.4%
비교반(5반)	30.6%	27.8%

(5) 경우의 수에 대한 이해

흰 공 1개와 검은 공 2개에서 2개를 꺼낼 때 둘 다 검은색이 나올 확률과 검은 색 흰색으로 나올 확률 중 어느 것이 더 확률이 높은 지 물어보는 문제 (수행평가지 2번 문제)에서 근원사건이 같아야 한다는 전제조건을 잘 이해하고 있지 못한 경우 경우의 수를 2가지((검,검), (검,흰))로만 파악하여 두 가지의 확률이 같다고 대답하는 오류를 범할 수 있다. 이 문제의 경우 전체 경우의 수가 3개인 비교적 간단한 문제였음에도 불구하고 많은 학생들이 오답을 보여 근원사건의 동일성이라는 전제조건을 이해하는데 어려움을 보이는 것으로 나타났다. 이은 쥐 미로 문제(수행평가지 5－(3)번 문제)의 경우를 통해서도 근원사건의 동일성을 잘 이해하지 못한 것으로 나타났는데, 이 문제 역시 마찬가지로 근원사건의 확률이 같아야 한다는 전제조건을 이해하지 못한다면 출구 (나)로 나올 확률은 전체 (가), (나), (다), (라), (마)의 다섯 가지 가운데 하나라고 생각해서 1/5로 답하는 오류를 범할 수 있다. 실험반과 비교반 모두 이러한 오류를 어느 정도 가지고 있었으나, 정답률에서 근소한 차이로 실험반이 우위를 보이고 있는 바, 확률에 대한 개념 이해와, $(확률)=\frac{(부분경우의수)}{(전체경우의수)}$ 알고리즘의 전제조건인 근원사건의 동일에 대한 이해도는 실험반이 우수하다고 할 수 있다.



< 그림 5 > 근원사건 확률의 동일성에 대한 오개념을 가진 학생의 문제 풀이

[표 14] 근원사건 확률의 동일성에 대한 오개념을 알아보는 문제의 정답률

	2번문제 정답률	5-(3)-①번 문제 정답률	5-(3)-②번 문제 정답률	5-(3)에서 ①번은 맞고 ②번을 틀린 학생의 비율
실험반(6반)	46%	59.5%	29.7%	31%
비교반(5반)	41.7%	41.7%	25%	25%

Ⅵ. 결 론

재발명 방법을 통해 확률 단원을 지도한 후 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 현실맥락을 통해 학습을 진행하는 것은 학습자의 확률 개념을 형성하는데 효과적이다. 확률 개념 자체가 수학의 다른 영역과는 달리 연역적으로 도입되지 않고, 경험적, 귀납적으로 도입되어 연역적으로 구성해 나가는 개념인 만큼 실제 경험에서 체득했던 지식들을 현실맥락으로 구성하여 지도하는 경우 학생들의 확률 개념에 대한 이해도가 교과서로 학습했던 학생들보다 더 높았다.

둘째, 경우의 수 개념보다 확률 개념을 먼저 도입하여 확률 개념과 경우의 수 개념을 유기적으로 연결할 수 있었다. 교과서에서는 경우의 수 개념을 먼저 도입하고 나중에 경우의 수 개념을 확률을 구하는데 적용하는 방법으로 제시하고 있는데, 이 방법은 학습자에게 익숙하지 않은 경우의 수 개념을 먼저 제시하게 되어 학습의 흥미를 떨어뜨리고 두 개념과의 관계를 정확히 이해하는데 어려움을 주고 있다. 앞서 보았던 쥐 미로 문제의 경우 5가지 길에 대한 각각의 가능성이 달라서 한 가지 길로 쥐가 나오는 확률이 1/5가 아니었지만 교과서를 통해 학습한 학생들은 우리 교과서의 형식화된 알고리즘인 확률 = $\frac{(\text{부분경우의수})}{(\text{전체경우의수})}$로 계산하여 1/5로 계산한 학생들이 많았다. 그러나 실험반의 경우에는 각각의 가능성을 따져 1/6으로 계산한 학생들이 비교적 많은 것으로 미루어보아 학습자에게 좀더 친숙한 확률 개념을 통해 경우의 수를 도입하는 것이 더 바람직하다고 하겠다.

셋째, 수학적 확률과 경험적 확률의 연결을 하는데 비형식적 비율 표현을 사용하는 것이 보다 좋은 결과를 보였다. 확률은 어떤 사건의 반복 실행 상황의 경험을 통해 그 가능성을 가늠해보는 것이다. 이것이 바로 경험적 확률이고 여기에서 근원사건의 나올 가능성이 같다고 가정할 때 일반화 하는 방법이 수학적 확률이다. 교과서에서도 확률 도입을 경험적 확률에서 출발하여 수학적 확률을 도입하고 있지만 그 둘 사이의 관계를 명확히 하지 못하고 있다. 이에 본 연구에서는 '몇 가운데 몇' 이라는 비형식적인 비율표현을 통해 수학적으로 얻어진 확률을 반복 실행 상황에 적용해 볼 수 있도록 하였다. 그로인해 교과서를 통해 학습한 학생들보다 두 개념을 연결시키는 능력이 더 높게 나타났음을 실험을 통해 알 수 있었다.

넷째, 다양한 확률표현 방법을 통해 확률에 대한 이해를 높일 수 있었다. 재발명 방법에 기초한 본 연구에서는 확률을 표현하는데 있어서 사다리, 백분율, 비형식적 비율표현, 분수 등 다양한 방법을 통해서 제시하고, 교과서에서는 오직 분수로만 확률을 표현하게 했는데, 확률 단원을 모두 학습하고 난 다음에 학습자의 확률 표현 방법 선호도를 조사하였다. 그 결과 학생들은 실험반과 비교반 모두 다양한 표현양식을 선호하고 있었다. 분수 한 가지의 방법으로만 학습하도록 강요받았던 비교반의 학생들도 백분율을 포함한 다양한 확률 표현 방법을 선호하는 것으로 보아, 확률 개념이 이미 실생활에서 상당 부분 체득되어 학교 교육과 무관하게 여러 가지 표현 방법들이 형성되어 있는 것이다. 학생들이 이미 가지고 있는 다양한 표현 방법들을 구체적이고 정확하게 가르쳐 줄 수 있는 교과서의 개발이 시급하다고 하겠다.

한편 이 연구는 상당히 제한적인 상황에서 이루어진 것이므로 연구 결과를 일반화하기

에는 다소 무리가 될 수도 있다. 따라서 다음과 같은 몇 가지 사항을 후속 연구를 위한 제언으로 남기고자 한다.

첫째, 본 연구는 초등 수학의 확률 영역에 재발명 방법에 근거하여 지도하고 그 결과를 분석한 것이다. 그러나 초등 수학의 확률 영역은 대체로 그 내용이 평이하여, 재발명 방법을 통한 학습이 전통적인 학습과 비교하여 극명한 차이를 보이기는 어려웠다. 이에 더욱 풍부한 개념이해와 복잡한 알고리즘에 대한 명확한 이해가 필요한 중등 이상의 확률 단원 학습에 적용 분석하는 연구가 이루어져야 하겠다.

둘째, 재발명 방법에 비해 우리나라 교과서는 단원 구성이 체계적이어서 학습이 효과적으로 이루어질 수 있다는 장점이 있다. 이러한 장점을 살린 확률 학습 내용에 대한 끊임없는 연구를 통해 확률의 합리적인 학습 방법에 대한 연구가 지속되어야 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강홍규 (2005). 분수개념과 알고리듬 지도 양상 비교: McLellan, MiC, 한국의 교재를 중심으로. **수학교육학연구 15**(4), 375-399.

교육인적자원부 (2006a). **수학 6-가.** 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006b). **수학 6-나.** 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006c). **수학익힘책 6-가.** 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006d). **수학익힘책 6-나.** 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006e). **수학 6-가 초등학교 교사용 지도서.** 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006f). **수학 6-나 초등학교 교사용 지도서.** 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (1998). **초등학교 교육과정 해설(IV).** 서울: 대한교과서 주식회사.

김경옥 (1992). **고등학교 확률·통계 교육의 현황 및 개선에 관한 실증적 연구.** 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

김성여 (2003). **네덜란드 교과서를 활용한 초등 수학수업 연구.** 서울교육대학교 대학원 석사학위논문.

이금아 (2005). **미국의 MiC 교과서와 한국의 수학 교과서 비교 연구.** 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정영옥 (1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D, Reidel Publishing Company.

V., Jonker, F., van Galen, N., Boswinkel & M., Wijers (1997). Take a Chance, In National center for research in mathematics education & Freudenthal institute(Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8.* Chicago: Encyclopædia Brittanica Educational Corporation.

<Abstract>

A Reconstruction of Probability Unit of Elementary Mathematics Textbook Based on Freudenthal's Reinvention Method

Kang Ho Jin[5]; & Kang Heung Kyu[6]

Freudenthal has advocated the reinvention method. In that method, the pupils start with a meaningful context, not ready-made concepts, and invent informative method through which he could arrive at the formative concepts progressively. In many face the reinvention method is contrary to the traditional method. In traditional method, which was named as 'concretization method' by Freudenthal, the pupils start with ready-made concepts, and applicate this concepts to various instances through which he could arrive at the understanding progressively.

Through analysis, it turns out that Korea's seventh elementary mathematics textbook is based on concretization method. In this thesis, first of all, I will reconstruct probability unit of seventh elementary textbook according to Freudenthal's reinvention method. Next, I will perform teaching experiment which is ruled by new lesson design. Lastly, I analysed the effects of teaching experiment. Through this study, I obtained the following results and suggestions.

First, the reinvention method is effective on the teaching of probability concept and algorithm.

Second, in comparison with current textbook strand, my strand which made probability concept go ahead and combinatorics concept let behind is not deficiency.

Third, tree diagram is effective matrix which contribute to formalization of combinatorics calculation.

Lastly, except for fraction, diverse representation of probability, for example percentage or informal ratio expression must be introduced in teaching process.

Keywords: probability, reinvention method, concretization, tree diagram, counting principle

논문접수: 2008. 4. 4
논문심사: 2008. 4. 23
게재확정: 2008. 5. 1

5) seraph-99@hanmail.net
6) natin@gjue.ac.kr