한국수학사학회지 제21권 제2호(2008년 5월), 81 - 90

다변수 미분에 관하여

단국대학교 응용수학과 **박희철**
hpak@dankook.ac.kr

호서대학교 교양학부 **박영자**
ypark@hoseo.ac.kr

대학교육에서 다변수함수의 미분은 수리적 분석을 요하는 학문의 발전과 더불어 점차 그 중요성이 강조되고 있다. 그러나 현재 대학교양교육에서 학생들에게 도입되고 있는 다변수함수의 미분 정의는 처음 접하는 학생들에게 쉽지 않게 느껴지는 면이 있다. 이에 본 저자가 최근 몇 년간 교양수학을 가르치면서 학생들의 이해를 돕기 위해 고안한 방법이 있어 이를 소개하고자 한다.

본 저자의 경험을 토대로 한 이 방법은 다변수함수의 미분 정의에 대한 직관적이면서 기하학적인 설명법으로서 엄밀한 증명에 의한 접근 방법은 아니지만 다변수 미분의 의미를 빠르게 전달할 수 있다는 장점이 있다.

주제어 : 미분, 다변수 함수, 다변수미분, 대학수학 교육

0. 서론

모든 연속체 과학을 다루는 분야에서는 미분의 개념을 이용하여 현상을 설명하고자 하는 경향이 있다. 특히 삼차원공간 상에서의 현상을 다루는 자연과학, 공학은 물론이고 항공우주이론과 같은 첨단이론에서 사용하는 수학 이론은 다변수함수에 대한 수학적 이론을 그 근간으로 하고 있다. 순수수학 이론에서도 미분기하와 편미분방정식과 같은 분야를 중심으로 조화해석학, 위상수학, 대수기하학, 함수해석학 및 작용소이론, 복소해석학, 통계학 등 대부분의 수학이론이 다변수함수 이론을 근간으로 하고 있거나 다변수 이론을 사용하는 추세이다.

다변수함수에 대한 대학교육은 대부분이 대학 1학년 학생을 대상으로 하는 교양교육에서 그 출발점을 찾을 수 있다. 그러나 미분이라는 개념은 고교 정규 교육과정을 이수한 학생들이라면 익숙한 개념임에도 불구하고 학생들은 다변수미분에 대한 개념을 매우 어렵게 느끼고 있었다. 학부 교육과정 중에서 미분기하나 편미분방정식과 같은 이론을 습득하는데 다변수 미분과 같은 공간개념의 숙지가 절대적 요소임에도 불구하고, 현재 교육되고 있는 방법에 있어서는 (최소한) 다양성이 매우 결여되어 있다.

대학 교과과정에서는 해석적 방법을 이용하여 다변수 미분을 설명하고 있다. 다시 말하면 현재 상용되는 대학교재에서는 다변수의 미분을 도입하기 위하여 먼저 다변수 함수에 대한 합성함수의 미분법을 증명하고, 다변수함수의 (전)미분을 소개한 후, 그래디언트, 방향미분 등을 소개하고 있다([1, 3, 6, 8, 9, 10, 11]). 또한 다변수해석학과 미분기하 등과 같은 과정에서 (다변수) 미분이 대수적으로 선형변환이라는 사실을 언급하고 있지만, 다변수 함수의 미분에 대한 다각적인 설명은 부족한 상태이다. 특히 다변수의 미분과 방향미분과의 관계성(본 논문의 따름성질 2.2)은 학생들이 가장 어렵게 생각하는[1] 다변수 합성함수의 미분법에 의존하기 때문에, 그 개념을 완전히 숙지하여 활용하기에는 한계가 있다. 따라서 다각적인 측면에서 다변수 미분의 설명을 학생들에게 제공함으로써 학생들의 이해를 유도할 필요성이 있다고 하겠다. 본 논문에서는 직관적이면서 기하학적인 분석을 통해 다변수미분을 설명하는 방법을 소개한다. 여기서 소개하는 방법을 통하여 학생들이 다변수미분의 의미를 파악하는데 도움을 주고자 하는 주목적이 있기 때문에 수학적 엄밀성과는 거리를 두고 있다.

미분 개념을 처음으로 도입한 것은 영국의 I. Newton(1642-1727)으로 볼 수 있다. 그는 운동체의 속도를 구하는 과정에서 미분에 대한 개념을 처음으로 도입하였다. 이와는 별도로 독일의 G. Leibniz(1646-1716)는 곡선의 접선 또는 극대, 극소를 고찰하는 수단으로 미분법을 발견하였다. 동시대에 활동한 이 두 학자간의 미분 도입 시기는 다음과 같다. 먼저 뉴턴은 1665년에 'calculus of fluxions'이라는 초기 형태의 미분 개념을 도입하였으나 1704년까지 출판하지 않았다. 반면 라이프니츠는 1684년에 미분에 대한 그의 개념을 출판하였다. 사실 뉴턴은 1693년에 정확한 의미의 미분을 묘사하였으며, 이것은 1704년에 출판된 논문(Tractatus de quadratura curvarum)의 부록 편에 실렸다. 또한 그의 사후 50년 후에 발견된 라틴어로 쓰여 진 1671년도 논문이 발견되기도 하였다. 한편 프랑스의 P. Fermat(1601-1665)는 극대값, 극소값을 오늘날의 미분법과 유사한 방법으로 구하였기 때문에 미분의 최초 발견자는 페르마로 거슬러 올라가야한다는 주장도 있다. 미분의 시발점을 그 누구에게로 두더라도 모두 그 처음 이론에는 여러모로 미비한 점이 많았는데, 이 이론은 $\varepsilon-\delta$개념을 처음 도입한 프랑스의 A. Cauchy(1789-1857)와 독일의 K. Weierstrauss(1815-1897)에 의하여 오늘과 같은 틀을 마련하게 되었다.

L. Euler(1707-1783)는 변분론을 처음 고안하여 최적함수를 구하였는데 이것은 오늘날 Gateaux 미분의 특수형태로 볼 수 있어서 유한 차원의 경우 다변수함수의 미분 그리고 방향미분과 일치한다([7]). 다변수함수의 (미분)이론은 이론 물리학의 발전과 함께 상호 보안관계 입장에서 발전을 하였는데, 이중에서 주목해야하는 수학자로서는 노르웨이 수학자 S. Lie (1842-1899), H. Poincare(1854-1912), I. Fredholm(1866-1927) 등이 있다. 이 들은 미분기하 및 위상수학과 같은 순수수학 이론의 발전과 함께 양자물리 등의 이론물리학 연구에 밀접한 연관이 있는 편미분방정식이론을 구축하였다.

1) 공식을 암기하거나 단순 적용은 가능하지만 실제적인 의미 파악이나 활용 등에 대해서는 많은 학생들이 두려워하고 있음을 발견하였다

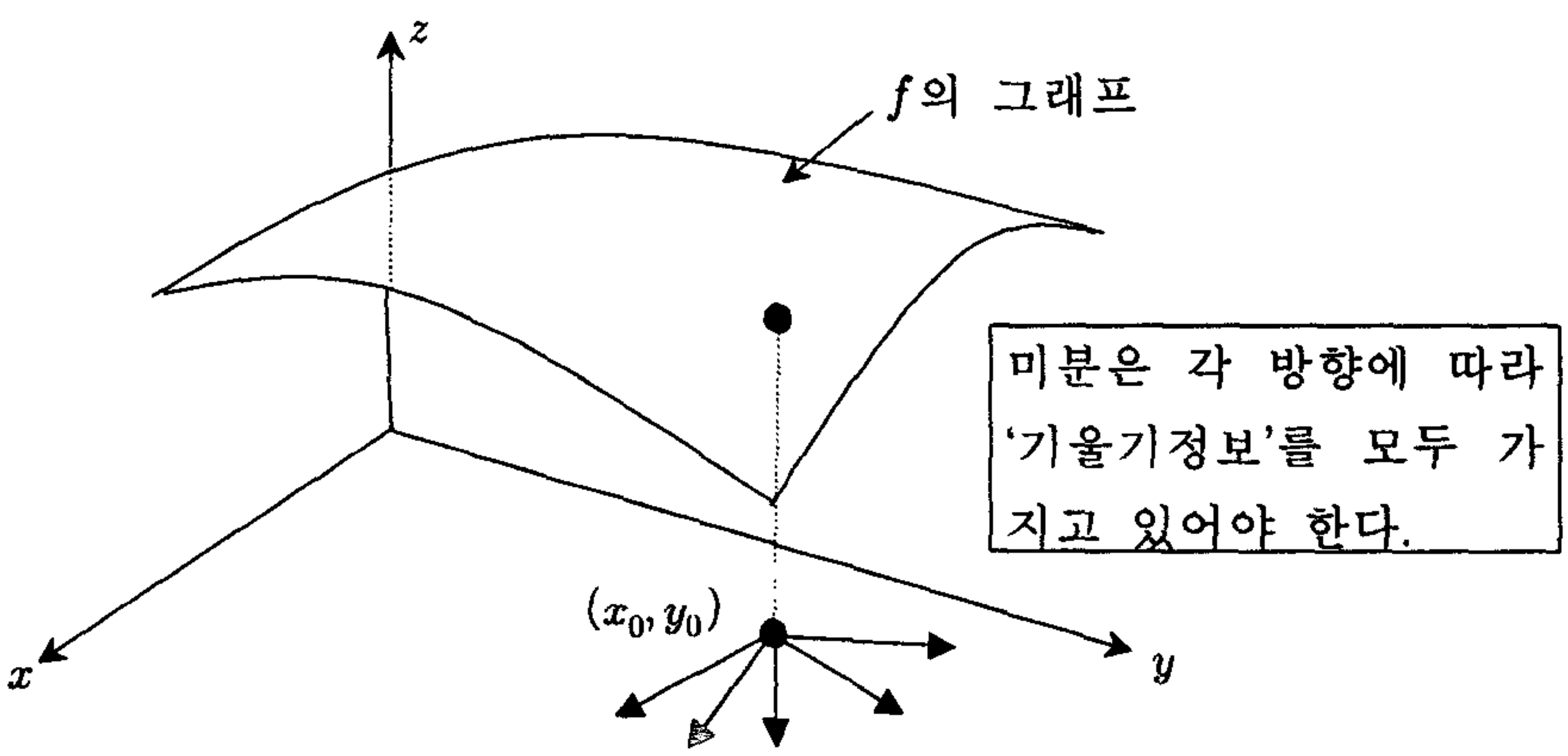
1. 본론: 기하학적 설명에 의한 다변수 미분의 교육

근본적으로 다변수의 미분은 일변수의 미분을 확장한 개념이기 때문에 일변수함수의 미분 의미를 다변수함수의 미분에서도 가지고 있다. 본 논문에서는 일변수함수의 미분의 기하학적 의미를 토대로 하여 다변수함수의 미분을 건설함으로써 다변수함수의 미분이 가지고 있는 의미를 설명하고자 한다. 즉, 일변수함수의 기하학적인 의미를 확장한 의미로 다변수함수의 미분을 '설계(design)'하고자 하는데 이러한 접근 방법은 현재 대학교양수학과정에서 접근하고 있는 방법인 다변수함수의 합성함수 미분법을 토대로 다변수미분의 유도 방법과는 매우 다른 직관적 접근 방법이다. 비록 엄밀성은 떨어진다고 하여도 이 접근 방법을 통하여 학생들이 보다 다변수의 미분에 보다 친근감을 느끼는 방편으로 사용하였으면 한다.

먼저 고교 과정 중에서 일변수 미분에 대한 기하학적 의미는 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$의 그래프를 그렸을 때 $f'(x_0)$는 점 x_0에서 접선의 기울기를 의미한다고 가르치고 있다. 즉, 미분은 기하학적인 의미에서 그래프 상에서 접선의 기울기 '정보'를 가지고 있다. 이 개념을 확장하여 다변수함수의 미분을 생각할 때에도 '기울기'의 정보를 모두 가지도록 '미분' 개념을 고안하고자 한다.[2)]

다변수함수의 미분을 삼차원 안에서 설명하기 위하여 그래프를 그리기 용이한 이변수함수 $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}^2$을 생각하자. **함수 f의 그래프는 접평면이 존재할 정도로 부드러운 곡면을 이룬다고 가정한다.**

우리는 근본적으로 점(x_0,y_0)에서 이변수미분 $\nabla f(x_0,y_0)$이 그래프에서 모든 방향으로의 '기울기 정보'를 내포하도록 설계되기를 바라고 있다.



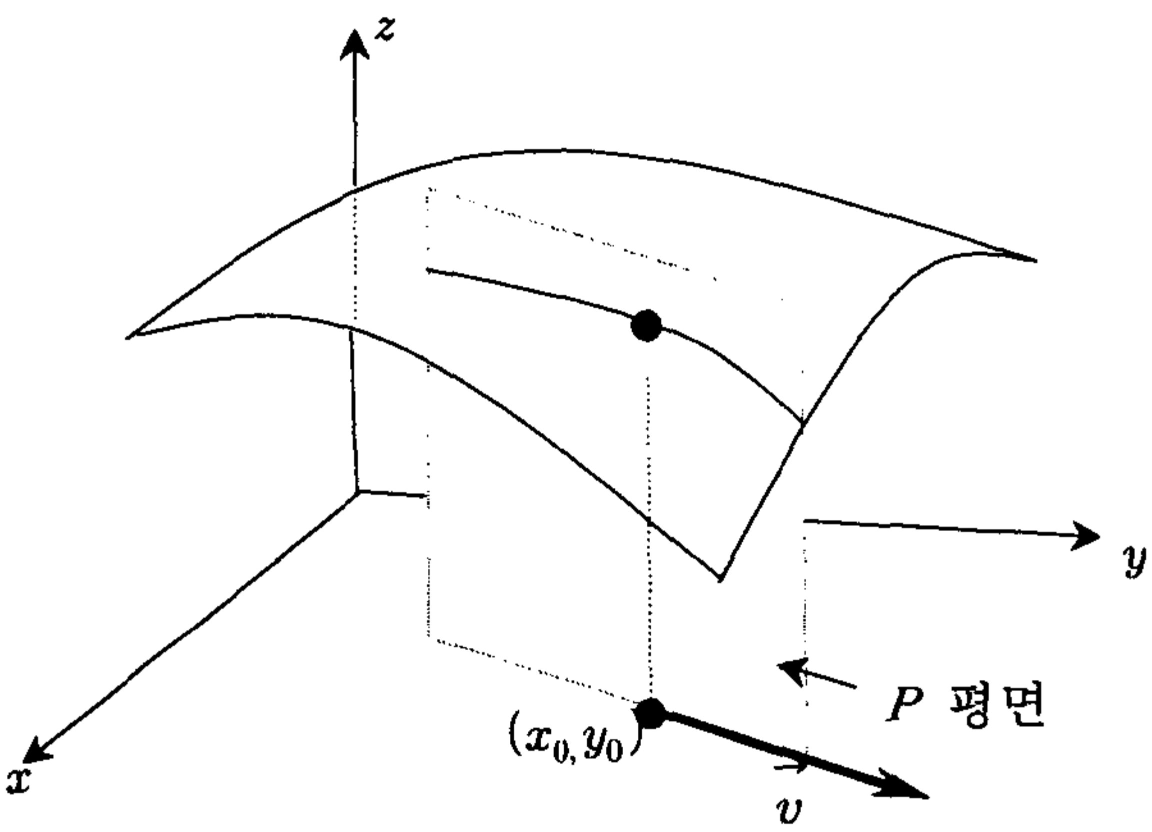
<그림 1>

그런데 이변수함수는 각 방향이 달라짐에 따라 두 방향에 대한 기울기가 달라짐으

2) 물론 (일변수함수의) 미분이 가지는 의미가 그래프 상의 접선의 기울기뿐인 것은 아니지만, 미분의 의미가 '기울기 개념' 안에 용해되어 있는 사실을 이용한다.

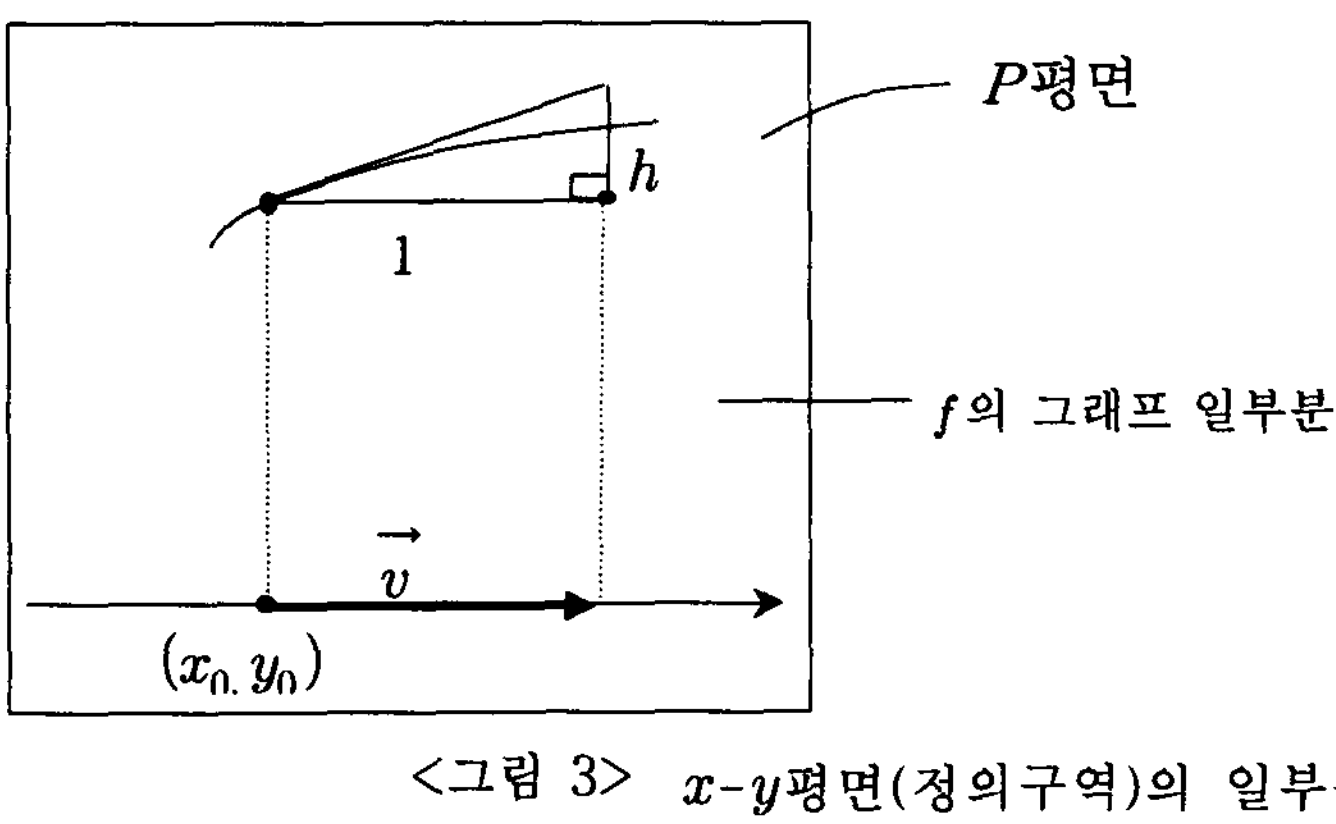
로 이 모든 정보를 모두 포함하는 '미분'을 만들어야 한다(그림 1). 다행히도 x축(또는 y축)과 평행한 방향에 대해서는 편미분 $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$(또는 $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)$)가 그 역할을 한다. 그렇지만 x축과 y축을 제외한 방향의 기울기는 명확하지 않다. 본 논문에서는 이 두 방향의 기울기 정보를 이용하여 임의 방향의 기울기를 구함으로써 이 과정에서 그래디언트와 같은 미분 개념을 자연스럽게 설명하고자 한다.

이제 (x_0,y_0)을 시작점으로 하고, $\vec{v}$방향으로의 기울기를 생각해 보자. 여기서 $\vec{v}$방향으로의 기울기라는 말은 f의 그래프를 점(x_0,y_0)에서 $\vec{v}$방향으로 정의구역에 수직(즉, 치역에 평행)인 평면 P로 잘랐을 때(그림 2 참조), (x_0,y_0)에서 f의 그래프와 평면 P가 만나는 곡선의 기울기를 의미한다. 우리는 이 기울기를 통하여 f의 $\vec{v}$방향으로의 '미분정보'를 파악하려고 하는 것이다.



<그림 2>

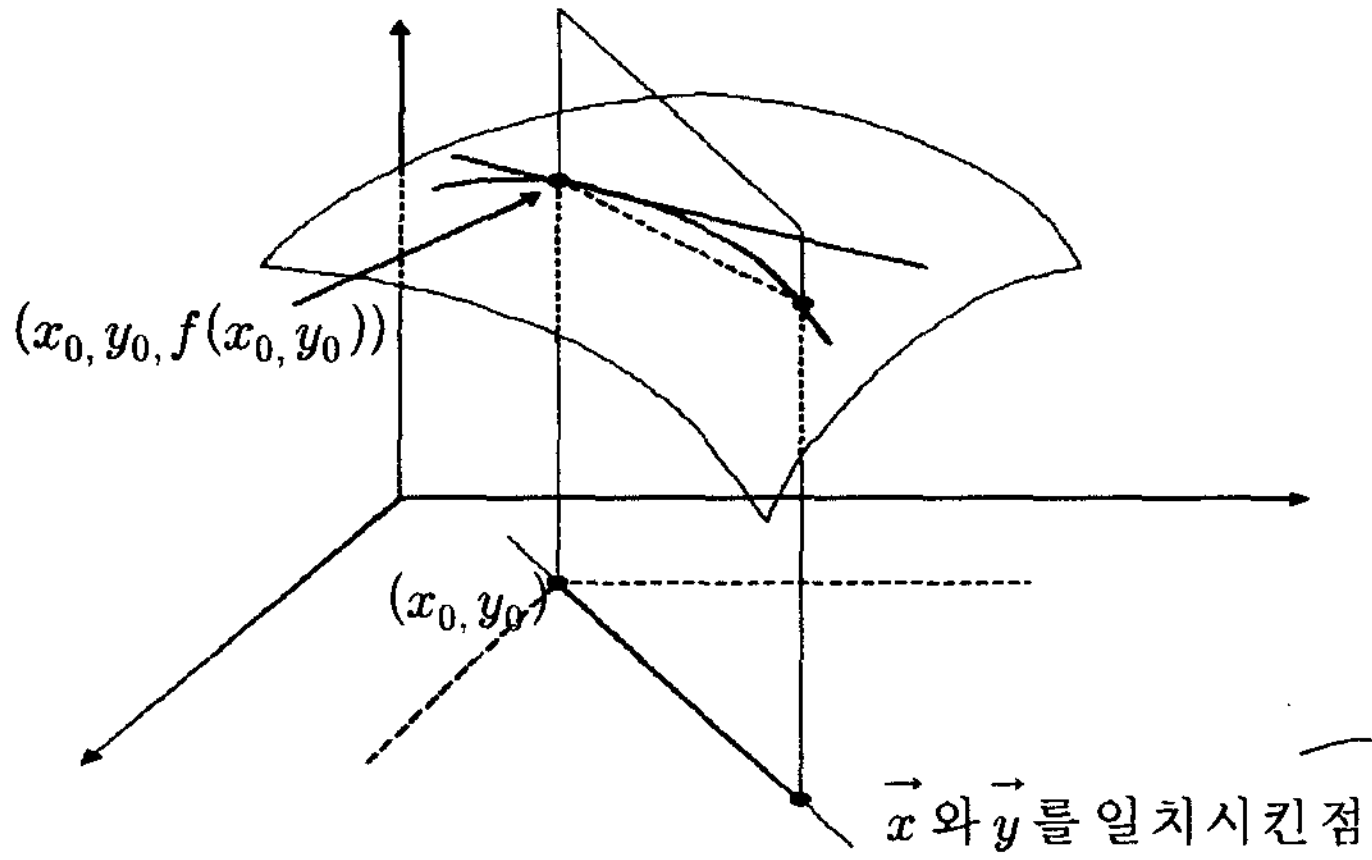
그런데 $\vec{v}$방향으로의 기울기[1]는 $\vec{v}$벡터의 크기에 관계없이 같은 방향으로는 같은 '기울기'정보를 갖게 된다. 따라서 편의상 $|v|=1$이라고 하자. 이제 $\vec{v}$방향으로 f의 기울기를 구체적으로 계산해 보자.



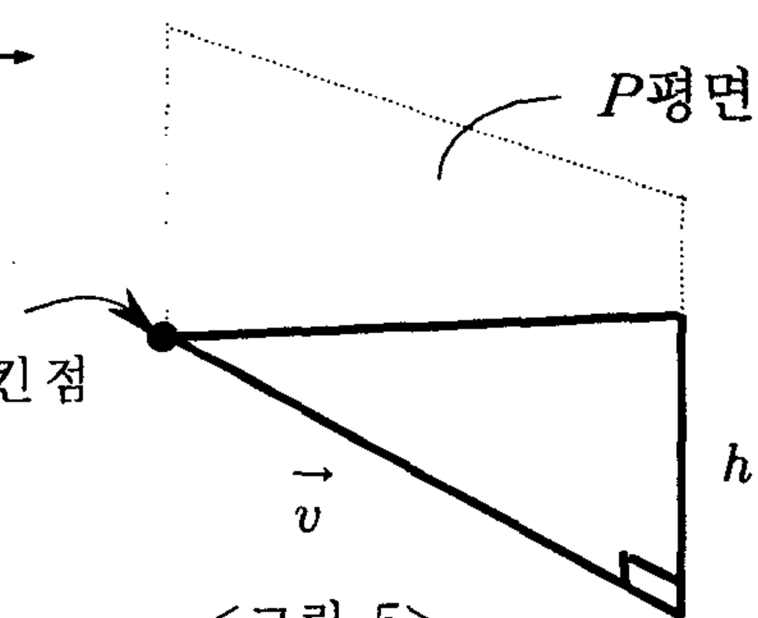
<그림 3> x-y평면(정의구역)의 일부분

그림 2에서와 같이 자른 P평면을 그림 3과 같이 정면으로 쳐다보면 점 (x_0, y_0)에서 접하는 접선의 기울기는 $\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}$이고 밑변이 1일 때 '높이'의 값과 같다. 따라서 우리는 이 높이를 구하고자 하는 것이다. 구하려는 높이를 h라 하자.

우리는 이것을 쉽게 구하기 위하여 그림 4에서 점 $\vec{x} \equiv (x_0, y_0) \cong (x_0, y_0, 0)$과 공중에 떠있는 $\vec{y} \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$점을 일치시켜 놓아서 그림 5와 같이 P 평면 위에 직각삼각형을 얻을 수 있다.

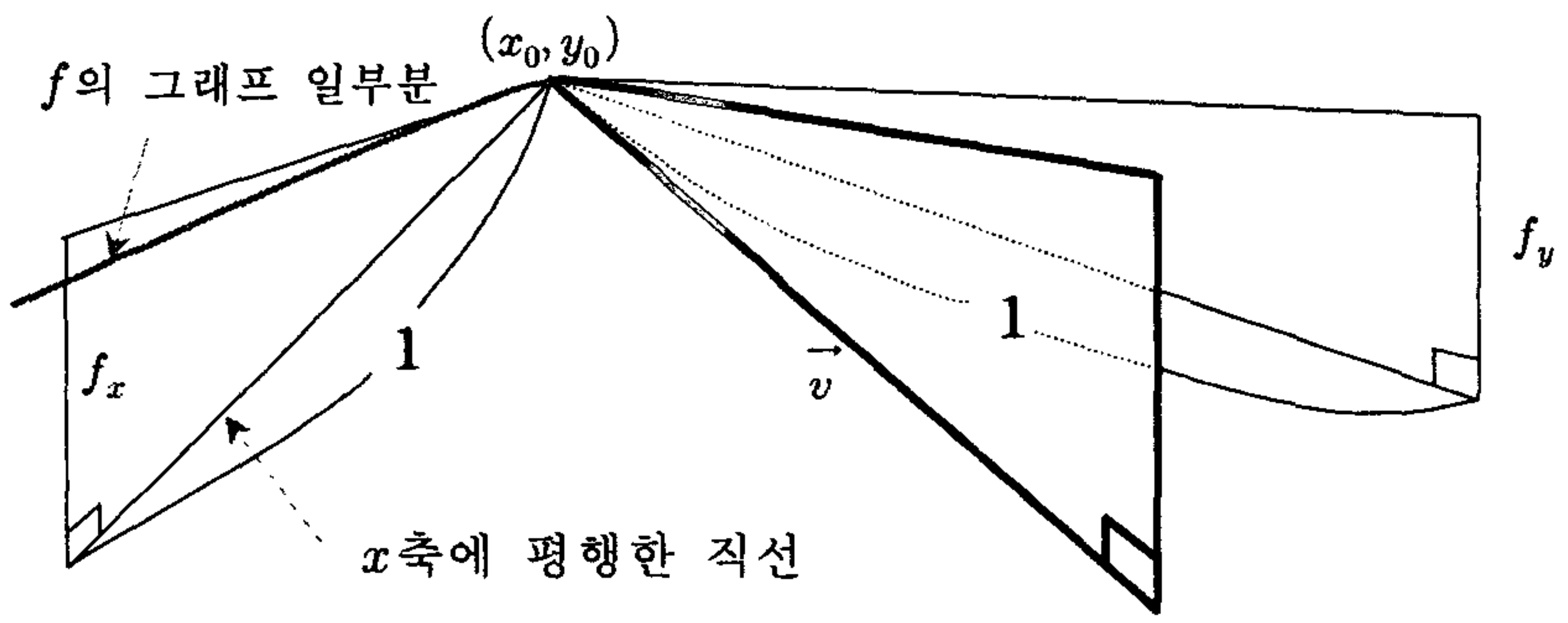


<그림 4>



<그림 5>

이제 그림 6과 같이 점 (x_0, y_0)을 지나고 x축에 평행한 직선과 이 직선을 포함하고 x-z평면에 평행한 평면으로 잘라서 생겨난 평면 위에 있는 f의 그래프 일부분에 점 (x_0, y_0)에서 접하는 접선, 그리고 z축에 평행한 직선에 의하여 생성된 직각삼각형을 생각해 보자. 이 삼각형은 밑변이 1일 때 높이는 편미분의 정의로부터 $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$이다.



<그림 6>

또한 마찬가지 방법으로 점 (x_0, y_0)을 지나고 y축에 평행한 직선과 y-z평면에 평행인

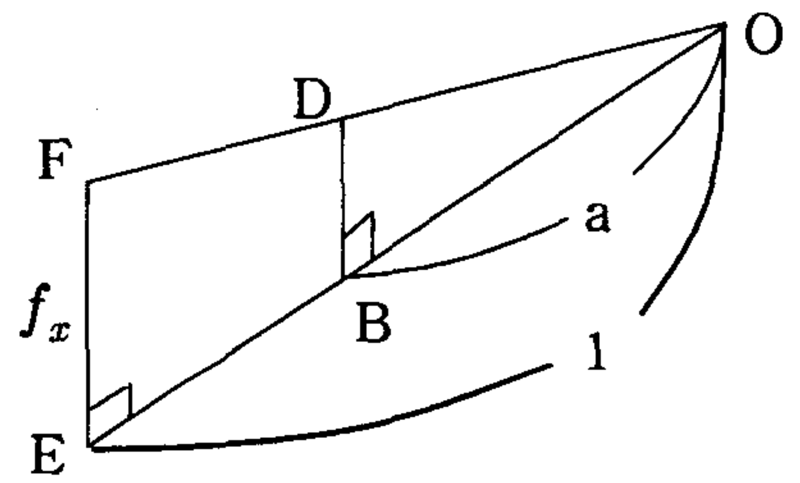
평면 위에 생겨난 직각삼각형(그림 6의 오른쪽 부분)에서 이 직각삼각형의 밑변 길이가 1일 때 높이는 $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0)$이다.

보조성질 2.1 벡터 $\vec{v}$을 좌표로 표시하여 $\vec{v}=(a,b)$라 할 때, 높이 h는

$$h = af_x + bf_y$$

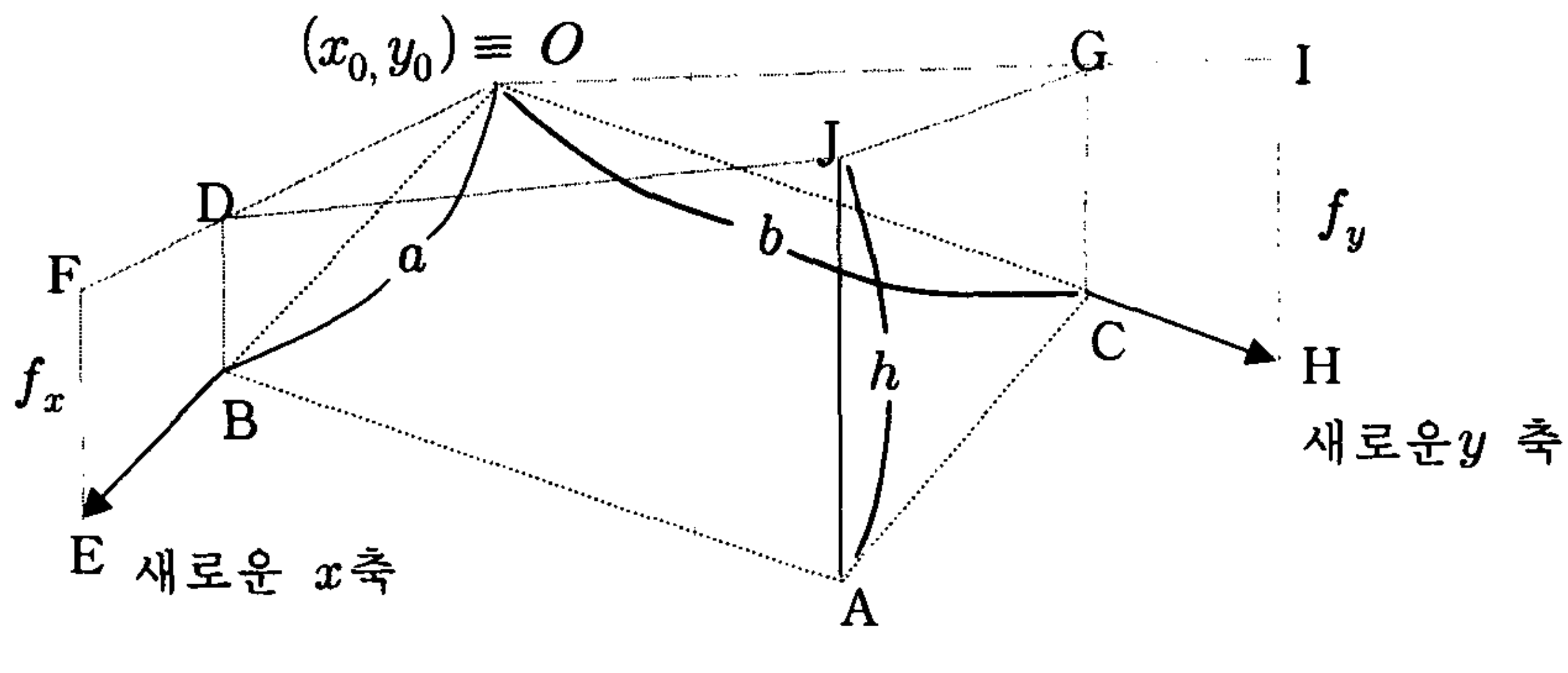
이다.

(증명) 먼저 그림 8과 같이 벡터 $\vec{v}$의 끝점을 A라 하고, 시작점을 $O=(x_0, y_0)$이라고 하여 점 O을 기준으로 새로운 좌표축을 구성하자. 편의상 점 O을 지나면서 x축에 평행한 방향을 x축으로, y축에 평행한 방향을 y축으로 생각하자. 점 A로부터 새로운 x-좌표축에 내린 수선의 발을 B라고 하고(그림 7, 그림 8), 새로운 x축을 지나고 x-z평면과 평행한 평면 위에 있는 그림 6에서 그린 직각삼각형[3])을 $\triangle OEF$ 라 하자(그림 7). 또한 삼각형 $\triangle OEF$ 안에 그림 7과 같이 직각삼각형 $\triangle OBD$을 그리자. 그러면 $\triangle OBD$의 밑면의 길이는 (점 A로부터 수선의 발을 그렸으므로) a이다.



<그림 7>

그러면 $\vec{v}=(a,b)$이므로 선분 $\overline{OB}$의 길이는 a이고, 따라서 삼각형의 닮음을 이용하면, $a:1=\overline{BD}:f_x$에 의하여 $\overline{BD}=af_x$을 얻는다.



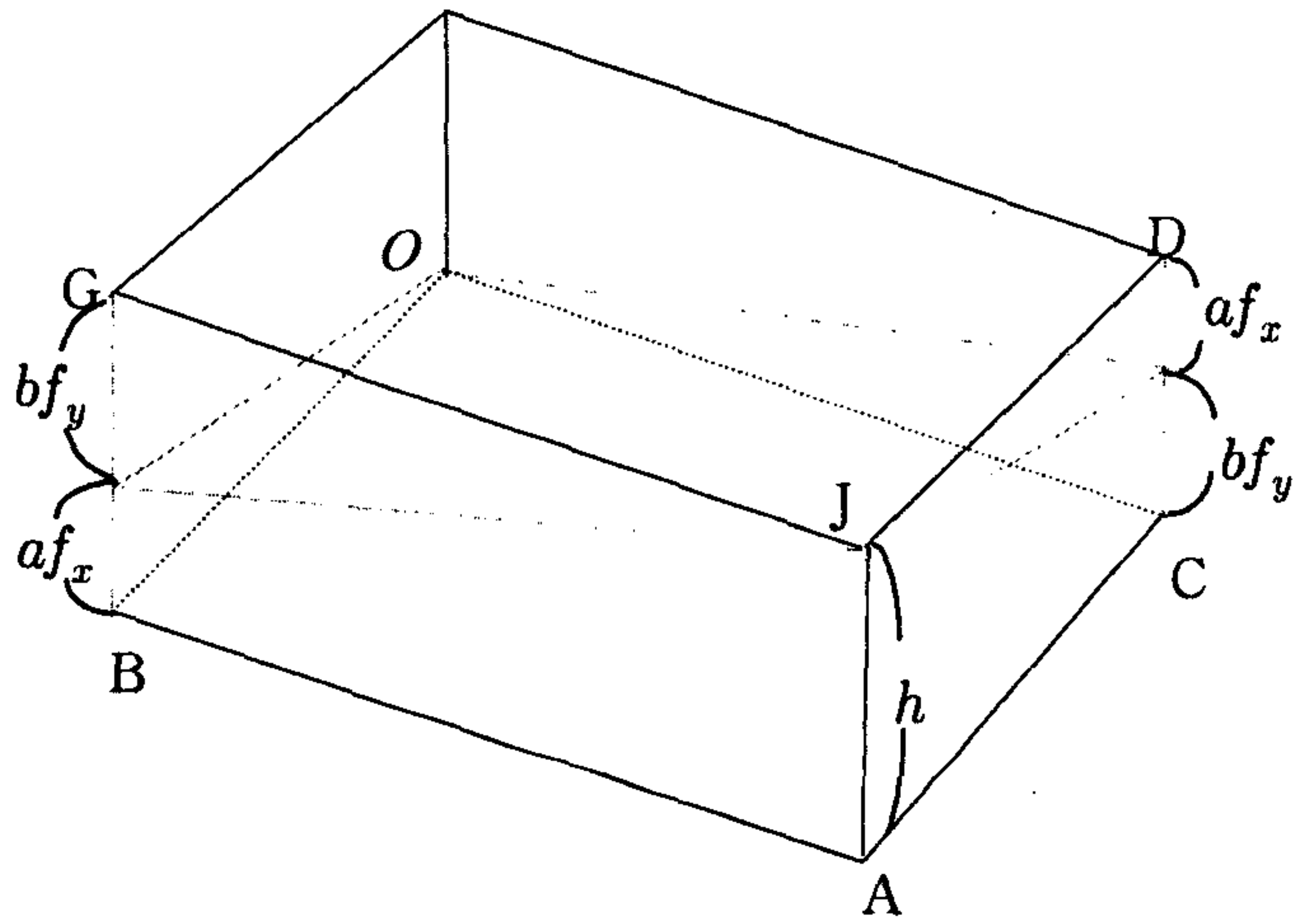
<그림 8>

3) 밑변의 길이는 1이고 높이가 f_x인 직각삼각형

마찬가지 방법으로, 그림 8과 같이 점 A로부터 새로운 y-좌표축에 내린 수선의 발을 C라고 하면 y축에 직각삼각형 $\triangle OHI$와 그 안에 닮음 꼴 $\triangle OCG$로부터 $\overline{CG}$의 길이

$$\overline{CG} = bf_y$$

를 얻을 수 있다. 처음의 가정에서 f의 그래프 위의 각 점에서 접평면이 존재한다고 하였으므로 그림 8에서 점 O, D, J, G 을 잇는 사각형은 한 평면 안에 위치함을 알 수 있다.



<그림 9>

우리는 $\overline{BD} = af_x$이라는 사실과 $\overline{CG} = bf_y$라는 사실을 이용하여

$$h = af_x + bf_y$$

라는 사실을 얻는다. 왜냐하면 그림 9와 같이 점 O, D, G, B, A, C, J를 꼭짓점으로 하는 도형을 뒤집어서 올려놓으면 높이가 $h = af_x + bf_y$인 직육면체를 얻을 수 있기 때문이다. □

보조성질 2.1은 점 (x_0, y_0)에서 $\vec{v}$방향으로의 그래프 기울기 $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$[4]가

$$D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = af_x + bf_y$$

임을 알려주고 있다. 이것은 우리가 알고 있는 $\vec{v}$ 방향으로의 방향 미분과 일치하며, 방향 미분의 글자 그대로의 의미로 전개한 식:

$$D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h\vec{v}) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad |\vec{v}| = |(a, b)| = 1$$

과도 비교하여 볼 수 있다. 또한 $af_x + bf_y$을 행렬로 표시하면

4) 이것을 $\vec{v}$방향으로의 방향 미분이라고 하고, 기호로 $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$로 표기한다

$$D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)=(f_x,f_y)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

이며, 이 때 행렬 (f_x,f_y)은 우리가 그래디언트(기울기)라고 부르는 벡터장:

$$\nabla f \equiv (f_x,f_y)$$

이다. 따라서 그래디언트 벡터 $\nabla f(x_0,y_0)$는 점 (x_0,y_0)에서 모든 방향으로의 방향 미분에 대한 정보를 가지고 있음을 자연스럽게 알 수 있다. 즉, 방향 $\vec{v}$만 주어진다면 $\vec{v}$방향으로의 방향 미분을 행렬의 내적 $\nabla f \bullet \vec{v}$을 이용하여 구할 수 있다.

따름성질 2.2 이변수함수 f의 점 (x_0,y_0)에서의 미분 $\nabla f(x_0,y_0)$와 단위벡터 $\vec{v}$ 방향으로의 방향미분 $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$과는

$$\nabla f(x_0,y_0)\bullet\vec{v} = D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)\equiv\lim_{h\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+h\vec{v})-f(x_0,y_0)}{h}$$

인 관계가 성립한다.

마찬가지 논리를 적용한다면, 비록 삼변수함수 $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$에 대한 그래프를 그릴 수는 없지만 사차원 다면체를 고려하여 f의 그래디언트는

$$\nabla f=(f_x,\ f_y,\ f_z)$$

가 될 것임을 예측할 수 있다. 치역이 실수가 아닌 m차원 벡터공간 $\mathbb{R}^m$인 n변수함수 $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$,

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=(f^1,\ f^2,\ \cdots,\ f^m)$$

에 대한 미분은 치역의 각 사영함수 $f_j:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$들의 그래디언트를 모두 묶어 놓은 형태일 것이므로

$$Df=\begin{pmatrix}\nabla f^1\\ \nabla f^2\\ \vdots\\ \nabla f^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^1_{x_1} & f^1_{x_2} & \cdots & f^1_{x_n}\\ f^2_{x_1} & f^2_{x_2} & \cdots & f^2_{x_n}\\ & & \vdots & \\ f^m_{x_1} & f^m_{x_2} & \cdots & f^m_{x_n}\end{pmatrix}$$

이여야 함을 알 수 있다.

3. 결론

저자는 몇 년 동안 본문에서 소개한 방법으로 교양수학을 가르친 결과, 시각화에 길들여진 학생들에게 흥미를 일으킬 수 있었다. 비록 그림을 그리는 시행착오가 필요하기는 하지만 일단 그림을 그리는 것에 익숙해지면 비교적 간단하게 내용을 전달할

수 있었다. 특히 이 방법으로 다변수미분에 내포되어 있는 방향미분의 개념을 자연스럽게 설명할 수도 있었다.

본문의 설명은 다변수함수의 미분에 대한 한 가지 새로운 직관적 접근 방법을 제시하고 있으나, 근본적으로 이 설명 방법에 의하여 다변수함수의 합성함수 미분법의 기하학적 이해가 가능하며, 미분을 선형변환으로 이해시키는 것도 자연스러울 수 있을 것이다.

개념의 중요도를 고려해볼 때, 앞으로 더욱 다변수함수 이론의 교육에 대한 연구와 관심이 필요할 것으로 생각된다.

참고 문헌

1. 고형준 외, 미분적분학과 벡터해석, 청문각, 2001.
2. 권중성 외, 미분적분학, 계수홀, 2006.
3. 김종수 외, 미적분학, 경문사, 1998.
4. 김홍종, 미적분학 2, 서울대학교 출판부, 2008.
5. 이춘호 외, 7차 교육과정을 고려한 미분적분학, 경문사, 2007.
6. 차재선 외, 미적분학, 단국대학교 출판부, 1996.
7. Cheney, Ward, ***Analysis for Applied Mathematics***, Springer, 2001.
8. Ellis, Robert, Gulick, Denny, ***Calculus with Analytic Geometry 3th ed.***, Harcourt Brace Jovanovich Inc., 1986.
9. Gullberg, Jan, ***Mathematics***: From the birth of numbers, New York: W.W. Norton & Company Inc., 1997.
10. Stewart, James, ***Calculus***: Early Transcendentals 5th ed., Thomson, 2003.
11. Swokowski, Earl W., Olinick, Michael and Pence, Dennis, ***Calculus 6th ed.***, PWS Publishing Company Boston, 1994.

On differentiation of multi-variable functions

Department of Applied Mathematics, Dankook University **Hee Chul Pak**
Department of Mathematics, Hoseo University **Young Ja Park**

It has been noticed the greater importance of mathematical education, particularly of multi-variable calculus in the undergraduate level with remarkable progress of all sorts of sciences requiring mathematical analysis. However, there was lack of variety of introducing the definition of differentiation of multi-variable functions - in fact, all of them basically rely on the chain rules. Here we will introduce a way of defining the geometrical differentiation of the multi-variable functions based upon our teaching experience.

One of its merits is that it provides the geometric explanation of the differentiation of the multi-variable functions, so that it conveys the meaning of the differentiation better compared with the known methods.

Key words: differentiation, multi-variable functions, gradient,
undergraduate mathematics education

2000 Mathematics Subject Classification: 00-01, 97-01, 97D40, 97C90

ZDM Subject Classification: D40, I60

접수일 : 2008년 2월 12일 수정일 : 2008년 3월 27일 게재확정일 : 2008년 4월 7일