한국마린엔지니어링학회지 제32권, 제4호, pp. 618~623, 2008. 5 (ISSN 1226-9549)
Journal of the Korean Society of Marine Engineering

비선형 시스템을 위한 보간 기반의 적응 LQ 제어

이윤형* · 안종갑* · 진강규** · 소명옥†

(원고접수일 : 2007년 10월 12일, 심사완료일 : 2008년 2월 27일)

Interpolation-Based Adaptive LQ Control for Nonlinear Systems

Yun-Hyung Lee* · Jong-Kap Ahn* · Gang-Gyoo Jin** · Myung-Ok So†

Abstract : This paper presents a design method of the Interpolation-based adaptive LQ controller that is accomplished by getting the final controller interpolated with each gain of sub-LQ controllers. The Lagrange interpolation method is used in the scheme. The proposed controller is useful to control nonlinear systems which are especially changed the system parameters. The design method is illustrated by an application to the stabilization and tracking problems of an inverted pole system on a cart. Several cases of simulations are carried out in order to validate the control effectiveness and robustness. The simulation results are compared with those of LQ controller and prove the better control performance than LQ controller.

Key words : LQ controller(LQ 제어기), Lagrange interpolation(라그랑지 보간법), Nonlinear systems(비선형 시스템), Inverted pole system(도립막대 시스템)

1. 서 론

비선형 시스템을 제어하기 위해서는 시스템을 가장 많이 사용되는 평형점 부근에서 선형화 한 후, 주로 PID 제어기나 LQ 제어기와 같은 선형제어기를 설계한다. 그러나 이러한 선형제어기는 제한된 제어환경 내에서는 우수한 제어성능을 발휘하지만, 제어환경 변화로 인한 파라미터의 변동이 존재하는 경우에는 강인성을 보장할 수 없고, 만족스러운 제어성능을 얻지 못하는 결점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 현재까지 많이 응용되어 온 기준모델적응제어(Model reference adaptive control; MRAC)와 자기조정제어(Self-tuning control) 등도 시스템의 결정적 성질에 의존하므로 제한된 제어환경에서만 성공적으로 작동하는 한계를 가지고 있다[1-2].

한편, 퍼지제어는 불확실한 정보를 다룰 수 있고, 전문가의 지식을 직접 언어규칙으로 표현할 수 있으며, 제어대상의 수학적 모델을 요구하지 않는 장점 때문에 복잡하고 불확실한 시스템의 제어에 많이 이용되어 왔다[3,4].

특히, T-S(Tagaki-Sugeno) 퍼지모델[5]과 병

† 교신저자(한국해양대학교 선박전자기계공학부), E-mail:smo@hhu.ac.kr, Tel: 051)410-4248
* 한국항만연수원 부산연수원
** 한국해양대학교 컴퓨터 · 제어 · 전자통신공학부

렬분산보상(parallel distributed compensation : PDC) 개념[6]을 이용한 비선형 시스템의 제어는 안정도 분석과 체계적인 설계방법이 가능해 많이 사용되고 있다.

그러나 이러한 퍼지제어 기법도 안정도 해석이 어렵고, 고정된 규칙 베이스로 인해 제어환경의 변화에 대한 적응성이 부족한 문제점을 가지고 있다. 따라서 본 논문에서는 제어환경의 변화에 대해 제어기에 적응성능을 부여하기 위해 제어기의 이득(Gain)을 라그랑지(Lagrange) 보간법을 이용하여 융합·보간하는 새로운 적응 LQ 제어기 설계기법을 제안한다.

이것은 비선형 시스템을 다수개의 평형점(혹은 파라미터 변화)에서 각각의 서브시스템(선형모델)을 구하고, 이들 서브시스템에 대해 서브제어기를 설계하는 면에서 T-S 퍼지모델과 PDC를 이용한 퍼지제어기 설계와 유사한 면모를 보인다. 그러나 본 논문에서 제안하는 제어기는 서브시스템에 대해 설계한 각 서브제어기의 이득을 라그랑지 보간법으로 융합하는 형태의 새로운 제어기이다.

제안한 제어기 설계 기법을 비선형 시스템이면서 구조적으로 불안정한 도립막대 시스템에 적용하여 시뮬레이션을 실시하고, 이를 기존의 제어기와 비교 검토함으로써 제안한 제어기의 유연한 적응성과 우수한 제어성능을 입증 한다.

2. 보간법을 이용한 적응 LQ 제어기

2.1 LQ 제어

여기서는 제안하고자 하는 제어기 설계의 전 단계로서 비선형 시스템의 서브시스템과 서브제어기에 대해 살펴본다.

일반적으로 비선형 시스템은 평형점에 따라서 다음과 같은 LTI(Linear Time Invariant)시스템으로 생각할 수 있다.

$$\dot{x} = A_i x + B_i u \qquad (1)$$
$$y = C_i x$$

여기서 $x \in R^n$는 시스템의 상태벡터, $y \in R$는 시스템의 출력, $u \in R$는 제어입력이고, A_i, B_i, C_i는 시스템에 따라 적절한 차원을 갖는 행렬이다. 한편 행렬쌍 (A_i, B_i)가 가제어(Controllable)하면, 상태 피드백 제어가 가능하다.

2차형식의 평가함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J_i = \int_0^\infty (x^T Q_i x + u^T R_i u)\, dt \qquad (2)$$

여기서 Q_i는 양의 반한정 대칭행렬이고, R_i은 양의 하중계수이다.

(2)의 평가함수를 최소로 하는 의미에서 상태피드백 제어법칙은 다음과 같다.

$$u_i = -K_i x = -R_i^{-1} B_i^T P_i x \qquad (3)$$

여기서 K_i는 피드백 이득행렬로서 실수행렬이고, P_i는 Riccati 방정식의 해행렬이다.

(3)과 같은 LQ 제어는 6[dB]이상으로부터 무한대의 이득여유와 60[°] 이상의 위상여유를 제공해주는 강인한 특성 때문에 시스템의 모든 상태를 이용할 수 있는 경우에 많이 사용되고 있다[7].

한편, (3)으로 주어지는 제어법칙(Control law)은 제어대상이 1형 시스템(Type 1 system)으로 모델링 된 경우에 추종제어(Tracking control)와 더불어 조정기(Regulating) 문제에 적용이 가능하나, 0형 시스템(Type 0 system)으로 모델링 된다면 추종제어는 피드포워드(Feedforward) 혹은 적분제어를 추가한 형태의 제어법칙을 사용해야한다. 따라서 제어대상의 일반성을 유지하기 위해서 본 논문에서는 (3)을 변형한 피드포워드 형태의 제어입력을 사용하기로 한다.

$$u_i = -k_{i1}(x_1 - y_r) - k_{i2}x_2 \cdots - k_{ij}x_j \qquad (4)$$

여기서 j는 상태변수의 개수 혹은 피드백 이득의 개수를 나타낸다.

2.2 라그랑지 보간법

보간법은 (n+1)개의 분점 $d_0, d_1, \cdots, d_n$에 대한 함수 값 $g_k = f(d_k), (k = 0,1,\cdots,n)$가 주어졌을 때 이러한 점 이외의 d값에 대한 $g = P_n(d)$를 구하

는 것을 의미한다. 주어진 이산 데이터 점을 통과하고 그 데이터 사이를 보간하는 방법에는 라그랑지(Lagrange) 보간법, 뉴턴(Newton) 보간법, 스플라인(Spline) 보간법 등이 있다. 본 논문에서는 라그랑지 보간법을 제어기 설계에 응용하므로 이에 대해서만 언급하고자 한다.

만약 (n+1)개의 데이터 값 $(d_0, f(d_0))$, $(d_1, f(d_1))$, …, $(d_n, f(d_n))$이 주어졌을 때, 이 점들을 통과하는 다항식을 (5)로 가정하면 곡선의 다항식이 모든 점을 통과해야 하므로 (6)이 얻어진다.

$$P_n(d) = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \cdots + a_n d^n \tag{5}$$

$$P_n(d_i) = f(d_i) \quad (i = 0,1,\cdots,n) \tag{6}$$

여기서 $L_i(d_j)$와 $L_i(d)$를 (7),(8)과 같이 정의하면 (5)는 (9)와 같은 라그랑지 n차 보간공식을 얻을 수 있다.

$$L_i(d_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \tag{7}$$

$$L_i(d) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \left[\frac{d - d_j}{d_i - d_j}\right] \tag{8}$$

$$P_n(d) = \sum_{i=0}^{n} (L_i(d)) f(d_i) \tag{9}$$

2.3 보간법을 이용한 적응 LQ 제어

비선형 시스템을 하나의 평형점에서 선형화하여 설계한 LQ 제어기는 시스템의 파라미터가 변화하지 않는 환경 하에서 강인한 제어성능을 보인다. 그러나 만약 시스템의 파라미터가 변화한다면 설계자는 이에 따른 또 다른 제어기를 설계해야 한다.

본 절에서는 이와 같은 문제점을 해결할 수 있도록 파라미터 변화를 고려해 여러 개의 LQ 제어기(서브제어기)를 설계하고, 이들의 피드백 이득(Gain)을 라그랑지 보간법을 사용하여 보간하는 기법을 설명한다.

(7)과 (8)을 이용하면, 최종적으로 얻어지는 제어기의 이득 $K_{IP} = [k_1\ k_2 \cdots k_j]$는 (10)과 같이 나타낼 수 있다. 이때 $k_j = [k_{ij}]$ $(i = 1,2,\cdots,r,\ j = 1,2,\cdots,n)$이다.

$$k_j(\phi) = \sum_{i=1}^{r} k_{ij} L_i(\phi) \tag{10}$$

여기서 r은 파라미터 변화에 따른 선형모델의 개수이고, $L_i(\phi) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\phi - \phi_j}{\phi_i - \phi_j}$이며, ϕ는 변화하는 파라미터를 의미한다.

Fig. 1은 보간 기반의 적응 LQ 제어기를 나타내고 있으며 점선 부분이 본 논문에서 제안한 적응 제어기이다.

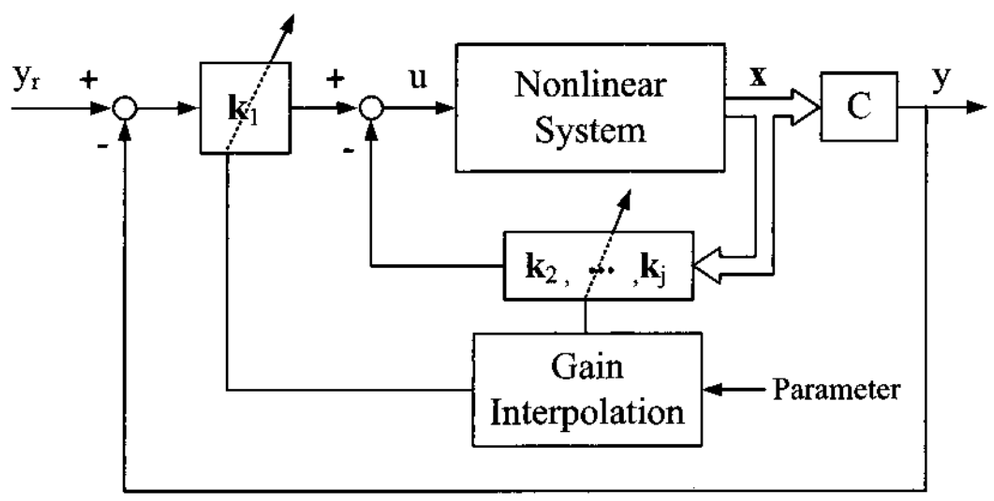


Fig. 1 Interpolation-based adaptive LQ control system

3. 도립막대 시스템에 적용

3.1 도립막대 시스템

제안한 방법의 유효성을 검증하기 위한 시스템으로 Fig. 2와 같은 도립막대 시스템을 고려하자.

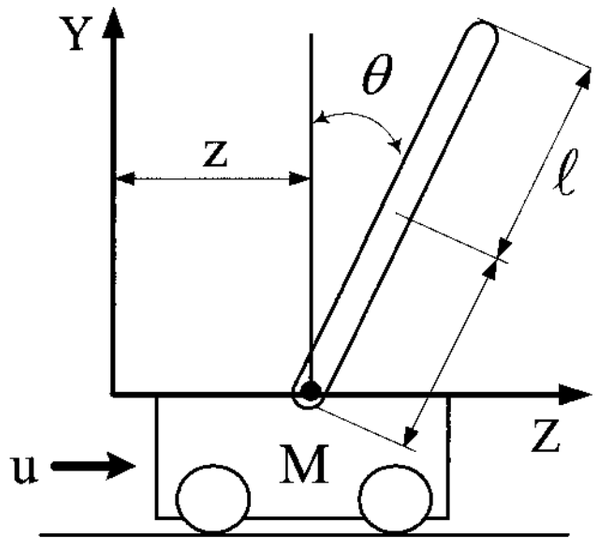


Fig. 2 Inverted pendulum system

그림에서 막대의 수직에 대한 각도를 θ[rad], 각속도를 $\dot{\theta}$[rad/s], 대차의 수평방향 위치를 z[m], 대차의 수평방향 속도를 $\dot{z}$[m/s]라 정의하고, 대차와 막대와의 비선형 운동방정식을 $\ddot{z}$와 $\ddot{\theta}$에 관하여 정리하면 아래의 식과 같다. 여기서 입력은 구동모터의 전압이다.

$$\ddot{z}=\frac{-\frac{K_g^2K_m^2}{R_a r_d^2}(1+c_1)\dot{z}+\frac{K_gK_m}{R_a r_d}u}{(M+m\sin^2\theta)} - \frac{m\sin\theta(g\cos\theta+\ell\dot{\theta}^2)-\frac{c_2\dot{\theta}}{m\ell^2}}{(M+m\sin^2\theta)} \tag{11}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{(\frac{K_g^2K_m^2}{R_a r_d^2}+c_1)\cos\theta\,\dot{z}-\frac{K_gK_m}{R_a r_d}\cos\theta\,u}{\ell(M+m\sin^2\theta)} + \frac{[(M+m)g-m\ell\dot{\theta}\cos\theta]\sin\theta-\frac{(M+m)c_2\dot{\theta}}{m\ell}}{\ell(M+m\sin^2\theta)} \tag{12}$$

여기서 K_g와 K_m은 각각 구동모터의 기어박스의 감속비, 모터의 토크 상수를 나타내고, R_a와 r_d는 각각 모터의 전기자 저항, 모터 피니언의 직경을 의미한다.

만약 θ가 미소하다고 가정하여 비선형 모델을 선형화하고, $\mathbf{x}=[z\ \dot{z}\ \theta\ \dot{\theta}]^T$로 상태변수를 정의하면 (1)과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

본 논문에서는 다른 시스템 파라미터는 일정한 상태에서 막대의 길이 ℓ만 변화하는 것으로 가정하여 제안한 제어기의 유효성을 살펴보기로 한다. ℓ의 변화를 0.5[m], 1.0[m], 1.5[m]로 변화하는 경우로 가정하고, Table 1과 같은 도립막대 시스템의 파라미터 값[8]을 참고하면 다음과 같은 3가지의 서브시스템을 얻을 수 있다.

◆서브시스템 1 : $\ell=0.5$인 경우

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-16.88&-4.56&0\\0&0&0&1\\0&33.76&28.73&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\3.77\\0\\-7.55\end{pmatrix}u \tag{13}$$

$$y=(1\ 0\ 0\ 0)x$$

◆서브시스템 2 : $\ell=1.0$인 경우

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-16.88&-4.56&0\\0&0&0&1\\0&16.88&14.36&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\3.77\\0\\-3.77\end{pmatrix}u \tag{14}$$

$$y=(1\ 0\ 0\ 0)x$$

◆서브시스템 3 : $\ell=1.5$인 경우

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-16.88&-4.56&0\\0&0&0&1\\0&11.25&9.57&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\3.77\\0\\-2.51\end{pmatrix}u \tag{15}$$

$$y=(1\ 0\ 0\ 0)x$$

다음으로 서브제어기(LQ 제어기)를 설계하기 위해 상태벡터와 제어입력의 상대적인 중요성에 근거를 두고 바라는 제어응답이 되도록 시행착오를 거쳐 Q_i와 $R_i(i=1,2,3)$를 다음과 같이 선정한다.

$$\begin{aligned}Q_1&=\mathrm{diag}(6,3,3,1),\quad R_1=0.01\\Q_2&=\mathrm{diag}(16,8,4,1),\quad R_2=0.01\\Q_3&=\mathrm{diag}(25,10,5,1),\quad R_3=0.01\end{aligned} \tag{16}$$

그러면 다음과 같은 각 서브시스템의 이득 K_i은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}K_1&=[-24.50\ -35.03\ -126.60\ -29.78]\\K_2&=[-40.00\ -59.42\ -273.31\ -87.26]\\K_3&=[-50.00\ -76.18\ -407.76\ -159.13]\end{aligned} \tag{17}$$

Table 1 The value of system parameters

Parameters	Value	[Unit]
K_g	3.7	
K_m	0.00767	[V/rad/s]
m	0.212	[kg]
M	0.455	[kg]
R_a	2.6	[Ω]
r_d	0.00635	[m]
g	9.81	[m/s^2]

Fig. 3은 도립막대 시스템의 파라미터 ℓ의 변화에 따른 피드백 이득 $\mathbf{K_{IP}}=[\mathrm{k_1}\ \mathrm{k_2}\ \mathrm{k_3}\ \mathrm{k_4}]$를 (10)의 라그랑지 보간법을 사용하여 보간한 결과이다.

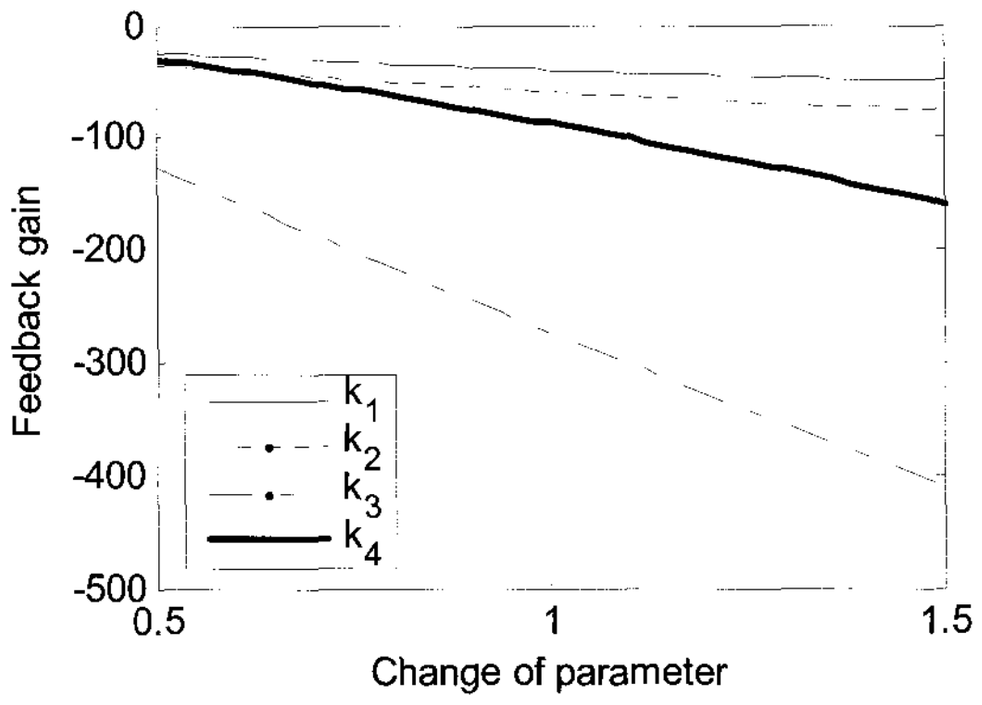


Fig. 3 Gain curve by the Lagrange interpolation

4. 시뮬레이션 및 검토

제안한 제어기는 도립막대 시스템에 적용하여 그 유효성과 강인성을 살펴본다. 시뮬레이션 환경은 오프라인(Off-line)에서 파라미터 ℓ이 변화한 것으로 가정하여 실시하고, 샘플링 시간은 0.01[s]으로 설정한다.

Fig. 4는 ℓ이 기준값 1.0[m]에서 +40% 증가(1.4[m])한 경우에 제안한 제어기(LI-LQ)와 ℓ=1.0(가운데 길이)에서 설계된 LQ 제어기(LQ)의 응답을 보여준다. Fig. 5는 -40%(0.6[m])로 파라미터 ℓ을 변화시킨 경우의 응답 결과이다. 이때 LQ 제어기는 Fig. 4에서 사용한 것과 동일하다.

Fig. 4에서 막대의 길이가 길어지면 제어의 용이성은 증가하므로, LQ 제어기도 양호한 제어성능을 보이고 있음을 확인할 수 있다. 그러나 제안한 제어기가 LQ 제어기 보다 최대 흔들림 각도가 약 0.08[rad] 정도 작다.

Fig. 5에서는 막대의 길이가 짧아진 경우이므로, 제어의 용이성은 감소하게 된 경우이다. 그림에서 확인할 수 있듯이 막대의 길이가 짧아진 경우에도 제안한 제어기는 오버슈트나 정상편차 없이 목표위치에 도달되나, LQ 제어기는 대차를 목표위치에 추종시키지 못하고, 인가전압이 매우 불안정한 모습을 보이고 있다.

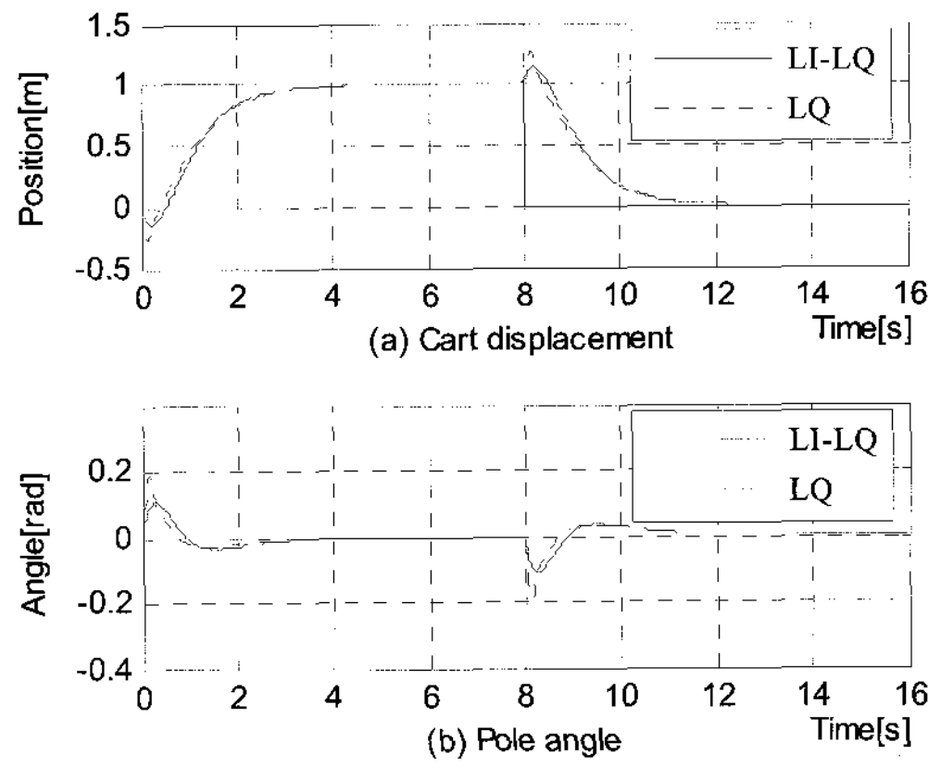


Fig. 4 Step responses using the LI-LQ and LQ controller (Parameter change : +40%)

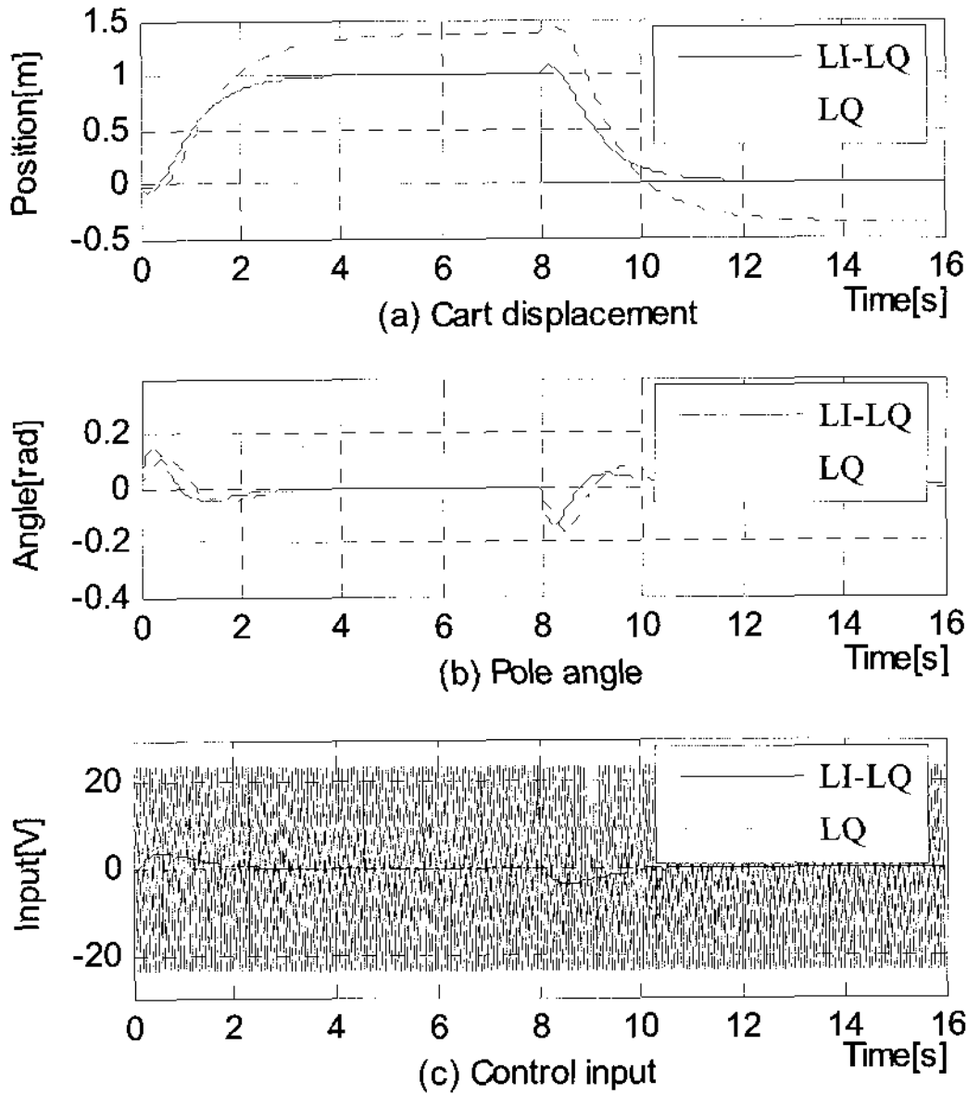


Fig. 5 Step responses using the LI-LQ and LQ controller (Parameter change : -40%)

5. 결 론

본 논문에서는 비선형 시스템의 제어를 위한 새로운 형태의 보간 기반의 적응 LQ 제어기법을 제안하였다. 제안한 기법은 비선형 시스템을 다수 개의 서브시스템으로 표현하고, 이 서브시스템에 대해 서브제어기를 설계한다는 점에서 T-S 퍼지모델

과 PDC 개념을 이용한 제어기 설계기법과 유사하다. 그러나 최종적으로 얻어지는 제어기는 서브제어기를 라그랑지 보간법을 이용하여 융합한다는 측면에서 새로운 제어기 형태이다. 이렇게 서브제어기의 이득을 보간함으로써 제안한 제어기는 강인성과 적응성을 가질 수 있게 된다.

제안한 기법은 비선형 도립막대 시스템에 적용하고, 시뮬레이션을 실시한 결과 파라미터 변화에 대해 LQ 제어기보다 적응성과 강인성이 더욱 뛰어남을 확인할 수 있었다.

참고문헌

[1] R. E. Skelton, Dynamic Systems Control, John Wiley & Sons, 1988.

[2] M. Drouin, H. H. Kandil and M. Marition, Control of Complex System, Plenum Press, 1991.

[3] S. Tong, T. Wang and J. T. Tang, "Fuzzy Adaptive Output Tracking Control of Nonlinear Systems", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 111, pp. 169-182, 2000.

[4] I. Rojas, H. Pomares, J. Gonzalez, L. J. Herrera, A. Guillen, F. Rojas and O. Valenzuela, "Adaptive Fuzzy Controller: Application to the Control of the Temperature of a Dynamic Room in Real Time", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 157, pp. 2241-2258, 2006.

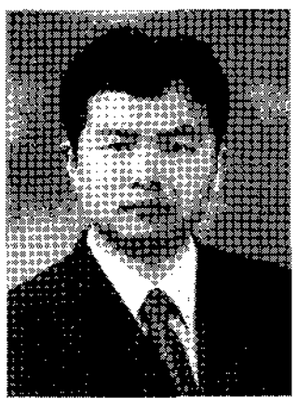
[5] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Application to Modeling and Control", IEEE Trans. on SMC, Vol. SMC-15, No.1, pp.116-132, 1985.

[6] K. Tanaka and M. Sano, "A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer", IEEE Trans. Fuzzy Systems Vol. 2, No. 2, pp.119-134, 1994.

[7] 최한호,"선형 제어 시스템 설계 (III) : 상태 공간 제어기 설계", 제어·자동화·시스템공학회지, Vol. 12, No. 3, pp. 42-50, 2006.

[8] QUANSER User Manual, Linear Motion Servo Plants: IP01 and IP02, Inverted Pendulum.

저 자 소 개



이윤형(李潤炯)

2002년 한국해양대학교 기관시스템공학부(공학사). 2004년 한국해양대학교 대학원 기관시스템공학과(석사). 2007년 한국해양대학교 대학원 메카트로닉스공학과(박사). 현재 한국항만연수원 부산연수원 교수

※ 관심분야 : 제어이론, 유전알고리즘 응용, 항만하역장비제어

안종갑(安鍾甲)

2000년 한국해양대학교 기관시스템공학부(공학사). 2006년 한국해양대학교 대학원 메카트로닉스공학과(석사). 2006~동대학원 메카트로닉스 공학과 박사과정. 현재 한국항만연수원 교수. ※관심분야 : 제어이론, 유전알고리즘 응용

진강규(陳康奎)

1977년 한국해양대학교 기관학과(학사). 1985년 Florida Institute of Technology, 전기·전자·컴퓨터공학과(석사). 1996년 University of Wales Cardiff, 전기·전자·시스템공학과(박사). 현재 한국해양대학교 컴퓨터·제어·전자통신공학부 교수.

※ 관심분야 : 유전알고리즘, 퍼지제어, 최적제어

소명옥(蘇明玉)

1980년 한국해양대학교 기관학과(학사). 1989년 한국해양대학교 대학원 기관학과(석사). 1997년 동 대학원(박사). 한국항만·운송노동연구원 연구위원. 2005~2006년 University of Wales Cardiff 파견교수. 현재 한국해양대학교 선박전자기계공학부 교수.

※ 관심분야 : 퍼지제어, 최적제어