일종의 일차 비선형 시간 지연 시스템을 위한 안정성 분석 방법

A Stability Analysis Scheme for a Class of First-Order Nonlinear Time-Delay Systems

최 준 영*
(Joon-Young Choi)

Abstract : We analyze the stability property of a class of nonlinear time-delay systems with time-varying delays. We present a time-delay independent sufficient condition for the global asymptotic stability. In order to prove the sufficient condition, we exploit the inherent property of the considered systems instead of applying the Krasovskii or Razumikhin stability theory that may cause the mathematical difficulty of analysis. We prove the sufficient condition by constructing two sequences that represent the lower and upper bound variations of system state in time, and showing the two sequences converge to an identical point, which is the equilibrium point of the system. The simulation results illustrate the validity of the sufficient condition for the global asymptotic stability.

Keywords : nonlinear time-delay systems, time-varying delays, global asymptotic stability

I. 서론

[1]에서는 일종의 일차 비선형 시간 지연 시스템을 제안하고 안정성을 분석하였는데, 이러한 시스템은 [2]에서 제안된 FAST TCP의 모델과 [3]에서 소개된 일종의 delay logistic equation도 포함하는 것으로 조사된다. [1]에서의 분석 방법을 살펴 보면 시불변 시간 지연을 가정하여 Krasovskii 안정성 이론을 적용하였다. 즉, 시스템에 적절한 Lyapunov-Krasovskii functional을 고안하여 광역 점근적 안정성을 가능하게 해주는 충분조건을 제시하고 증명하였다. 그러나, 원래의 FAST TCP 동작 원리를 엄밀하게 고려하면 FAST TCP 모델이 시변 시간 지연을 표현하여야 하는데, [1]에서의 분석 방법으로는 시변 시간 지연을 포함한 시스템을 분석하는 것이 불가능하다.

한편, 시변 시간 지연을 포함한 비선형 시스템을 분석할 수 있는 일반적인 도구로는 Razumikhin 안정성 이론을 언급할 수 있는데, 이 이론을 적용하기 위하여는 시스템에 적절한 Lyapunov-Razumikhin function을 발견하거나 고안하여야 한다[4,5]. 그러나, [1]에서 제안된 시스템의 특이한 비선형성 때문에 적절한 Lyapunov-Razumikhin function을 고안하는 것은 수학적으로 매우 어려운 작업이다. 또한, Krasovskii 또는 Razumikhin 안정성 이론으로부터 얻어진 안정성 결과는 다소 보수적 이라는 것이 알려져 있다[4].

본 논문에서는 [1]에서 분석된 일차 비선형 시간 지연 시스템에서 고려되지 않은 시변 시간 지연을 포함하고, 시스템의 범위를 확장한 일종의 비선형 시간 지연 시스템의 안정성을 분석하는 방법을 제안한다. Krasovskii 또는 Razumikhin 안정성 이론을 적용하여 시스템을 분석할 때 수반될 수 있는 수학적 어려움을 극복하기 위하여 Krasovskii 또는 Razumikhin 이론 적용을 피하고 대신 시스템의 고유 특성을 적절하게 이용한다. 광역 점근적 안정성을 보장하는 충분조건을 시스템의 제어 매개변수의 함수 형태로 제시하고, 상태변수의 상계와 하계의 시간에 따른 변화를 나타내는 두 개의 수열을 구성하고 이 두 개의 수열이 시스템 상태변수의 평형점으로 수렴하는 것을 보임으로써 충분조건을 증명한다. 증명된 광역 점근적 안정성을 위한 충분조건은 [1]에서 제시된 충분조건에 비교하여 볼 때 완화된 것을 알 수 있다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2007. 11. 13., 채택확정 : 2008. 5. 6.
최준영 : 부산대학교 전자전기통신공학부 컴퓨터및정보통신연구소 (jyc@pusan.ac.kr)
※ 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

II. 문제 정의

본 논문에서 다루는 일차 비선형 시간지연 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \frac{d}{d + f(x(t-\tau(t)))}x(t) + \alpha \tag{1}$$

위 식의 초기조건은 다음과 같다.

$$x(t_0+\theta) = \eta(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [-\bar{\tau}, 0] \tag{2}$$

위 식에서 $x(t) \in R$ 는 상태 변수, d 는 양의 상수, α 는 양의 제어 매개 변수, $\tau(t)$ 는 시변 시간 지연으로 모든 $t \geq t_0$ 에 대하여 $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau} < \infty$ 를 만족하고, $\eta : [-\bar{\tau}, 0] \mapsto R_+$ 는 연속 함수, $f : R \mapsto R$ 는 R_+ 상에서 미분 가능한 함수이고, R_+ 는 0과 모든 양의 실수를 포함한 집합이다. (1)의 평형점을 x^* 라 하면 x^* 는 다음 식을 만족한다.

$$-x^* + \frac{d}{d+f(x^*)}x^* + \alpha = 0 \Rightarrow x^* = \alpha\left(1 + \frac{d}{f(x^*)}\right) \tag{3}$$

(1)에 포함된 함수 $f(\cdot)$ 는 정확하게 알려져 있지 않고 대신 다음과 같은 특성을 만족한다고 가정한다.

특성 1: (1)에 나타나 있는 함수 $f(\cdot)$ 의 독립변수에 관한 미분 값과 $f(0)$ 값은 아래와 같은 유계특성을 나타낸다.

(i) $0 \leq \dfrac{df(x)}{dx} < \infty$ for all $0 \leq x < \infty$

(ii) 다음의 부등식을 만족하는 양의 상수 ε 이 존재한다.

$$0 < \varepsilon \le \frac{df(x)}{dx} < \infty \quad \text{for all} \quad \alpha \le x < \infty$$

(iii) $f(0) > -d$

본 논문의 문제를 정확하게 기술하면 (2)의 초기조건을 갖는 비선형 시간 지연 시스템 (1)이 광역 점근적 안정성을 갖도록 하는 제어 매개변수 α 의 조건을 구하는 것이다. 표현을 간략하게 위하여 $x_\tau := x(t-\tau(t))$ 의 표기법을 논문 전체에서 사용할 것이다.

III. 상태 변수의 유계성

상태 변수 $x(t)$ 의 유계성에 관하여 분석을 하는데, 우선 아래의 보조 정리에서는 $x(t)$ 와 $f(x_\tau)$ 의 하계를 제시한다.

보조정리 1: (1)과 (2)로 정의되는 시스템의 상태변수 $x(t)$ 와 $f(x_\tau)$ 는 다음과 같이 하계를 갖는다.

$$x(t) > 0, f(x_\tau) > -d \quad \text{for all} \quad t > t_0 \tag{4}$$

증명: 시간 t_1 에서 $x(t)$ 가 0, 즉 $x(t_1) = 0$ 이라고 가정을 하면 다음과 같은 식을 (1)로부터 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t_1) = -x(t_1) + \frac{d}{d + f(x(t_1 - \tau(t_1)))} x(t_1) + \alpha = \alpha > 0 \tag{5}$$

시간 t_1 에서의 $x(t)$ 의 기울기가 항상 양수이므로, $x(t)$ 는 항상 양의 값이라고 할 수 있다. 이러한 성질과 초기조건 (2)로부터 모든 $t \ge -\bar{\tau}$ 에 대하여 $x(t) \ge 0$ 임을 알 수 있다. 따라서, 특성 1로부터 모든 $t > t_0$ 에 대하여 $f(x_\tau) > -d$ 임이 증명 된다. ■

보조정리 1을 근거로 하여 상태 변수 $x(t)$ 와 $f(x_\tau)$ 의 강화된 궁극적 하계 값을 아래의 보조정리에서 제시한다.

보조정리 2: (1)과 (2)로 정의되는 시스템의 상태변수 $x(t)$ 와 $f(x_\tau)$ 는 다음과 같이 궁극적 하계를 갖는다.

$$x(t) > \alpha, f(x_\tau) > f(\alpha) \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{6}$$

증명: 보조정리 1로부터 $\frac{d}{d+f}x(t) > 0$ 가 성립함을 알 수 있고, 이를 이용하면 다음과 같은 부등식을 (1)로부터 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) > -x(t) + \alpha \tag{7}$$

위 부등식에서 $x(t) \le \alpha$ 이기만 하면 $\dot{x}(t) > 0$ 이므로 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $x(t) > \alpha$ 임이 증명된다. 이러한 결과에 특성 1과 $0 \le \tau(t) \le \bar{\tau}$ 를 적용하면 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $f(x_\tau) > f(\alpha)$ 임을 알 수 있다. ■

아래의 보조정리는 상태 변수 $x(t)$ 의 궁극적 하계와 궁극적상계의 관계를 정립한다.

보조정리 3: 상수 δ 가 $\alpha \le \delta \le x^*$ 를 만족한다고 할 때, (1)에서 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $x(t) > \delta$ 이면 다음 부등식이 성립한다.

$$x(t) < \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\delta)}\right) \ge x^* \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{8}$$

증명: 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $x(t) > \delta \ge \alpha$ 이라는 조건에 $0 \le \tau(t) \le \bar{\tau}$ 와 특성 1을 적용하면 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $f(x_\tau) > f(\delta)$ 을 만족하고, 이를 (1)에 적용하면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) < -x(t) + \frac{d}{d + f(\delta)} x(t) + \alpha \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{9}$$

위 부등식에서 $x(t) \ge \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\delta)}\right)$ 이기만 하면 $\dot{x}(t) < 0$ 이므로 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $x(t) < \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\delta)}\right)$ 임을 증명한다. 한편, $\alpha \le \delta \le x^*$ 이라는 조건에 특성 1을 적용하면 $f(\delta) \le f(x^*)$ 을 얻을 수 있고, 이는 $\alpha\left(1 + \frac{d}{f(\delta)}\right) \ge \alpha\left(1 + \frac{d}{f(x^*)}\right) = x^*$ 임을 증명한다. ■

보조정리 4: 상수 Δ 가 $x^* \le \Delta$ 를 만족한다고 할 때, (1)에서 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $x(t) < \Delta$ 이면 다음 부등식이 성립한다.

$$x(t) > \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\Delta)}\right) \le x^* \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{10}$$

증명: 보조정리 3의 증명과 같은 방법으로 쉽게 증명할 수 있다.

IV. 광역 점근적 안정성

Krasovskii 또는 Razumikhin 안정성 이론을 적용하는 것 대신에 상태변수 $x(t)$ 의 하계 및 상계의 시간의 흐름에 따른 변화를 각각 나타내는 두 개의 수열 $\{\phi_n\}$ 과 $\{\Phi_n\}$ 을 생성한다. $f(\alpha) > 0$ 이라는 조건 하에 ϕ_1 을 α 로 선택하면 보조정리 2에 의하여 충분히 큰 모든 시간에 대하여 $x(t) > \phi_1$ 을 만족하는 것을 알 수 있다. 이에 보조정리 3을 적용하면 다음과 같이 부등식을 얻고 Φ_1 을 정의한다.

$$x(t) < \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\phi_1)}\right) := \Phi_1 \ge x^* \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{11}$$

같은 방법으로 Φ_1 을 보조정리 4에 적용하면 다음과 같이 부등식을 얻고 ϕ_2 를 정의한다.

$$x(t) > \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\Phi_1)}\right) := \phi_2 \le x^* \quad \text{for all sufficiently large} \quad t \tag{12}$$

같은 방법으로 $\Phi_2 := \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\phi_2)}\right) \ge x^*$, $\phi_3 := \alpha\left(1 + \frac{d}{f(\Phi_2)}\right) \le x^*$ 등을 연속적으로 정의할 수 있다.

이러한 과정을 반복하면 두 개의 수열 $\{\phi_n\}$ 과 $\{\Phi_n\}$ 을 생

성할 수 있고, 각 수열은 모든 $n \geq 1$ 에 대하여 $\alpha \leq \phi_n \leq x^* \leq \Phi_n$ 을 만족한다. 또한, $\{\phi_n\}$ 과 $\{\Phi_n\}$ 의 평형점은 (1)의 평형점과 일치하기 때문에 $\{\phi_n\}$ 과 $\{\Phi_n\}$ 이 수렴한다면 (1)이 광역 점근적으로 안정하다는 것을 의미한다. 지금부터의 분석은 $x(t)$ 의 하계 변화를 나타내는 $\{\phi_n\}$ 에 초점을 맞추어 행하여 지는데, 분석 과정은 상계 변화를 나타내는 $\{\Phi_n\}$ 에도 똑같이 적용된다. 다음의 정리는 시스템 (1)의 광역 점근적 안정성을 보장하는 충분 조건을 제시하는데, 그 조건은 시간 지연에 독립적인 특성을 갖는다.

정리 1: (1)에서 제어매개변수 α 를 $f(\alpha) > 0$ 이 만족하도록 선택하면 (1)은 광역 점근적으로 안정하다.

증명: 시간에 따른 $x(t)$ 의 하계 변화를 나타내는 $\{\phi_n\}$ 이 $f(\alpha) > 0$ 조건하에 수렴하는 것을 보임으로써 본 정리는 증명된다. 우선 $\{\phi_n\}$ 은 모든 $n \geq 1$ 에 대하여 $\alpha \leq \phi_n \leq x^*$ 를 만족하기 때문에 $\{\phi_n\}$ 은 이미 유계인 것을 알 수 있다. 따라서, $\{\phi_n\}$ 이 순증가수열(strictly increasing sequence)이라는 것만을 보이면 $\{\phi_n\}$ 이 수렴한다는 것이 증명된다[6].

$\{\phi_n\}$ 이 순증가수열이라는 것을 보이기 위하여 수학적 귀납법을 이용한다. 즉, $n = 1,2$ 일 때 $\phi_1 < \phi_2$ 이 성립함을 보이고, $n = k, k+1$ 일 때 $\phi_k < \phi_{k+1}$ 이라는 가정 하에 $\phi_{k+1} < \phi_{k+2}$ 이 성립함을 보일 것이다. 먼저, $n = 1,2$ 일 때는 다음과 같이 $\phi_1 < \phi_2$ 가 증명된다.

$$\phi_1 = \alpha < \alpha + \frac{\alpha d}{f\left(\alpha + \dfrac{\alpha d}{f(\alpha)}\right)} = \phi_2 \tag{13}$$

한편, $\phi_k < \phi_{k+1}$ 이라는 가정과 특성 1을 이용하면 $f(\phi_k) < f(\phi_{k+1})$ 을 얻을 수 있고, 이 부등식을 이용하면 $\phi_{k+1} < \phi_{k+2}$ 는 다음과 같이 증명된다.

$$\phi_{k+2} = \alpha + \frac{\alpha d}{f\left(\alpha + \dfrac{\alpha d}{f(\phi_{k+1})}\right)} > \alpha + \frac{\alpha d}{f\left(\alpha + \dfrac{\alpha d}{f(\phi_k)}\right)} = \phi_{k+1} \tag{14}$$

따라서, $\{\phi_n\}$ 은 유계이면서 (13)과 (14)에 의하여 순증가수열이기 때문에 $\{\phi_n\}$ 은 수렴하고, 이에 따라 (1)은 광역 점근적으로 안정하다는 것이 증명된다. ■

정리 1에 의하면 비록 (1)에 나타나있는 함수 $f(\cdot)$ 에 불확실성이 존재 하더라도 특성 1만 만족하면, 제어매개변수 α 를 충분히 큰 값으로 설정하면 정리 1의 충분조건은 만족하게 되고, 결국 (1)은 광역 점근적 안정성을 획득할 수 있다. 또한, [1]에서 제시된 광역 점근적 안정성을 위한 충분조건은 $0 < l \leq \frac{df(x)}{dx} \leq L$ 인 경우에 $\alpha > \frac{Ld}{l^2}$ 로 표현되었는데, $f(\alpha) > 0$ 이라는 조건을 [1]에서 사용된 표기법으로 변환하면 $\alpha > \frac{d}{l}$ 로 표현할 수 있고, 이는 본 논문의 충분조건이 [1]에서 제시된 충분조건보다 완화되었음을 의미한다. ■

V. 모의 실험

정리 1에서 제시된 광역 점근적 안정성에 대한 충분 조건을 예증하기 위하여 모의 실험을 실행한다. (1)에 나타나 있는 함수 $f(\cdot)$ 와 d 는 다음과 같이 선택 한다.

$$f(x_\tau) = x_\tau^2 - 4, d = 4.1$$

이러한 설정은 특성 1을 만족함을 알 수 있다. 위의 식에서 시변 시간 지연 $\tau(t)$ 는 $7 + \sin t$ 로 설정한다. 이러한 설정에서 광역 점근적 안정성을 위한 충분조건은 $\alpha > 2$ 로 계산된다. 정리 1의 충분조건을 만족하는 $\alpha = 2.1$ 과 만족하지 못하는 $\alpha = 1.9$ 두 가지 경우에 대하여 모의실험을 실시하고, 모의실험 결과는 그림 1, 2에 나타나 있다.

그림 1에서 알 수 있듯이 $\alpha = 2.1$ 경우에는 상태 변수 $x(t)$ 는 평형점으로 수렴하고 있고, 이는 정리 1을 예증한다. 한편, 그림 2를 살펴 보면 $\alpha = 1.9$ 경우에는 $x(t)$ 가 수렴하지 않고 계속적으로 진동하고 있다. 이렇게 정리 1의 충분조건

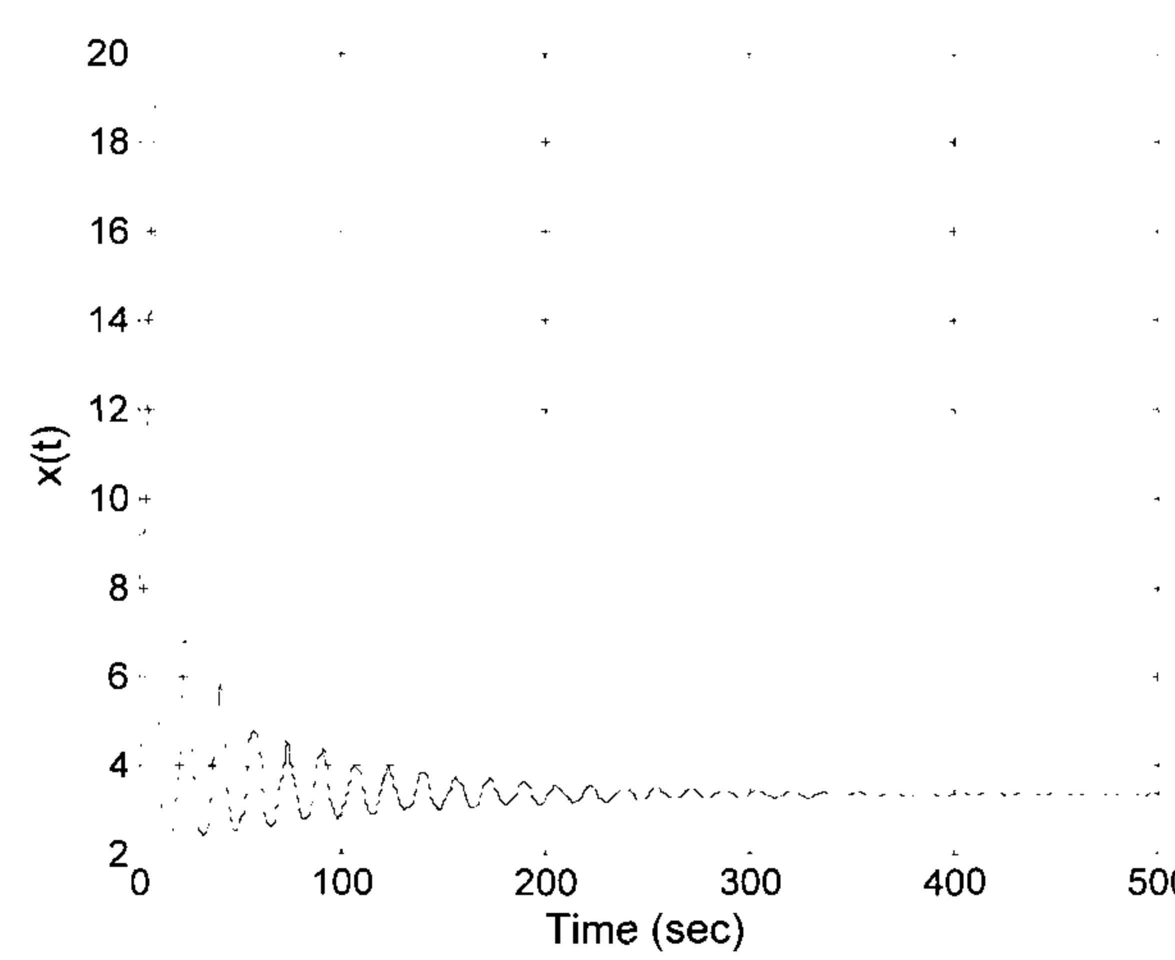

그림 1. $\alpha = 2.1$ 일 때의 모의실험 결과.
Fig. 1. Simulation result when $\alpha = 2.1$.

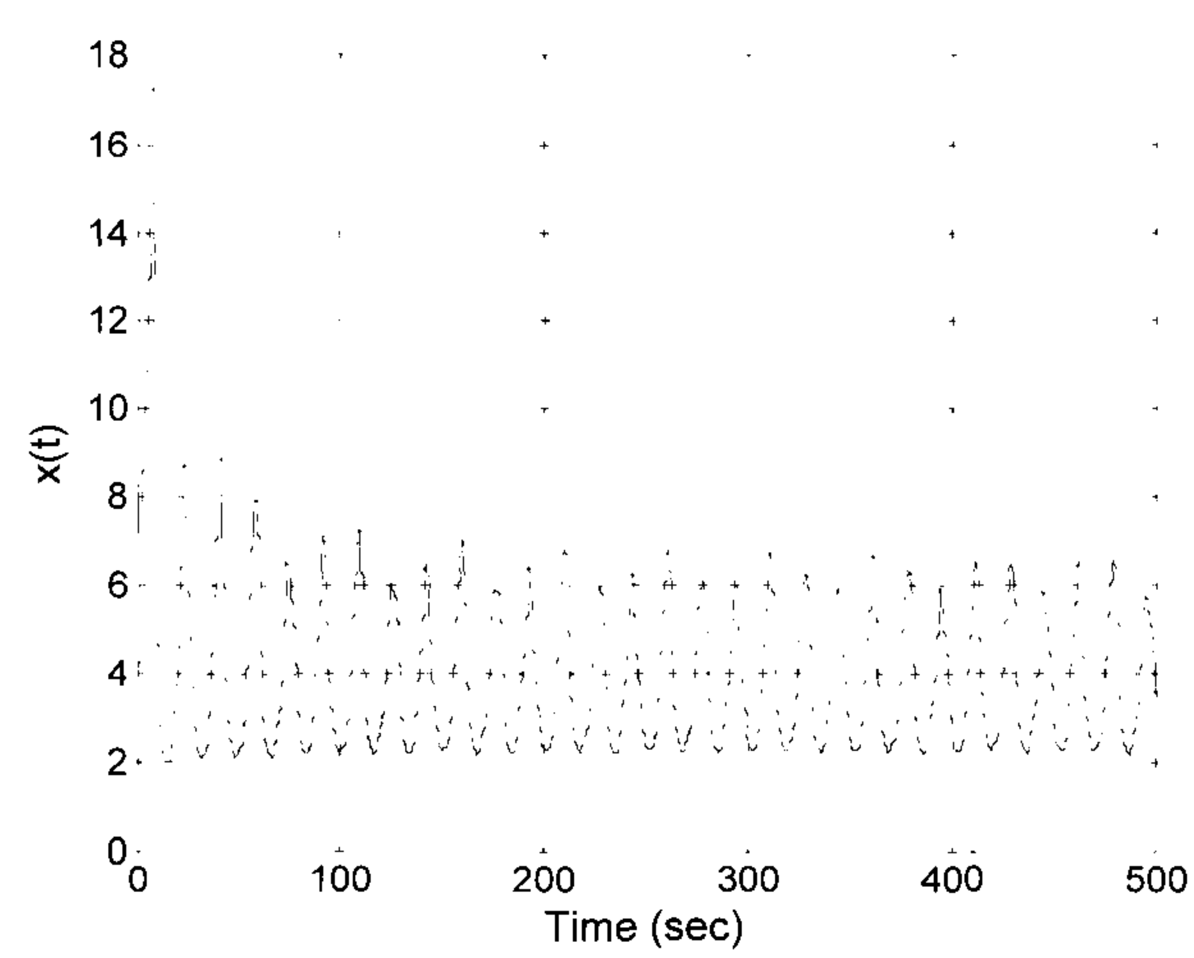

그림 2. $\alpha = 1.9$ 일 때의 모의실험 결과.
Fig. 2. Simulation result when $\alpha = 1.9$.

에서 α 의 값이 약간 벗어 났음에도 불구하고 상태변수가 불안정한 것은 정리 1에서 제시된 충분조건이 미지의 광역 점근적 안정성을 위한 필요충분조건에 근접하고 있음을 예증하고 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 시변 시간 지연이 있는 일종의 일차 비선형 시간 지연 시스템에 대한 광역 점근적 안정성을 보장하는 충분조건을 제시하였다. 제시된 충분조건을 증명하기 위하여 Krasovskii 또는 Razumikhin 안정성 이론을 적용하는 것 대신에 시스템 고유 특성을 이용한 광역 점근적 안정성 분석 방법을 제시하였다. 상태변수의 상계 및 하계 값의 시간에 따른 변화를 나타내는 두 개의 수열을 생성하여, 그 두 수열이 시스템의 평형점으로 수렴하는 것을 보임으로써 충분조건을 증명하였다. 모의 실험을 통하여 광역 점근적 안정성을 위한 충분조건의 유효성을 예증하였고, 동시에 제시된 충분조건과 미지의 필요충분조건과의 근접성을 예증하였다.

참고문헌

[1] 최준영, "일종의 비선형 시간지연시스템에 대한 광역 점근적 안정성," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제 13 권, 제 3 호, pp. 187-191, 2007. 3.

[2] J. Wang, D. X. Wei, and S. H. Low, "Modelling and stability of FAST TCP," *Proceedings of IEEE Infocom*, April, 2005.

[3] K. Gopalsamy and Pei-Xuan Weng, "Feedback regulation of logistic growth," *International J. Math. & Math. Sci.*, vol. 16, no. 1, pp. 177-192, 1993.

[4] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Springer, London, 2001.

[5] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1976.

최 준 영

1994년 포항공과대학교 전자전기공학과 졸업. 1996년 동대학 석사. 2002년 동대학 박사. 2005년~현재 부산대학교 전자전기통신공학부 조교수. 관심분야는 비선형 제어 이론, 인터넷 혼잡 제어, 임베디드 시스템, 공장자동화.