



유한요소법에 의한 MT 법의 2차원 해석

김희준¹ · 최지향² · 한누리² · 이성곤^{3*} · 송윤호³

¹부경대학교 환경탐사공학과

²서울대학교 에너지시스템공학부

³한국지질자원연구원 지하수지열연구부

Two-Dimensional Magnetotelluric Interpretation by Finite-Element Method

Hee Joon Kim¹, Jihyang Choi², Nuree Han², Seong Kon Lee^{3*} and Yoonho Song³

¹Department of Environmental Exploration Engineering, Pukyong National University

²Department of Energy System Engineering, Seoul National University

³Groundwater & Geothermal Resources Division, Korea Institute of Geoscience & Mineral Resources

요약: 자기지전류(MT)법은 지열조사에 효과적인 기술로 널리 적용되고 있다. 지열 지역의 복잡한 구조를 효율적으로 밝히기 위해서 보통 2차원 해석이 사용된다. 2차원 유한요소법(FEM)은 MT 해석을 위해 자주 사용되지만 소위 보조장의 계산 정밀도에는 주의를 기울여야 한다. Rodi (1976)는 보조장의 계산 정밀도를 향상시키는 방법을 제안하고 MOM 법이라 명명하였다. 그러나 이 방법은 유한요소 전체방정식의 대각 요소에 0을 추가하기 때문에 이를 풀 때 pivoting이 필요해 계산 효율이 떨어진다. 원래 MOM 법은 주로 역산 해석을 위해 고안된 것으로서 전기장과 자기장의 편미분을 동시에 구할 때 유용하다. 만일 모델링만이 필요하면 MOM 법을 경유하여 계수행렬을 수정하지 않아도 보조장을 FEM 해에서부터 직접 유도할 수 있다. 또한 MOM 법의 계산효율도 전체방정식 계수행렬의 행을 적절히 교환하면 크게 향상될 수 있다.

주요어: 자기지전류법, 2차원, 유한요소법, MOM, 보조장

Abstract: Magnetotelluric (MT) methods are widely applied as an effective exploration technique to geothermal surveys. Two-dimensional (2-D) analysis is frequently used to investigate a complicated subsurface structure in a geothermal region. A 2-D finite-element method (FEM) is usually applied to the MT analysis, but we must pay attention to the accuracy of so-called auxiliary fields. Rodi (1976) proposed an algorithm of improving the accuracy of auxiliary fields, and named it as the MOM method. Because it introduces zeros into the diagonal elements of coefficient matrix of the FEM total equation, a pivoting procedure applied to the symmetrical band matrix makes the numerical solution far less efficient. The MOM method was devised mainly for the inversion analysis, in which partial derivatives of both electric and magnetic fields with respect to model parameters are required. In the case of forward modeling, however, we do not have to resort to the MOM method; there is no need of modifying the coefficient matrix, and the auxiliary fields can be elicited from the regular FEM solution. The computational efficiency of the MOM method, however, can be greatly improved through a sophisticated rearrangement of the total equation.

Keywords: MT, 2-D, FEM, MOM, auxiliary fields

서론

자기지전류(magnetotelluric, MT)법은 지열자원조사에 유효한 탐사법으로 널리 사용되고 있다. 현재 가장 많이 통용되는 1차원 해석은 지열지대와 같이 지하구조가 복잡한 지역에 적용하는데 한계가 있다. 최근 컴퓨터의 고속화 및 고용량화에

힘입어 유한요소법(finite-element method, FEM) 등과 같은 계산방법을 이용한 3차원 해석이 시도되기 시작했지만(Nam *et al.*, 2006), 아직은 계산시간이 많이 걸리고 현장에서의 3차원 자료 수집도 용이하지 않아 일반화하기 어려운 실정이다. 따라서 현재로서는 정확하고 빠른 2차원 해석이 매우 필요하다 할 수 있다.

최근 국내에서는 한반도를 대각 횡단하는 240 km의 축선을 따라 50개 측정에서 MT탐사가 실시되었으며(이춘기 등, 2007), 또한 한국지질자원연구원에서는 포항 북부 지역 및 제주도에서 다수의 축선을 설정하여 대량의 MT 자료를 획득하였다. 이들 자료에 대해 현재 기존의 해석 프로그램을 이용하

2007년 8월 8일 접수; 2008년 5월 15일 채택

*Corresponding author

E-mail: seongkon@kigam.re.kr

Address: Groundwater & Geothermal Resources Department, Korea Institute of Geoscience & Mineral Resources, 30, Gajeong-dong, Yuseong-gu, Daejeon, 305-350, Republic of Korea

여 간단한 2차원 및 3차원 해석이 시도되고 있으나(송윤호 등, 2006; Uchida *et al.*, 2006; Lee *et al.*, 2006) 아직 만족할 만한 수준은 아니다.

2차원 유한요소 모델링은 이미 확립된 방법으로서 많은 분야에서 사용되고 있지만 이를 전자기장의 해법으로 적용할 때는 세심한 주의를 기울여야 한다. 전자기장은 전기장과 자기장이 서로 상호작용하면서 존재하는 물리계이다. 전기장, 자기장 모두 벡터량이며 전기장 3성분, 자기장 3성분의 6개 성분이 존재한다. 그러나 이들을 유한요소법으로 풀 때 6개의 미지량을 동시에 풀 필요는 없다. 전자기장의 거동을 지배하는 맥스웰(Maxwell) 방정식이 전기장과 자기장으로 분리되는 것을 이용하면 전기장 혹은 자기장 어느 한쪽만을 이용해 계산식을 전개할 수 있으며 전자기장의 1차원 해석이나 3차원 해석에서는 이와 같은 방법이 주로 사용된다.

2차원의 경우 전자기장이 TE (transverse electric) 및 TM (transverse magnetic)의 두 가지 모드(mode)로 분리되는 것을 이용하면, 전자기장 성분 중 하나만을 풀고 나머지 성분은 먼저 풀 성분으로부터 보조적(auxiliary)으로 도출할 수 있다. 이 보조장 계산에는 차분 근사를 사용할 수 있으나 지표면에 접하는 요소를 매우 작게 유지하지 않으면 그 계산의 정밀도(accuracy)는 높지 않다. 그런데 이러한 격자 크기의 제한은 하나의 격자망(mesh)으로 여러 주파수에 대한 모델링을 할 때 문제가 된다. 왜냐하면 주파수에 따라서 전자파의 표피심도(skin depth)가 달라지기 때문에 모든 주파수에 항상 적절한 격자 크기를 유지하는 것이 쉽지 않기 때문이다. 이러한 어려움은 역산의 경우 더욱 가중된다. 모델링에서는 사전에 전기비저항(따라서 표피심도)을 알 수 있으나, 역산에서는 계산 과정에서 전기비저항이 변화하기 때문이다.

차분 근사로 계산한 보조장의 계산 정밀도는 원래 요소 변의 중앙에서 가장 높고, 가장자리 (매질의 경계)에서 가장 낮다. Wannamaker *et al.* (1986)은 2차 차분근사로 보조장의 계산 정밀도를 높이려고 하였다. 한편 Rodi (1976)는 유한요소법의 전체방정식(total equation)에 몇 개의 행과 열을 추가하여 전기장과 자기장을 동시에 구할 수 있는 방법을 소개하였는데 수정된 전체방정식에서 추가된 부분의 모양을 따서 MOM 법이라는 이름이 붙여졌다. 이 MOM 법은 계산효율이 높은 편이 아니어서 MT 모델링 자체에는 적합하진 않지만, 전기장과 자기장이 하나의 전체방정식에서 동시에 구해지기 때문에 역산에 필요한 감도(sensitivity)를 구하고자 할 때는 상당한 위력을 발휘할 수 있다. 여기서는 MT의 2차원 해석에 필요한 이론과 필요한 전자기장을 MOM 법으로 계산하는 방법을 소개하고, 이를 이용해 MT 모델링의 계산 효율을 높이는 방법을 설명한다.

기초방정식

Rodi (1976)가 도출한 식과의 비교를 용이하게 하기 위해 시간인자로서 $\exp(-i\omega t)$ 를 사용한다. 주향 방향을 x 축으로 하는

2차원 대지에 평면파가 수직으로 입사하는 경우를 생각하자. 전자기장은 x 방향으로는 변화가 없기 때문에 x 에 관한 편미분 $\partial/\partial x$ 는 0이다. 이 때 맥스웰 방정식은 TM과 TE 모드로 분리된다.

(TM mode)

$$\partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z = i\omega\mu H_x, \quad (1)$$

$$\partial H_x/\partial z = (\sigma - i\omega\epsilon)E_y, \quad (2)$$

$$-\partial H_x/\partial y = (\sigma - i\omega\epsilon)E_z, \quad (3)$$

(TE mode)

$$\partial H_z/\partial y - \partial H_y/\partial z = (\sigma - i\omega\epsilon)E_x, \quad (4)$$

$$\partial E_x/\partial z = i\omega\mu H_y, \quad (5)$$

$$-\partial E_x/\partial y = i\omega\mu H_z, \quad (6)$$

이들을 통합하여 하나의 식으로 표시하면(Rodi, 1976)

$$\partial I/\partial y + \partial J/\partial z = -\gamma V, \quad (7)$$

$$\partial V/\partial z = -\eta J, \quad (8)$$

$$\partial V/\partial y = -\eta I, \quad (9)$$

이다. 여기서

	(TM mode)	(TE mode)
$V =$	H_x	E_x
$J =$	$-E_y$	H_y
$I =$	E_z	$-H_z$
$\eta =$	$\sigma - i\omega\epsilon$	$-i\omega\mu$
$\gamma =$	$-i\omega\mu$	$\sigma - i\omega\epsilon$

이다. (8), (9)식을 (7)식에 대입하면 다음과 같은 V 에 관한 2차 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \gamma V, \quad (10)$$

2차원 매질을 수직방향으로 M 개, 수평방향으로 N 개의 직사각형(반드시 직사각형일 필요는 없지만 여기서는 설명의 편의를 위해 직사각형을 대상으로 함) 요소로 분할하고 격자점에서의 V 값을 유한요소법으로 구해보자. 절점은 모두 $n = (M+1) \times (N+1)$ 개이다. 유한요소로 분할하는 영역 전체를 S , 영역 S 의 테두리를 외부경계, 그리고 개개의 요소 테두리를 내부경계라고 한다.

전자기장의 세기 V 는 형상함수(shape function) N_j 의 선형일차 결합(linear combination)으로 표시하면

$$V = \sum_{j=1}^n V_j N_j, \quad (11)$$

로 나타낼 수 있다. 가중잔여법(weighted residual method)에 의해 (10)식의 잔여에 가중함수 N_j 를 곱해 영역 S 에 대해 적분한 것을 0으로 놓으면

$$\int N_j \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \gamma V \right] dy dz = 0, \quad (12)$$

를 얻는다. 부분적분으로 V 에 관한 미분의 차수를 낮추면

$$\int \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + \gamma V \right] dy dz = \int \frac{N_j}{\eta} \frac{\partial V}{\partial y} dz + \int \frac{N_j}{\eta} \frac{\partial V}{\partial z} dy, \quad (13)$$

을 얻는다. 우변의 선적분은 외부경계를 통해 밖으로 나가는 플럭스(flux)에 관한 양이다.

우변 제 1항은 경계 $y=y_{\min}$ 과 $y=y_{\max}$ 에서의 적분이지만 이들은 경계를 모델영역에서 충분히 멀리 두면 플럭스는 0이므로 없어진다. 이것은 소위 Neumann 경계조건 $\partial V / \partial y = 0$ 이다. 우변 제 2항은 경계 $z=z_{\min}$ 과 $z=z_{\max}$ 에서의 적분이지만, 그 중 후자는 z_{\max} 을 충분히 크게 잡으면 전자기장은 감쇠해버리기 때문에 무시할 수 있다. 따라서 z_{\min} 에서의 적분만을 생각하면 된다. 그런데 $z=z_{\max}$ 에서는 보다 정확한 다음과 같은 impedance 경계조건을 적용할 수도 있다(Smith and Booker, 1991; Lee *et al.*, 2008).

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \sqrt{\eta} \gamma V = 0, \quad (14)$$

(13)식에 (14)식을 대입하면

$$\sum_{i=1}^n \int V_i \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} + \gamma N_i \right] dy dz = f_j, \quad (15)$$

를 얻는다. 여기서

$$f_j = \sum_{i=1}^n \int V_i \frac{N_j}{\eta} \frac{\partial N_i}{\partial y} dz + \sum_{i=1}^n \int V_i \frac{N_j}{\eta} \frac{\partial N_i}{\partial z} dy, \quad (16)$$

이다. (15)식과 같이 n 의 N_j 에 대해 얻어지는 연립방정식을 전체방정식이라고 부르며 이를 풀면 n 개의 V_i 를 구할 수 있다. 이와 같이 형상함수와 가중함수(혹은 시험함수)를 같은 함수 집합을 이용하여 사용하는 것을 Galerkin 법에 의한 유한요소법이라 한다. 전체방정식을 행렬방정식으로 쓰면

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (17)$$

이고 행렬의 내용을 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & & & & \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & & \\ & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & \mathbf{A}_{M-1} + \mathbf{A}_M & \mathbf{B}_M \\ & & & & \mathbf{B}_M & \mathbf{A}_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_M \\ \mathbf{v}_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

여기서 \mathbf{v}_i 는 $\mathbf{z} = \mathbf{z}_i$ 상의 격자점 값으로 이루어진 $(N+1)$ 차의 벡터

$$\mathbf{v}_i = (V_{i,1}, V_{i,2}, \dots, V_{i,N}, V_{i,N+1})^T, \quad (19)$$

이다(Fig. 1). \mathbf{A} 와 \mathbf{B} 의 구체적인 내용은 아래 요소방정식 부분과 MOM 법 부분에서 언급한다.

경계조건

경계조건을 TM 모드와 TE 모드로 나누어 설명한다. 먼저 TM 모드의 경우 V 는 자기장 H_x 이다. 공기층에서 자기장의 변화는 매우 작으므로 영역 상단을 지표면으로 하고 그곳에서 그 크기를 1로 하면

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{1}, \quad (20)$$

이다. (18)식 \mathbf{K} 의 제 1열과 제 1행을 제거하고 위의 식을 이용하여 정리하면 풀어야 할 전체방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & & & \\ & \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & & \\ & & \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}_1 \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (21)$$

TE모드의 경우 V 는 전기장 E_x 이다. 대기 중에서 전기장은 변하므로 영역의 상단은 지표면보다 충분히 먼 상공에 있다고 가정한다. 입사 평면파는 E_x 성분과 H_y 성분을 가지므로 영역을 상단에서 $H_y = 1$, $H_z = 0$ 라고 놓으면 (16)식은

$$f_{1,j} = \int \frac{N_{1,j}}{\eta} dy = \frac{w_{j-1}}{2\eta_{1,j-1}} + \frac{w_j}{2\eta_{1,j}}, \quad (22)$$

이 된다. 여기서 w_j 는 j 번째 절점과 $j+1$ 번째 절점간의 길이이다(Fig. 1). 이를 (18)식에 대입하면 풀어야 할 전체방정식이 확정된다.

요소방정식

전체 영역 S 를 직사각형 요소로 분할하였을 때 네 개의 격자점 (i, j) , $(i, j+1)$, $(i+1, j)$ 및 $(i+1, j+1)$ 로 이루어진 하나의 직사각형 요소를 생각한다. (15)식의 N_j 에 격자점 (i, j) 에서만 1이 되는 형상함수 $N_{i,j}$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} K_1 V_{i,j} + K_2 V_{i,j+1} + K_3 V_{i+1,j} + K_4 V_{i+1,j+1} \\ = -R_1 q_{i,j} - R_2 q_{i+1,j} + M_1 g_{i,j} + M_2 g_{i,j+1}, \end{aligned} \quad (23)$$

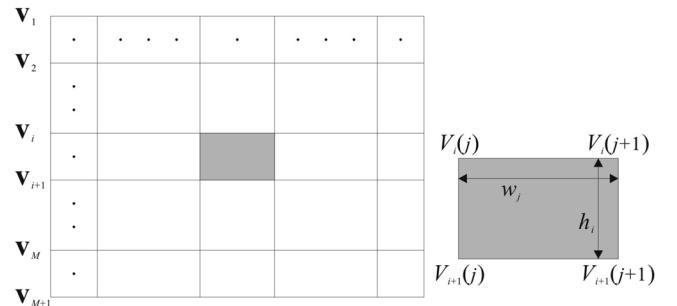


Fig. 1. A rectangular mesh. The vector \mathbf{v}_i contains $N+1$ values of V along a row of nodes. The (i, j) th mesh, shaded and enlarged in the right, has parameters h_i , w_j , $\eta_i(j)$, and $\gamma(j)$.

이다. 여기서

$$K_1 = \int \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial z} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial z} + \gamma N_{i,j} \right] dydz$$

$$= \frac{h_i}{3w_j\eta} + \frac{w_j}{3h_j\eta} + \frac{\gamma h_i w_j}{9}, \quad (24)$$

$$K_2 = \int \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial N_{i+1,j}}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial z} \frac{\partial N_{i+1,j}}{\partial z} + \gamma N_{i+1,j} \right] dydz$$

$$= -\frac{h_i}{3w_j\eta} + \frac{w_j}{6h_j\eta} + \frac{\gamma h_i w_j}{18}, \quad (25)$$

$$K_3 = \int \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial N_{i+1,j+1}}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial z} \frac{\partial N_{i+1,j+1}}{\partial z} + \gamma N_{i+1,j+1} \right] dydz$$

$$= \frac{h_i}{6w_j\eta} - \frac{w_j}{3h_j\eta} + \frac{\gamma h_i w_j}{18}, \quad (26)$$

$$K_4 = \int \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial N_{i+1,j+1}}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial N_{i,j}}{\partial z} \frac{\partial N_{i+1,j+1}}{\partial z} + \gamma N_{i+1,j+1} \right] dydz$$

$$= -\frac{h_i}{6w_j\eta} - \frac{w_j}{6h_j\eta} + \frac{\gamma h_i w_j}{36}, \quad (27)$$

$$R_1 = \int \frac{N_{i,j} N_{i,j}}{\eta} dz = \frac{h_i}{3\eta}, \quad (28)$$

$$R_2 = \int \frac{N_{i,j} N_{i+1,j}}{\eta} dz = \frac{h_i}{6\eta}, \quad (29)$$

$$M_1 = \int \frac{N_{i,j} N_{i,j}}{\eta} dz = \frac{w_j}{3\eta}, \quad (30)$$

$$M_2 = \int \frac{N_{i,j} N_{i+1,j}}{\eta} dz = \frac{w_j}{6\eta}, \quad (31)$$

$$q = \partial V / \partial y, \quad (32)$$

$$g = \partial V / \partial z, \quad (33)$$

이다. 위의 유도에서는 직사각형 요소의 경우 적분이 해석적으로 구해지지만, 일반적인 사각형 요소라면 수치적분에 의존하게 된다. 위와 같은 방법으로 (15)식의 N_j 에 $N_{i+1,j}$, $N_{i+1,j}$, $N_{i+1,j+1}$ 을 차례로 대입하여 얻어지는 4개의 식을 행렬식으로 정리하면 하나의 요소마다 다음과 같은 요소방정식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_2 & K_1 & K_4 & K_3 \\ K_3 & K_4 & K_1 & K_2 \\ K_4 & K_3 & K_2 & K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{i,j} \\ V_{i,j+1} \\ V_{i+1,j} \\ V_{i+1,j+1} \end{pmatrix} =$$

$$- \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & -R_2 \\ R_2 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & -R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{i,j} \\ q_{i,j+1} \\ q_{i+1,j} \\ q_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0 \\ M_2 & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_1 & -M_2 \\ 0 & 0 & -M_2 & -M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{i,j} \\ g_{i,j+1} \\ g_{i+1,j} \\ g_{i+1,j+1} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

(34)식의 우변은 요소 경계에 관한 항이지만 요소방정식을 합쳐서 전체방정식을 만들면 내부경계에서는 경계 양쪽의 값이 서로 상쇄되어 없어지고 외부경계에서 경계조건만이 남는다.

사변형 요소

일반적으로 불규칙한 지형을 구현하기 위해서는 삼각형 요소를 이용하여 지형 모델을 구현하거나 지형 변화에 따라 직사각형 요소를 수직적으로 변형시켜 근사적으로 지형을 구현한다. 이런 일반 사변형 요소를 사용하여 지형을 포함하는 모델링을 하고자 할 때와 같이 분할된 요소가 직사각형이 아닌 경우에도 유한요소 방정식의 요소에 대한 면적분(24)~(27)식 계산을 효율적으로 한다면 큰 시간의 증가 없이 지형 모형에 대한 모델링을 구현할 수 있으며, 역산에서도 지형의 효과를 고려할 수 있게 된다.

일반적인 사변형 요소에 대한 면적분은 기준요소법(master element technique)을 이용하면 매우 편리하다. Fig. 2에서와 같이 모든 사변형 요소를 각각 하나의 기준요소(master element)로의 사상(mapping)

$$T: x = x(\xi, \zeta), \quad z = z(\xi, \zeta), \quad (35)$$

으로 표현하여 다음과 같은 적분관계식

$$\int g(x, z)(dx)dz = \int g(x(\xi, \zeta), z(\xi, \zeta)) |J| d\xi d\zeta, \quad (36)$$

을 이용하는 것이다. 즉, 요소 변환 사상을

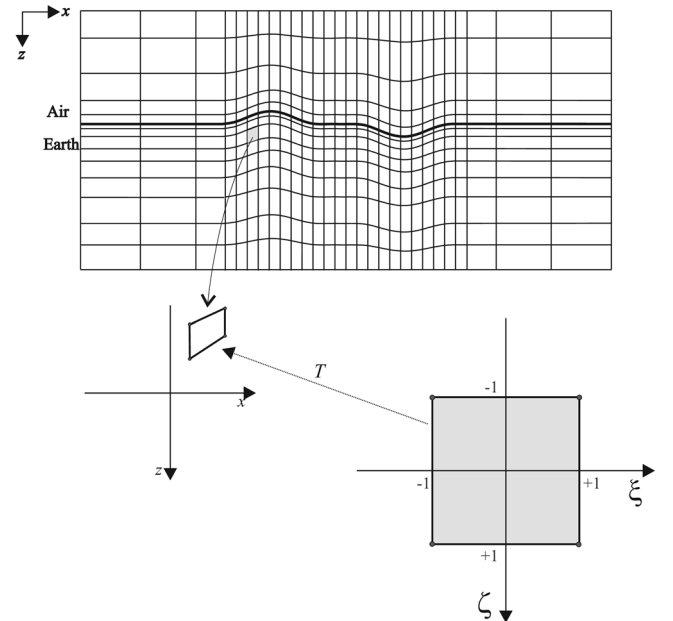


Fig. 2. Schematic of the integration of MT finite element equations over an element with a master element technique. Master element is here defined an rectangular with the nodes at (1, 1), (1, -1), (-1, -1), and (-1, 1).

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -M_{1,1} & -M_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -M_{2,1} & -M_{2,2} & -M_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_{3,2} & -M_{3,3} & -M_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_{4,3} & -M_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M_{1,1} & -M_{1,2} & 0 & 0 & K_{1,1} & K_{1,2} & 0 & 0 & K_{1,5} & K_{1,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M_{2,1} & -M_{2,2} & -M_{2,3} & 0 & K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & 0 & K_{2,5} & K_{2,6} & K_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -M_{3,2} & -M_{3,3} & -M_{3,4} & 0 & K_{3,2} & K_{3,3} & K_{3,4} & 0 & K_{3,6} & K_{3,7} & K_{3,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -M_{4,3} & -M_{4,4} & 0 & 0 & K_{4,3} & K_{4,4} & 0 & 0 & K_{4,7} & K_{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{5,1} & K_{5,2} & 0 & 0 & K_{5,5} & K_{5,6} & 0 & 0 & K_{5,9} & K_{5,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{6,1} & K_{6,2} & K_{6,3} & 0 & K_{6,5} & K_{6,6} & K_{6,7} & 0 & K_{6,9} & K_{6,10} & K_{6,11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{7,2} & K_{7,3} & K_{7,4} & 0 & K_{7,6} & K_{7,7} & K_{7,8} & 0 & K_{7,10} & K_{7,11} & K_{7,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{8,3} & K_{8,4} & 0 & 0 & K_{8,7} & K_{8,8} & 0 & 0 & K_{8,11} & K_{8,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{9,5} & K_{9,6} & 0 & 0 & K_{9,9} & K_{9,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10,5} & K_{10,6} & K_{10,7} & 0 & K_{10,9} & K_{10,10} & K_{10,11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11,6} & K_{11,7} & K_{11,8} & 0 & K_{11,10} & K_{11,11} & K_{11,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12,7} & K_{12,8} & 0 & 0 & K_{12,11} & K_{12,12}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
g_1 \\
g_2 \\
g_3 \\
g_4 \\
v_1 \\
v_2 \\
v_3 \\
v_4 \\
v_5 \\
v_6 \\
v_7 \\
v_8 \\
v_9 \\
v_{10} \\
v_{11} \\
v_{12}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-M_{1,1} - M_{1,2} \\
-M_{2,1} - M_{2,2} - M_{2,3} \\
-M_{3,2} - M_{3,3} - M_{3,4} \\
-M_{4,3} - M_{4,4} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}$$

Fig. 4. Total equation in the Rodi's (1976) MOM method for the 3×4 mesh with sequential node numbering along the horizontal direction shown in Fig. 3a.

$$\begin{pmatrix}
K_{1,1} & -M_{1,1} & K_{1,2} & -M_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{1,5} & K_{1,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M_{1,1} & 0 & -M_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{2,1} & -M_{2,1} & K_{2,2} & -M_{2,2} & K_{2,3} & -M_{2,3} & 0 & 0 & K_{2,5} & K_{2,6} & K_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M_{2,1} & 0 & -M_{2,2} & 0 & -M_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{3,2} & -M_{3,2} & K_{3,3} & -M_{3,3} & K_{3,4} & -M_{3,4} & 0 & K_{3,6} & K_{3,7} & K_{3,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -M_{3,2} & 0 & -M_{3,3} & 0 & -M_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{4,3} & -M_{4,3} & K_{4,4} & -M_{4,4} & 0 & 0 & K_{4,7} & K_{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -M_{4,3} & 0 & -M_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{5,1} & 0 & K_{5,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{5,5} & K_{5,6} & 0 & 0 & K_{5,9} & K_{5,10} & 0 & 0 \\
K_{6,1} & 0 & K_{6,2} & 0 & K_{6,3} & 0 & 0 & 0 & K_{6,5} & K_{6,6} & K_{6,7} & 0 & K_{6,9} & K_{6,10} & K_{6,11} & 0 \\
0 & 0 & K_{7,2} & 0 & K_{7,3} & 0 & K_{7,4} & 0 & 0 & K_{7,6} & K_{7,7} & K_{7,8} & 0 & K_{7,10} & K_{7,11} & K_{7,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{8,3} & 0 & K_{8,4} & 0 & 0 & 0 & K_{8,7} & K_{8,8} & 0 & 0 & K_{8,11} & K_{8,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{9,5} & K_{9,6} & 0 & 0 & K_{9,9} & K_{9,10} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10,5} & K_{10,6} & K_{10,7} & 0 & K_{10,9} & K_{10,10} & K_{10,11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11,6} & K_{11,7} & K_{11,8} & 0 & K_{11,10} & K_{11,11} & K_{11,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12,7} & K_{12,8} & 0 & 0 & K_{12,11} & K_{12,12}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
v_1 \\
g_1 \\
v_2 \\
g_2 \\
v_3 \\
g_3 \\
v_4 \\
g_4 \\
v_5 \\
v_6 \\
v_7 \\
v_8 \\
v_9 \\
v_{10} \\
v_{11} \\
v_{12}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
-M_{1,1} - M_{1,2} \\
0 \\
-M_{2,1} - M_{2,2} - M_{2,3} \\
0 \\
-M_{3,2} - M_{3,3} - M_{3,4} \\
0 \\
-M_{4,3} - M_{4,4} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}$$

Fig. 5. Total equation in the Sheen's (2000) modified MOM method for the 3×4 mesh with sequential node numbering along the horizontal direction shown in Fig. 3a.

$$\begin{pmatrix}
K_{1,1} & -M_{1,1} & K_{1,2} & 0 & K_{1,4} & -M_{1,4} & K_{1,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M_{1,1} & 0 & 0 & 0 & -M_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{2,1} & 0 & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} & 0 & K_{2,5} & K_{2,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{3,2} & K_{3,3} & 0 & 0 & K_{3,5} & K_{3,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{4,1} & -M_{4,1} & K_{4,2} & 0 & K_{4,4} & -M_{4,4} & K_{4,5} & 0 & K_{4,7} & -M_{6,7} & K_{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M_{4,1} & 0 & 0 & 0 & -M_{4,4} & 0 & 0 & 0 & -M_{4,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{5,1} & 0 & K_{5,2} & K_{5,3} & K_{5,4} & 0 & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,7} & 0 & K_{5,8} & K_{5,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_{6,2} & K_{6,3} & 0 & 0 & K_{6,5} & K_{6,6} & 0 & 0 & K_{6,8} & K_{6,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{7,4} & -M_{7,4} & K_{7,5} & 0 & K_{7,7} & -M_{7,7} & K_{7,8} & 0 & K_{7,10} & -M_{7,10} & K_{7,11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -M_{7,4} & 0 & 0 & 0 & -M_{7,7} & 0 & 0 & 0 & -M_{7,10} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{8,4} & 0 & K_{8,5} & K_{8,6} & K_{8,7} & 0 & K_{8,8} & K_{8,9} & K_{8,10} & 0 & K_{8,11} & K_{8,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{9,5} & K_{9,6} & 0 & 0 & K_{9,8} & K_{9,9} & 0 & 0 & K_{9,11} & K_{9,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10,7} & -M_{10,7} & K_{10,8} & 0 & K_{10,10} & -M_{10,10} & K_{10,11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_{10,7} & 0 & 0 & 0 & -M_{10,10} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11,7} & 0 & K_{11,8} & K_{11,9} & K_{11,10} & 0 & K_{11,11} & K_{11,12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12,8} & K_{12,9} & 0 & 0 & K_{12,11} & K_{12,12}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
v_1 \\
g_1 \\
v_2 \\
v_3 \\
v_4 \\
g_4 \\
v_5 \\
v_6 \\
v_7 \\
g_7 \\
v_8 \\
v_9 \\
v_{10} \\
g_{10} \\
v_{11} \\
v_{12}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
-M_{1,3} - M_{1,4} \\
0 \\
0 \\
0 \\
-M_{4,1} - M_{4,4} - M_{4,7} \\
0 \\
0 \\
0 \\
-M_{7,4} - M_{7,7} - M_{7,10} \\
0 \\
0 \\
0 \\
-M_{10,7} - M_{10,10} \\
0 \\
0
\end{pmatrix}$$

Fig. 6. Total equation in the Sheen's (2000) modified MOM method for the 3×4 mesh with sequential node numbering along the vertical direction shown in Fig. 3b.

개선하는 방법이 있음을 보여주었다. 설명의 편의를 위해 Fig. 3과 같은 3×4의 작은 격자망을 생각해 보자. 우선 위의 설명 그대로 격자점 일련번호를 Fig. 3a와 같이 가로 방향으로 붙인 경우의 MOM 전체방정식은 Fig. 4와 같이 될 것이다. 계수행렬은 여전히 대칭이기 때문에 결국은 미지수가 16 (=12+4), 띠폭(band width)이 6인 16×6의 행렬을 풀면 된다. 그러나 첫 번째 대각요소가 0이기 때문에 pivoting이 필요하다. 이러한 비효율성은 전체방정식을 Fig. 5와 같이 변경하면 해결될 수 있다. 풀어야 할 행렬은 16×10으로 늘어나지만 첫 대각요소가 0이 아니라서 LU 분해 시 pivoting이 필요 없어서 계산 시간은 대폭 줄어든다. 이러한 방식을 일련번호를 Fig. 3b와 같이 세로 방향으로 붙인 경우에 적용하면 수정 MOM 전체방정식은 Fig. 6과 같이 된다. 풀어야 할 행렬은 16×7로 줄어들고 pivoting 역시 필요 없다. MT 모델링의 경우 일반적으로 FEM 격자망이 가로 방향보다 세로 방향이 더 긴 것이 일반적이기 때문에 결국 Fig. 6과 같은 방식이 계산효율 면에서 바람직하다.

Fig. 7에 MOM 법의 계산 정확도에 대한 비교를 나타내었다. 모델은 Rodi (1976)의 Fig. 3과 같은 수직 접촉구조이며, 격자망은 역시 Rodi (1976)의 Table 1 중 Mesh 1.2이다. 좌측 100 ohm-m 영역에서는 단순한 선형 근사(finite difference), Wannamaker *et al.* (1986)의 3점 근사 및 MOM 법 모두 해석해와 거의 비슷한 수준의 해를 줄 수 있으나, 우측의 1 ohm-m 영역에서는 단순한 선형 근사나 3점 근사로는 정밀도가 부족하고 MOM 법의 정밀도가 훨씬 높게 나타났다. Mesh 1.2의 지표 바로 밑의 요소의 두께는 200 m인데, 이는 보조장을 (주로 유한차분으로) 구하기 위해서는 0.01 Hz에서의 표피심도가 좌측 100 ohm-m 영역에서는 약 50 km로 충분히 작지만 우측의 1 ohm-m 영역에서는 약 5 km로 상대적으로 크기 때문이다.

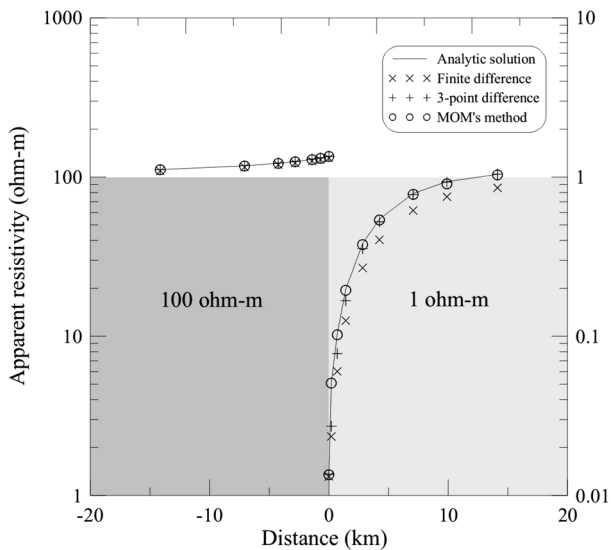


Fig. 7. TM-mode apparent resistivities over a vertical contact model at 0.01 Hz.

감도 계산

수정 MOM 법을 이용하면 종래의 MOM 법보다 계산시간이 대폭 줄어들지만, 역산을 목적으로 하지 않을 때는 MOM 법보다는 일반적인 FEM을 통해 전자기장을 구한 후 (47)식을 통해 보조장을 푸는 것이 시간도 빠르고 프로그래밍도 용이하다. 그러나 역산 등에서 전자기장의 모델 변수에 관한 편미분이 필요할 경우에는 MOM 법은 대단한 위력을 발휘하게 된다. MT 변수에 대한 편미분(감도, sensitivity)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial \rho} = \frac{2}{\omega \mu} \text{Re} \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} Z^* \right), \quad (54)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \cos^2 \phi \left\{ \text{Im} \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right) - \tan \phi \text{Re} \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right) \right\} / \text{Re}(Z), \quad (55)$$

여기서 ρ_a 는 겉보기비저항, ϕ 는 위상, Z 는 임피던스, 위첨자 *는 complex conjugate를 나타낸다. 그리고 임피던스의 모델 변수에 관한 편미분은 TE 모드의 경우

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho} = -\frac{1}{H_y} \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial \rho} - Z \frac{\partial H_x}{\partial \rho} \right\}, \quad (56)$$

이고, TM 모드의 경우

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho} = \frac{1}{H_x} \left\{ \frac{\partial E_y}{\partial \rho} - Z \frac{\partial H_y}{\partial \rho} \right\}, \quad (57)$$

이다. 이렇게 어느 쪽 모드이던 간에 감도를 구하기 위해서는 전기장과 자기장 양쪽의 편미분이 필요하다. MOM 법이나 수정 MOM 법은 하나의 전체방정식으로 양쪽 전자기장을 구할 수 있으므로 감도를 상반성원리(reciprocity principle)를 이용하여 구하고자 할 때 대단히 효율적이다. 가장 소스와 상반성을 이용한 효율적인 편미분 계산법에 관해서는 김희준 등 (2004)을 참고하기 바란다.

결 언

지표 지형이 포함된 모델링의 경우에는 직사각형 요소가 아니라 일반 사변형 요소를 쓰는 것이 편리하다(이성곤 등, 2002). 다만 이 경우는 요소방정식을 유도할 때 수치적분에 의존해야 한다. Rodi (1976)의 MOM 법은 전기장과 자기장을 동시에 구하기 때문에 정확한 보조장을 구할 때 유용한 방법이지만, 모델링만 하고자 할 때는 한쪽 전자기장을 구하고 난 후에 다른 한쪽은 별도로 (47)식으로 구하면 된다. MOM 법의 진가는 역산에 필요한 편미분을 구할 때 나타나지만, 기존의 방식을 그대로 사용하는 것은 너무 비효율적이다. 이 때는 반드시 Fig. 6과 같은 수정 MOM 법을 사용하는 것이 계산 효율 면에서 바람직하다.

사 사

이 연구는 한국지질자원연구원 기본사업인 ‘지열수 자원 실용화 기술 개발’의 지원과, 2006년 교육인적자원부의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행되었다(KRF-2006-311-D00985).

참고문헌

- 김희준, 남명진, 한누리, 최지향, 이태중, 송윤호, 서정희, 2004, MT 자료의 3차원 역산 개관, 물리탐사, **7**, 207-212.
- 송윤호, 이태중, Uchida, T., 2006, 가칭주파수 대역 MT 탐사자료에서 원거리 기준점의 효과, 한국지구시스템공학회지, **43**, 44-54.
- 이성근, 송윤호, 조성준, 손정술, 정승환, 2002, 지형을 포함한 MT 탐사 자료의 2차원 모델링과 역산, 물리탐사, **5**, 291-298.
- 이춘기, 권병두, 이희순, 조인기, 오석훈, 송윤호, 이태중, 2007, 한반도 횡단 자기지전류 탐사에 의한 상부 지각의 지전기적 구조 연구, 한국지구과학회지, **28**, 187-201.
- Lee, S. K., Kim, H. J., Lee, C.-K., and Song, Y., 2008, MT2DInvMatlab-A program in MATLAB and FORTRAN for two-dimensional magnetotelluric inversion, *Computers & Geoscience*. (in minor revision)
- Lee, T. J., Lee, S. K., Song, Y., and Uchida, T., 2006, The deep geological structure of Jeju Island from 2-D interpretation of AMT and MT data, *Proc. 8th SEGJ Int. Symp.*, 109-114.
- Nam, M. J., Kim, H. J., Song, Y., Lee, T. J., and Suh, J. H., 2006, Three-Dimensional Correction in Magnetotelluric Surveys Using Edge Finite-Element Modeling, *Proc. 10th Int. Symp. RAEG 2006*, 59-64.
- Rodi, W. L., 1976, A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **44**, 483-506.
- Sheen, D.-H., Kim, H. J., and Baag, C.-E., 2000, A technique for improving the efficiency of finite element solutions in magnetotelluric modeling, *70th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 442-445.
- Smith, J. T., and Booker, J. R., 1991, Rapid inversion of two- and three-dimensional magnetotelluric data, *J. Geophys. Res.*, **96**, 3905-3922.
- Uchida, T., Song, Y., Lee, T. J., Lee, S. K., and Lim, S. K., 2006, Far remote reference analysis of MT and AMT data in Jeju Island, Korea, *Proc. 10th Int. Symp. RAEG 2006*, 75-78.
- Wannamaker, P. E., Stodt, J. A., and Rijo, L., 1986, Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements, *Geophysics*, **51**, 2131-2144.