

일반화된 도함수의 이산적 구현

김태식* , 김경원**

요약

정칙적인 곡선이나 곡면에 대해서만 적용되고 있는 전통적인 개념의 미적분을 복잡하고 비 정칙적인 대상에도 적용할 수 있는 방법들이 다양하게 시도되고 있다. 이에 본 논문에서는 비 정수 차수의 도함수를 직분의 한 형태로 변환하여 표현하는 방법을 알아보고 이를 효과적으로 구현함으로써 실제적인 응용을 할 수 있게 하였다.

Discrete construction of generalized derivative functions

Tae Sik Kim*, KyungW Kim**

Abstract

The variation of real phenomena and shape of nature in our world is so complicated that some mathematical tools using the traditional geometric methods based on the Euclidean geometry and analytical differential method may be irrelevant or insufficient in some problems. Recently, to deal with these circumstances, one can use the fractal geometric method. As another measures, in this paper we introduce the non-integral order derivative function for the analytical method and construct to facilitate their calculation.

Keywords : 감마함수, Riemann Liouville 적분, 일반화된 미적분

1. 서론

주변에서 관찰되는 자연적인 현상이나 형상들의 세부적인 모습을 살펴보면, 그들의 변화량이 매우 불규칙적이며 형태상 심한 비 정칙성을 지닌 경우 많다. 이와 같은 경우, 이들의 변화량이나 형태적 모습의 특성을 조사하기 위하여, 함수의 국소적으로 부드러움을 전제로 전개된 유클리드 기반의 전통적인 기하학적 접근법이나 극한 개념에서 출발한 기존의 미적분학적 접근의 직접적인 활용이 어렵게 된다. 따라서 주어진 그래프를 국부적인 직선이나 평면들의 무한개의 조각들로 결합된 연속체로 간주함으로써 곡선의 길이나 곡면의 면적 등을 정의하거나, 원, 삼각

형, 사각형 등의 기본적인 기하학적 요소들로 형태학적 접근을 하는 기하학적 접근이 만족스럽게 적용되지 않을 수 있다. 따라서 복잡계 현상으로 주로 나타나는 많은 현상들을 기존의 기학적 접근법 대신 프랙탈 기하학이란 새로운 개념으로 표현하려는 시도가 활발히 이루어지고 있다. 이러한 프랙탈적 접근에서, 프랙탈 차원이라는 비 정수 차원이 중요한 정량적 분석 도구로 이용되나 이 값의 실제적인 계산에는 많은 어려움이 있다. 한편 기존의 해석학적 수단으로 흔히 이용되는 미적분학적 개념을 프랙탈 곡선이나 곡면등과 같은 비정상 상태의 기하학적 개체에도 확대 적용할 수 있게 원래 정의된 도함수 개념을 비 정수 차수에도 적용될 수 있게 일반화할 필요가 있다.

2. 미적분함수의 일반화

m 차 다항함수 $f(t) = t^m$ 의 n 차수 정수차 미분을 식으로 나타내면

※ 제일저자(First Author) : 김태식
접수일자:2008년01월31일, 심사완료:2008년02월20일
*경주대학교 관광정보학과
tskim@gju.ac.kr
** 경주대학교 환경공학과
▣ 본 연구는 환경부 “차세대 핵심환경기술개발사업”으로부터 일부 지원받은 과제임(010020055).

$$D^n(f(t)) = m(m-1)\cdots(m-n+1)t^{m-n} \quad (1)$$

이 되는 것을 알고 있다. 또한 이 함수 $f(t) = t^m$ 의 부정적분을 역 미분으로 표시하여

$$D^{-1}f(t) = \int_0^t u^m du = \frac{1}{m+1} t^{m+1} \quad (2)$$

으로 나타내고, n 차수 중적분을 다음 식으로 나타낼 수 있다:

$$D^{-n}f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \\ = \frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} t^{m+n} \quad (3)$$

다음으로 지수함수 $f(t) = e^{kt}$ 에 대한 n 차수 정수 차 미분에 대한 식의 표현은

$$D^n(e^{kt}) = k^n e^{kt} \quad (4)$$

이 된다. 이 지수함수 $f(t) = e^{kt}$ 에 대한 원시함수는 1차 역 미분으로 간주하여 다음 식

$$D^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^t e^{ku} du = \frac{1}{k} e^{kt} \quad (5)$$

으로 나타내고, 이의 n 차수 중적분을

$$D^{-n}f(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_{m-1}} e^{kt_m} dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 \quad (6)$$

으로 표현하게 된다.

한편 $t > 0$ 에 대해 감마함수는 다음 식으로 정의 된다:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{t-1} du, \quad (7)$$

이 적분 식을 부분 적분함으로 다음의 결과를 얻을 수 있다:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(t+1) = t \Gamma(t). \quad (8)$$

이로부터 임의 자연수 n 에 대해

$$\Gamma(n+1) = n!$$

이 성립함을 유도하게 된다. 위 식 (8)로부터 $t+n > 0$ 즉 $n > -t$ 을 만족하는 임의의 정수 n 에 대해서 다음 식

$$\Gamma(t) = \Gamma(t+1)/t = \Gamma(t+2)/t(t+1) = \cdots \\ = \Gamma(t+n)/t(t+1)\cdots(t+n-1) \quad (9)$$

을 유추하게 된다. 이로부터 함수의 정의구역을 모든 실수로 확대하기로 한다. 비록 0과 모든 음의 정수 n 을 위 식 (9)에 적용하면 함수 값이 $\pm\infty$ 로 발산하지만 이외의 음수값에 대해서는 자연스럽게 함수 값이 정의되게 된다. 이렇게 확대 정의된 감마함수의 성질을 이용하여 $f(t) = t^m$ 에 대한 확장된 미적분식을

$$D f(t) = (m+1) / (m+1-t) t^{m-t} \quad (10)$$

으로 정의하면, 앞에서 정의된 기존의 정수 차 미적분식 (1)과 (3)의 확장된 개념이 됨을 확인할 수 있다. 특히 $t=1$ 이면 1차원 미분이 되고 $t=-1$ 이면 역 미분 즉 적분식 (2)가 된다.

다음으로 지수함수에 대해서도 확장된 미적분식으로 다음 식

$$D(e^{kt}) = k e^{kt} \quad (11)$$

을 정의하면, 앞에서 정의된 기존의 정수 차 미적분식 (4)과 (6)의 확장된 개념임을 확인할 수 있다. 특히 $t=1$ 이면 1차원 미분이 되고 $t=-1$ 이면 역 미분 즉 적분식 (5)가 된다.

한편 위 지수함수 $f(t) = e^{kt}$ 의 Taylor 급수 전개를 가정한 뒤 항별 미분을 할 때

$$D(e^{kt}) = D\left(\sum_{n=0}^{\infty} (t^n/n!)\right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \frac{(n+1)}{(n+1-t)} k^n t^{n-t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1-)} k^n t^{n-} \quad (12)$$

가 되어 위 식 (11)과 일치하지 않는 문제점이 야기된다. 이러한 불일치에 대한 해결책으로 근래에는 연속 함수 $f(t)$ 와 $\langle 0$ 에 대한 다음의 Riemann-Liouville 적분식

$$D_a f(t) = -\frac{1}{(-)} \int_a^t f(u)(t-u)^{-1} du \quad (13)$$

으로 정의된 적분식을 이용한 분수차 적분의 응용이 활용되기도 한다.

예로서 이 적분식 (13)에 $a=0$ 이라 두고 $f(t) = t^m$ 함수를 적용할 경우, $u = yt$ 로의 치환을 통해

$$\begin{aligned} D_a(f(t)) &= -\frac{1}{(-)} \int_0^t u^m (t-u)^{-1} du \\ &= -\frac{1}{(-)} t^{m-} \int_0^1 y^m (1-y)^{-1} dy \\ &= -\frac{1}{(-)} t^{m-} (m+1, -) \\ &= -\frac{(m+1)}{(m+1-)} t^{m-} \end{aligned}$$

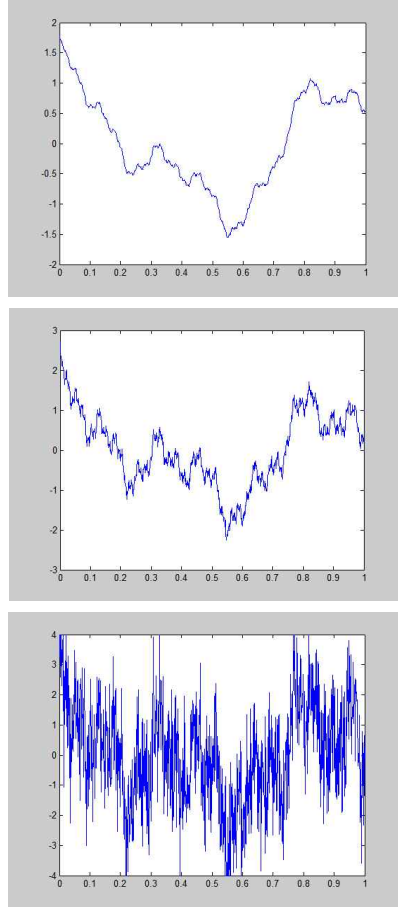
이 얻어지고 따라서 확장된 미적분식 (10)이 유도 되게 된다.

마찬가지로 $a = -\infty$ 로 두고 $f(t) = e^{kt}$ 에 대해 (13)식을 적용해 보면 확장된 미적분식 (11)이 유도된다는 것도 잘 알려진 사실이다.

이제 $[0, 1]$ 에서 정의된 실함수로서 연속이지만 전통적인 개념의 미분 관점에서 미분 불능인 함수의 예로서 다음에 정의된 Weierstrass 함수를 생각해 보기로 한다:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -nH \cos(2^n t) \quad (14)$$

$H=2.5$ 와 값이 각각 0.9, 0.5, 0.1 일 때 이 함수의 그래프는 그림 1에 나타나 있다. 그림에서 보여주는 바와 같으며 이 함수는 $1/f$ 잡음의 한 유형으로 시각적으로 프랙탈 곡선이 됨을 알 수 있다. 실제로 이 곡선의 프랙탈 차원을 계산해 보자.



(그림 1) Weierstrass 함수의 그래프 $H=2.5$
(위 쪽: $=0.9$, 중앙 $=0.5$, 아래쪽 $=0.1$)

이 함수를 고주파항과 저주파항으로 분리하여

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{n=0}^k -nH \cos(2^n t) \\ &+ \sum_{n=k+1}^{\infty} -nH \cos(2^n t) \\ &\equiv W_L(t) + W_H(t) \end{aligned}$$

으로 두면 고주파항의 신호크기는 $-kH$ 보다 적고, 저주파 신호의 크기는 $-kH$ 보다 크게 된다. 따라서 $= -k$ 크기의 박스로 함수 $W(t)$

의 그래프 $G(W)$ 를 덮을 최대 덮개 수 $N(G(W))$ 를 구하면

$$N(G(W)) = \frac{k \times (2-H)^k}{k} = (2-H)^k$$

이 된다. 따라서 이 곡선의 프랙탈 차원으로서 box dimension을 계산해 보면

$$\begin{aligned} \dim_B(G(W)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \log N(G(W)) / -\log(1/2) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (2-H)k \log(1/2) / k \log(1/2) \\ &= 2-H \end{aligned} \quad (15)$$

이 된다.

한편 Weierstrass 함수를 복소수 형태로 일반화한 식

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(2^j n t) \quad (16)$$

에 앞에서 정의한 일반화 미적분을 적용하면

$$\begin{aligned} D_a W(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(2^j n t) \\ &= (2-H) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(2^j n t) \end{aligned}$$

이 되고 $(2-H)$ 을 만족하는 H 에 대해 일반화된 도함수 값이 계산되게 된다.

3. 일반화된 미적분의 구현

앞 장에서 정의된 일반화된 미적분 값을 실제 정의를 이용하여 구하는 것은 매우 복잡한 계산식을 요구하므로 실질적인 응용에 많은 어려움이 따르고 있다. 이에 우리는 주어진 함수가 먼저 Taylor 급수전개가 되고 항별 미분이 된다는 전제로 효과적인 일반화된 미분을 구할 수 있는 알고리즘을 구축하고, 그 결과를 실제 값과 비교하여 봄으로 구축된 알고리즘의 유효성을 알아보기로 한다. 컴퓨터를 이용한 알고리즘 구축을 위하여 함수 $f(t)$ 를 이산화한 신호 $f(m)$ 를 생각할 때, 함수 $f(t)$ 를 Taylor 급수전개

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{을} \quad f(m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n m^n$$

으로 두고 항별 일반화 미분을 취함으로 다음 식

$$\begin{aligned} D_a(f(m)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_a(m^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(n+1)}{(n+1-H)} m^{n-H} \end{aligned} \quad (17)$$

을 얻는다. 한편 일반 미분연산자와 마찬가지로 일반화된 미적분 연산 또한 함수공간에서 일차변환의 성질을 지니고 있으므로 이 연산을 임펄스 응답 $h(n)$ 을 가진 $N+1$ 차 선형필터로 가정하여 다음 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} D_a f(m) &= \sum_{k=0}^N h(k) f(m-k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^N h(k) (m-k)^n \end{aligned} \quad (18)$$

이로부터 식 (17)과 (18)로부터

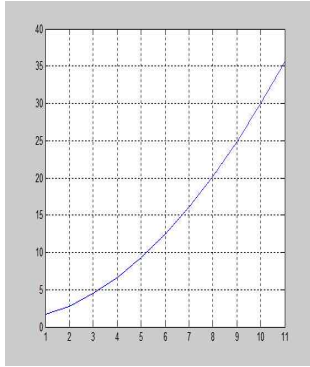
$$\sum_{k=0}^N h(k) (m-k)^n = \frac{(n+1)}{(n+1-H)} m^{n-H} \quad (19)$$

을 만족하는 $h(n)$ 을 구하기로 한다. 이 때 $N+1$ 개 미지수를 가지는 $h(n)$ 의 값을 유도하기 위해 필요한 식으로 (19)로부터 $N+1$ 개의 방정식을 유도 할 필요가 있다. 이를 위하여 n 을 0부터 N 사이의 정수로 각각 취하고 또한 계산의 편의를 위하여 $m = N+1$ 에서 다항함수에 대한 일반화된 미분값을 이용함으로 식 (19)를 만족하는 $h(n)$ 을 계산 할 수 있게 된다.

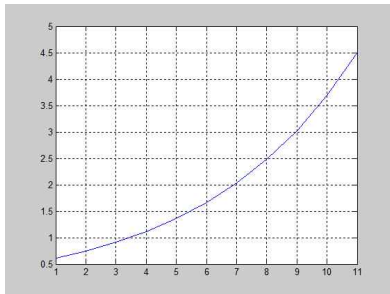
4. 구현 결과의 분석

일반화된 미분 계산을 위해 앞에서 유도된 점근법을 사용하는 것의 유효성을 검증하기 위하여 다항함수와 지수함수에 직접 적용하여 그 결과를 비교하기로 한다. 이를 위하여 (그림 2)에서 나타낸 다항함수 $f(t) = 1 + 0.5t + 0.25t^2$ 와 (그림 3)에서 나타낸 지수함수

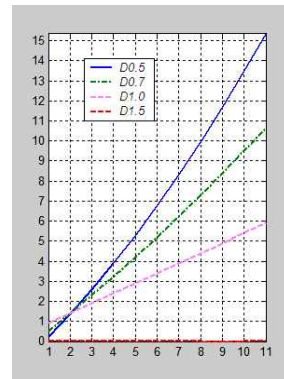
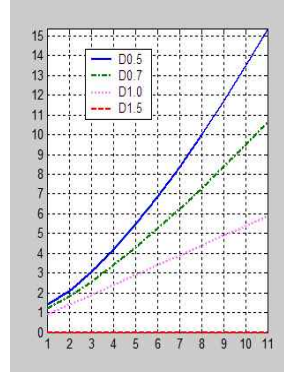
$f(t) = 0.5 \exp(0.2t)$ 에 대해 미분 차수 $= 0.5, 0.7, 1.0, 1.5$ 의 각 경우에 대해서 일반화된 미분 값을 $N=10$ 길이의 선형 필터로 유도한 값과 실제 수학적 계산식으로 구한 값들 간 서로 비교하여 (그림 2)와 (그림 4)에 나타내 보았다.



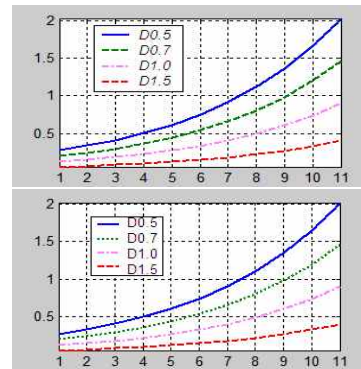
(그림 2)
 $f(t) = 1 + 0.5t + 0.25t^2$
의 그래프



(그림 3) $g(t) = 0.5 \exp(0.2t)$
의 그래프



(그림 4)
 $D_a^{0.5}(f), D_a^{0.7}(f), D_a^1(f), D_a^{1.5}(f)$
에 대한 그래프
(위쪽 : 계산된 값, 아래쪽 : 근사된 값)



(그림 5)
 $D_a^{0.5}(g), D_a^{0.7}(g), D_a^1(g), D_a^{1.5}(g)$
에 대한 그래프
(위쪽 : 계산된 값, 아래쪽 : 근사된 값)

5. 시정 영상의 일반화 미분

앞에서 정의 및 구현된 일반화된 미적분을 위한 연산 필터들을 외적 함으로 영상에 대해 일반화된 미적분 값을 보다 쉽게 계산할 수 있다. 예로서 서울의 시정 영상 분석을 위해 구축된 아래 (그림 6)의 시정 영상에 대해 앞에서 구축된 알고리즘을 이용하여 그 결과를 알아보기로 한다.



(그림 6) 서울시의 시정 영상

먼저 원 영상 I 에 대해 1차 미분한 $D^1(I)$ 와 1.5차 미분한 $D^{1.5}(I)$ 를 (그림 7)과 (그림 8)의 (a)에서 보여준다. 이 값들은 크기가 적은 관계로 어두운 영상을 생성함으로 밝기를 5배 크게 한 영상을 그림(b)에서, 이의 역상을 그림 (c)에서 각각 나타내고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 1.5차 미분한 영상이 1차 미분한 영상보다 더 세밀한 변화율을 계산하고 있음을 알고 있다. 원 영상이 JPEG 블록기반 압축한 영상에 근거함으로 인해 우리는 미분한 영상에서 블로킹 노이즈가 나타남을 알 수가 있다. 다음으로 시정 영상을 일반화된 역 미분 즉 일반화된 적분 연산을 한 영상에 대해 알아보기로 한다. (그림 9)는 -1차 미분한 영상으로 양의 미분이 국부적인 변화율을 표시함으로 복잡한 잡음을 많이 표시함에 비하여 음의 미분 영상은 원 영상에 대하여 평활 작용을 함으로 영상이 전반적으로 밝아지며 또한 국소적으로 부드러운 영상을 생성함을 알 수가 있다. 적분 차수를 높일수록 주어진 영상의 밝기값은 더욱 증대되어 영상의 정보가 잘 나타나지 않게 된다. 이에 (그림 10)과 (그림 11)의

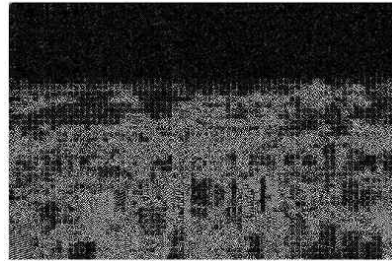
(a)와 (b)에서는 음수차 일반화된 미분을 한 영상에 대해 명암도를 0.005배 축소한 영상과 그 역상들을 각각 보여주고 있다.

6. 결론

본 논문에서는 기존의 미적분 연산을 비 정상적 특성을 가지는 함수에도 그 적용할 수 있게 일반화한 미적분의 연산적 정의를 살펴보고 이를 효과적으로 구현하기 위한 방법을 알아보았다.



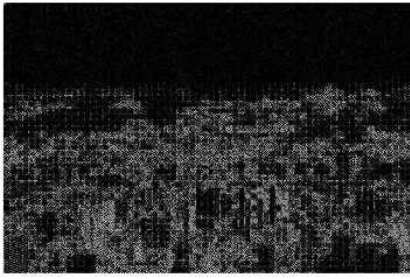
(a) 1차 미분영상 $D^1(I)$



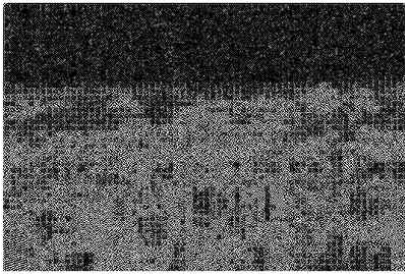
(b) (a)영상의 명암을 5배한 영상



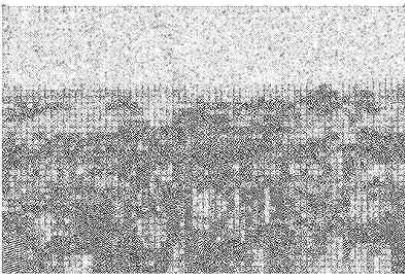
(c) (b)의 역상
(그림 7) 1차 미분 영상



(a) 1.5차 미분 영상 $D^{1.5}(I)$



(b) (a)영상의 명암을 5배한 영상



(c) (b)의 역상
(그림 8) 1.5차 미분 영상



(그림 9) -1차 미분한 영상 $D^{-1}(I)$

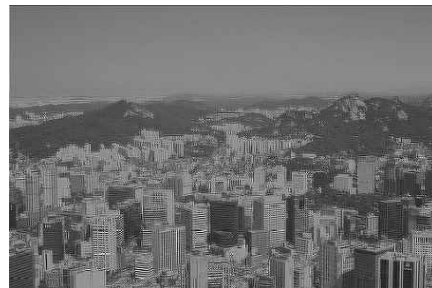


(a) -2차 미분한 명암을 0.005배한 영상

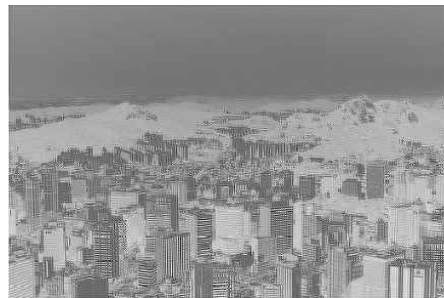


(b) (a)의 역상

(그림 10) -2차 미분한 영상 $D^{-2}(I)$



(a) -3.5차 미분한 명암을 0.005배한 영상



(b) (a)의 역상

(그림 11) -3.5차 미분한 영상 $D^{-3.5}(I)$

그리고 이 계산법을 실제 알고 있는 함수에 적용하여 본 바 구현된 방법으로 계산된 결과가 수학적으로 계산된 값과 아주 유사함을 확인할 수 있었다. 그렇지만 (그림 4)에서처럼 시작부분에서는 적은 정보량으로 일정부분 오차가 존재하는 경우가 있기도 하지만 이후 둘 사이의 값이 거의 비슷하게 전개됨을 알 수가 있다. 최종적으로 주어진 방법을 이용하여 실제 시정 영상에 적용하여 본 바 영상에 대해 미분과 적분의 특성이 확대 적용될 수 있음을 관찰 할 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Denisov, S.I., "Fractal dimension of random process", Chaos, Solitons and Fractals, vol. 9, pp. 1491-1496, 1988.
- [2] Kim, T.S., "Differentiability of fractal curves", Commun. Korean Math. Soc., vol. 20, pp. 827-835, 2005.
- [3] Kim, T.S. & S. Kim, "Singular spectra of fractional Brownian motions as a multi-fractal", Chaos, Solitons and Fractals, vol. 19, pp. 613-619, 2004.
- [4] Mainardi, F., "The fundamental solution solutions for the fractional diffusion-wave equation", App. Math. Lett., vol. 9, pp. 23-28, 1996.
- [5] Ortigueira M.D., "Introduction to fractional signal process", IEE Proc. Vis., Image Signal Process. vol. 147, pp. 62-70, 2000.

김 경 원



1998년 : 경희대학교 환경학과 (이
학사)
 2000년 : 광주과학기술원 환경공학
과 졸업 (공학석사)
 2004년 : 광주과학기술원 환경공학
과 졸업 (공학박사)
 2004년~현 재 : 경주대학교 환경공학과 교수
 관심분야 : 시정 관측 및 진단, 입자상물질, HSI 색
차법

김 태 식



1982년 : 경북대학교 수학과 졸업
(학사)
 1984년 : 경북대학교 대학원 수학과
과 졸업(이학석사)
 1996년 : 경북대학교 대학원 수학과
과 졸업(이학박사)
 2004년~현 재 : 경주대학교 관광정보학과 교수
 관심분야 : 프랙탈 및 카오스, 암호론, 영상통신