한국수학사학회지 제21권 제2호(2008년 5월), 55 - 70

유클리드의 자료론(Euclid's Data)에 대하여

경상대학교 윤대원
dwyoon@gsnu.ac.kr
경북대학교 서보억
eukeuk@dgedu.net
청구고등학교 김동근
x-file-9513@hanmail.net

본 연구에서는 유클리드의 저작중의 하나인 자료론에 대해 소개하고자 한다. 먼저 자료론의 내용 구성에 대해 살펴보고, 이러한 고찰을 바탕으로 하여 이 책의 형식적인 체계에 대해 분석한다. 형식적인 체계는 정의와 명제, 증명이 기술되어진 방법에 대해 분석하고, '주어진(given)' 이 가지는 의미에 대해 살펴본다. 마지막으로는 자료론이 지니고 있는 수학적인 의미에 대해 분석한다. 수학적인 의미는 대수적인 관점, 기하학적인 관점, 유클리드의 원론과 대비된 관점에서 살펴본다.

주제어 : 수학사, 유클리드, 자료론, 주어진 것.

1. 서론

수학의 역사를 크게 세 부분으로 구분하면 첫째, 만물을 수로 나타내려고 한 시기, 둘째, 모든 수학적인 대상을 기하하적인 형상으로 나타내려고 한 시기, 셋째 기하학적인 대상을 대수적인 식으로 표현하려고 한 시기로 구분할 수 있다([2]). 이러한 세 시대 중에서 두 번째 시기에서 가장 위대한 수학자중의 한 사람이 Euclid이다.

Euclid는 원론의 저자로 잘 알려진 당대 최고의 수학자이다. 그의 원론은 20세기 초까지 학교의 교재로 사용된 거의 유일한 수학교과서라 할 만큼 오랫동안 사용되어졌다. 이로 인해 Euclid와 원론을 동일시 할 만큼 거의 대다수의 사람은 원론을 알고 있지만 다른 저작에 대해서는 그렇지 않은 것 같다. 실제로 Euclid의 다른 저작으로는 자료론(Data), 분할론(On divisions), 오류론(Pseudaria), 원추곡선론(Conics), 곡면자취론(Surface loci), 천문현상론(Phaenomena)등이 있다([4]). 이러한 저작들 중에서 일부는 전해지고 있고 그렇지 않은 것들도 있지만 이러한 저작의 존재에 대해 거의 관심을 가지지 않는 듯하다. 사실 이렇게 많은 Euclid의 저작들 중에서 유독 원론만을 우리가 잘 알고 있는 것은 원론의 뛰어난 내용에 기인한다고 볼 수 있다.

그렇다고 다른 저작들의 내용이 수학적 가치가 적다는 것은 아니다. 실제로 이와 관련하여 Pappus는 의미있는 언급을 하였다. 그는 '분석의 보물(The treasury of analysis)' 이라는 책에 대한 목록을 작성하였다. 이 목록에 제시된 33권의 책 중에서 첫 번째로 언급되어진 책이 바로 자료론이다. 정은실([1])은 Pappus의 분석법에 대해 '문제 해결에서 분석법과 종합법은 상당히 오래 전부터 사용되어 왔지만 그것을 처음으로 체계적으로 정리한 사람은 Pappus이다.' 고 하였다. Pappus가 분석법에 대해 체계적으로 정리하면서 '분석의 보물' 이라는 책 목록의 첫 번째에 자료론을 제시하였다는 것은 자료론이 수학적인 가치가 높다는 것을 말해 주기에 충분할 것이다.

자료론에 대한 선행연구에 대해 살펴보면 다음과 같다. 첫째, Mcdowell과 Sokolik ([6])은 그리스 원어를 영어로 완역하여 출판하였다. 둘째, Taisbak([7])은 자료론에 대한 그리스 원어를 영어로 번역하여 주석과 함께 출판하여 다양한 연구가 가능하도록 하였다. 셋째, Herz-Fischler([5, pp.86-91])는 자료론의 명제 84와 명제 85의 의미에 대해 분석하여 자료론의 현대적인 의미를 밝히려고 노력하였다. 넷째, Taisbak([8, pp.122-139)은 자료론의 명제 86의 대수적인 의미에 대해 분석하였다. 이처럼 자료론에 대한 국내 연구는 거의 이루어지지 않았고, 국외 연구는 특정 몇몇 명제에 대한 수학적 의미를 분석하거나 전체 자료론을 영어로 번역하고 주석을 붙이는 정도의 연구가 진행되어졌다.

따라서, 명제를 단순히 대수적 의미만을 분석하는 것에서 벗어나, 수학적으로 가치가 있고 수학사적으로 의미가 있는 유클리드의 자료론에 대해 구체적으로 고찰할 필요성이 있으며 이에 따라 자료론이 어떤 책인지 구체적으로 살펴보는 것을 본 연구의 목적으로 설정한다. 이러한 목적을 달성하기 위해 자료론의 내용 구성과 형식적 체계, 수학적인 의미에 대해 구체적으로 분석하고 고찰하도록 한다.

2. 자료론의 내용 구성

Taisbak([7])의 연구를 바탕으로 자료론의 형식적 체계를 알아보면 다음 표 1과 같다.

표 1. 자료론의 내용 구성

구분	분류	내 용	구분	분류	내 용
정의	1~4	크기, 비, 다각형, 위치가 주어진 것	명제	1~24	크기와 비
	5~8	원		25~38	위치, 거리, 방향, 평행
	9~12	주어진 것보다 더 큰(작은) 것		39~85	다각형
	13~15	직선과 방향		86~94	원추곡선

자료론의 맨 앞 부분에는 정의 15개가 제시되어져 있고, 이러한 정의는 표 1과 같

이 세분화시킬 수 있다. 정의의 제시 다음에는 총 94개의 명제가 제시되어져 있는데, 이러한 명제는 표 1과 같이 구분할 수 있다. 이러한 명제에 대해 구체적으로 살펴보자.

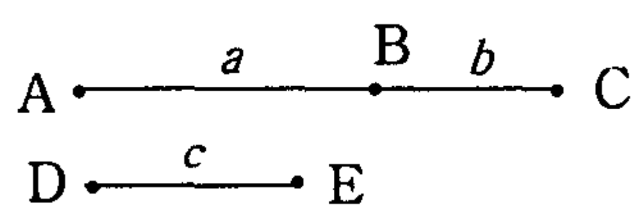
첫째, '크기와 비' 관련된 명제 중 '명제1'~'명제9' 에서는 대부분 주어진 비의 합 즉, 현대적 의미로 대수적인 덧셈과 관련이 있고, '명제10'~'명제24' 에서는 주어진 비의 변형에 대해 다루고 있다. 이것에 대해 '명제3' 과 '명제22' 를 통해 살펴보자.

[명제3] 두 개의 크기가 서로 주어지면, 이 두 크기의 합도 주어진 것이다.

이 명제의 현대적 의미로는 크기 a와 b가 주어지면 두 크기의 합 $a+b$를 구할 수 있다는 것이다.

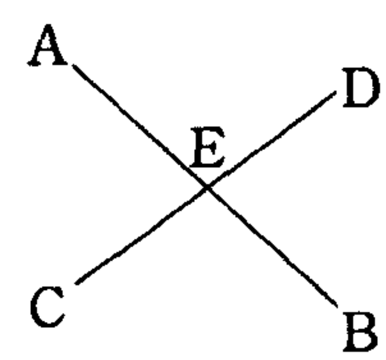
[명제22] 만약 두 크기가 어떤 크기에 대해 주어진 비를 가진다면, 그들의 합은 또한 똑같은 크기에 대해 주어진 비를 가질 것이다.

이 명제의 현대적 의미는 $a : c$와 $b : c$가 주어지면 $a+b : c$를 구할 수 있다는 것이다.



둘째, '위치, 거리, 방향, 평행' 과 관련된 '명제25'~'명제38' 에서는 주어진 직선의 위치나 점의 위치 및 두 평행선 사이의 길이의 비나 각의 크기 등에 대한 내용을 제시하고 있다. 예를 들어 '명제25' 를 통해 살펴보자

[명제25] 만약 위치가 주어진 두 직선이 서로 만나고 있다고 하면 만나는 점은 위치가 주어진 것이다.

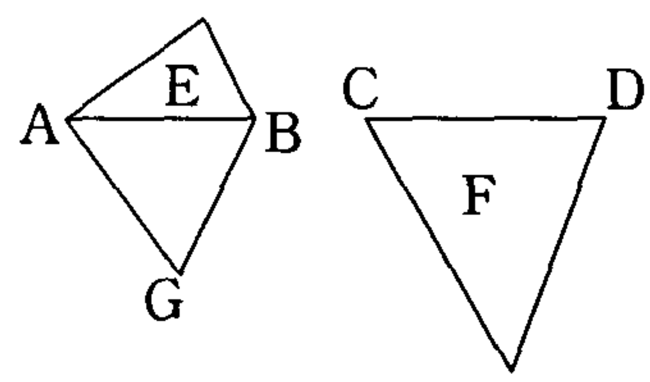


이 명제의 현대적 의미는 두 직선이 만나면 만나서 생기는 교점의 위치가 주어진다는 것이다.

셋째, '명제39'~'명제85' 까지는 다각형 특히, 삼각형의 닮음, 삼각형의 넓이, 다각형의 넓이, 다각형의 각의 크기를 주요 내용으로 다루고 있다. 예를 들어 '명제51' 을 통해 살펴보자.

[명제51] 만약 주어진 길이의 비를 가지는 두 선분이 주어져 있고, 각각의 선분을 변으로 가지는 선분으로 둘러싸인 도형을 만들면, 이 도형의 넓이의 비는 주어진 것이다.

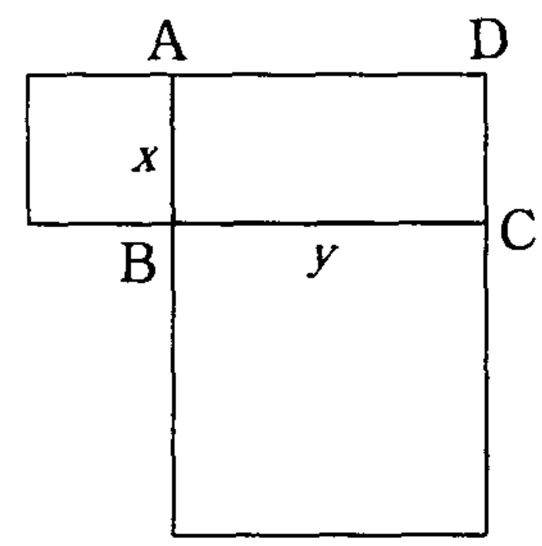
이 명제의 현대적 의미로는 선분 AB와 선분 CD 사이에 비가 주어져 있고, 선분 AB를 한 변으로 하여 만들어지는 도형과 선분 CD를 한 변으로 하여 만들어지는 도형이 있으면, 이 두 도형의 넓이의 비를 구할 수 있다는 것이다.



넷째, '명제86'~'명제94' 에서는 원추곡선과 관련된 내용을 다루고 있다. 예를 들어, '명제86' 을 통해 살펴보자.

[명제86] 주어진 크기의 각을 가지는 평행사변형의 넓이가 주어져 있다. 어떤 주어진 크기에 의한 평행사변형의 한 변이 만드는 정사각형의 넓이의 비가 다른 한 변이 만드는 정사각형의 넓이와의 비보다 크다면, 평행사변형 두 변의 길이는 각각 주어진 것이다.

이 명제의 현대적인 의미를 평행사변형의 특별한 경우인 직사각형에서 분석해 보자. 주어진 평행사변형의 넓이를 a, 주어진 어떤 크기를 b, 평행사변형의 두 변의 길이를 x, y라고 하면 '명제86' 은 다음과 같은 대수식으로 나타낼 수 있다.



$$xy = a \ , \ y^2 - b : x^2 = m : 1$$

여기서 m은 자료론의 '정의11' 즉, '주어진 크기에 의한 첫 번째 크기의 비가 두 번째 크기와의 비보다 크다는 것은, 첫 번째 크기에서 주어진 크기를 뺀 것과 두 번째 크기와의 비를 구할 수 있다.' 에 의한 비례식의 상수값이다.

결국 주어진 대수식은 모두 쌍곡선을 의미하고 있고, 실제로 두 식을 연립하면 쌍곡선의 교점 즉, 방정식의 해를 구할 수 있다.

3. 자료론의 형식적 체계

먼저 자료론에 제시되어진 정의와 명제의 기술 방식과 명제의 증명 방식에 대해 살펴본다. 자료론에 제시된 15개의 정의와 94개의 명제의 공통적인 기술 방식과 증명 방식에 대해 분석하게 된다. 다음으로는 자료론에서 가장 많이 사용되어지는 '주어진 것(given)'에 대한 의미에 대해 살펴본다. Taisbak([7])은 자료론의 영어 번역서에서 부제로 'The importance of being given' 을 사용할 만큼 '주어진 것' 의 중요성을 부각시키고 있다. 구체적으로 '주어진 것' 의 다양한 의미에 대해 살펴보게 된다.

(1) 기술 방식

정의의 기술 방식, 명제의 기술 방식, 증명의 기술 방식으로 나누어 살펴보자.

1) 정의의 기술 방식

자료론에 제시되어져 있는 정의는 모두 15개가 있다. 정의는 크게 네 개의 유형으로 분류할 수 있다.

첫 번째는 기초도형들에 대한 '주어진 것' 을 통한 정의라고 볼 수 있다. '정의1'~'정의4' 가 해당된다. 이러한 정의는 너무나 당연하여서 정의라고 보다는 공리에 가까운 내용을 담고 있는 정의이다.

두 번째는 원에 대한 '주어진 것' 을 통한 정의이다. '정의5'~'정의8' 이 해당된다.

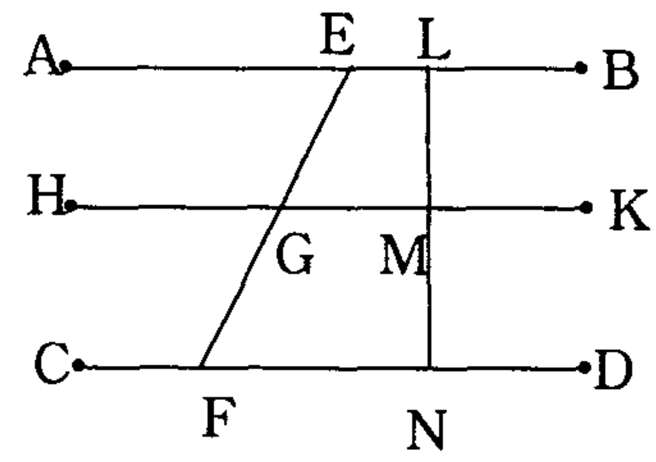
세 번째는 비교를 통한 정의라고 볼 수 있다. '정의9'~'정의12' 가 해당된다. 주어져 있는 두 크기를 비교하는 것으로, 예를 들어 '정의11' 을 통해 살펴보자. 이 정의는 '주어진 크기에 의한 첫 번째 크기의 비가 두 번째 크기와의 비보다 크다는 것은, 첫 번째 크기에서 주어진 크기를 뺀 것과 두 번째 크기와의 비를 구할 수 있을 때이다.' 이다. 하지만 우리에게 잘 알려진 원론 5권 '정의7' 을 현대적 의미로 살펴보면 '$a:b$가 $c:d$보다 크다는 것은 적당한 수 p와 q에 대하여 $pa>qb$이고 $pc \leq qd$이 성립한다는 것' 이다. 따라서 이 정의는 조금 생소하지만 명제의 내용 중 '크기와 비' 에서 '명제10'~'명제11', '명제13', '명제15'~'명제21' 을 증명하는데 이 정의가 이용될 정도로 비의 크기를 효율적으로 정의하고 있다. 또한, 앞에서 살펴본 '명제86' 에서처럼 방정식의 해를 구하는데도 이용된다.

네 번째는 직선을 통한 정의라고 볼 수 있다. '정의13'~'정의15' 가 해당된다.

2) 명제의 기술 방식

명제의 기술 방식은 94개 모두에서 거의 동일한 형태를 지니고 있다. 모든 명제는 '만약에~이라면(가정),~이 된다(결론)' 의 구조를 취하고 있다. 주어진 조건을 충족시키면 주어진 결과를 얻을 수 있다는 명제의 가장 기본적인 구조이다. 여기서 주목할 것은 가정에 들어갈 대상들의 개수이다. 자료론에서는 항상 2개(혹은 3개)의 대상이 가정에 들어있다. 결론에는 항상 1개의 대상이 놓여져 있다. 따라서 주어진 2개(혹은 3개)의 조건을 충족시키면 새로운 1개의 결론을 얻을 수 있다는 것이다. 다음 주어진 '명제 37' 을 통해 구체적으로 살펴보자.

[명제37] 두 평행선을 동시에 지나는 한 직선을 긋는다. 이 직선에 의해서 두 평행선 사이에 생기는 선분의 길이의 비를 주어진 비로 나누는 점들을 평행선과 나란히 이어서 만든 새로운 직선의 위치는 이미 주어진 것이다.



주어진 '명제37' 은 두 평행선 AB, CD와 두 평행선 사이의 선분의 길이의 비인 EG : GF가 주어진 가정에 해당하고, 직선 HK가 결론에 해당하는 구조이다. 이 명제 역시 다음과 같이 제시된 '명제37-1', '명제37-2' 와 같은 참인 명제를 만들 수 있다.

[명제37-1] 두 평행선이 주어져 있고, 평행선 사이에 주어진 두 평행선과 평행인 새로운 직선이 주어졌다고 하자. 그러면, 새로운 직선 위의 모든 점들은 평행선을 동시에 지나는 직선들을 동일한 비로 나눈다.

[명제37-2] 한 직선이 주어져 있다. 이 직선에 의해서 임의의 선분이 똑같은 비율로 분할되는 선분들이 주어졌다고 하자. 그러면, 이러한 선분들의 양끝점을 이어 두 직선은 서로 평행한 직선이 된다.

이상과 같이 자료론에 제시된 명제의 기술 방식에서의 특성에 대해 살펴보았다. 이처럼 자료론의 대다수의 명제는 이러한 구조로 구성되어져 있다. 이러한 명제의 형식체계를 통해 얻을 수 있는 대상 A, B, C를 Eves([3], 138)는 '자료(Datum)' 라는 이름으로 부르고 있으며 이것은 하나를 제외한 나머지 모두가 주어졌을 때 이들로부터 그 나머지 하나를 구할 수 있는 도형의 부분 또는 관계들의 집합으로 정의한다고 제시하고 있다.

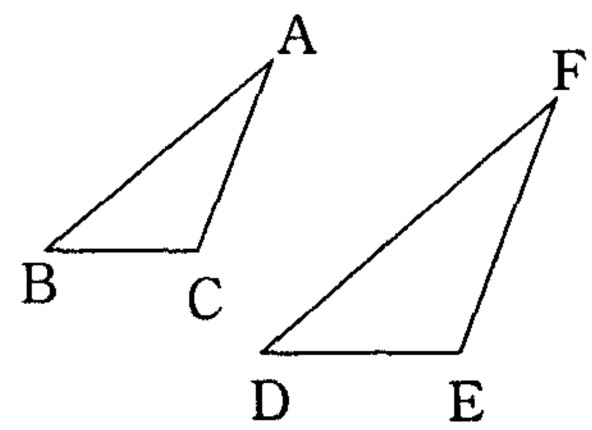
또한, 이러한 체계를 가지는 명제는 다음과 같은 중요한 의미를 생각할 수 있다. 일반적으로 문제의 구성요소를 보면 주어진 것, 배경지식, 절차, 구할 것으로 구분할 수 있고, 문제해결과정은 정보의 수집, 정보의 처리, 정보의 기억으로 나눌 수 있다. 문제의 구성요소들 중에서 미지의 것을 구하는 것이 문제해결이라고 본다면, 미지의 것을 구하기 위해 주어진 모든 요소들이 정보들이 된다. 여기서 정보는 문제해결을 위해 문제에 주어진 '자료' 들이다. 이러한 자료들을 수집하고, 처리해서 문제를 해결하게 된다. 즉, 자료는 새로운 미지의 것을 찾는 필수적인 요소이다. 이러한 관점에서 Euclid의 저작의 제목이 자료론인 것은 상당히 타당한 듯하다. 자료론의 명제에는 일반적으로 세 개(혹은 네 개)의 수학적인 대상이 있다. 예를 들면, 다음에 제시될 '명제41' 에서는 한 끼인 각(대상1), 두 변의 길이의 비(대상2), 삼각형(대상3)이다. 이 세 개의 대상들 중 두 개가 주어지면 나머지 한 대상을 구할 수 있다는 의미에서 '자료' 라는 제목이 붙었을 것으로 생각되어진다. 자료론에서의 명제는 모두 세 개(혹은 네 개)의 서로 다른 수학적인 자료가 주어지고, 이 세 개(혹은 네 개)중에 임의의 두 자료(혹은 세 자료)를 알면 나머지는 한 자료를 반드시 구할 수 있다는 점에서 중요한 의미를 가진다.

3) 증명의 기술 방식

자료론에서 제시된 명제를 증명하는 방식도 상당히 일관성이 있다. 거의 모든 증명의 유형이 동일하다. '명제41' 을 통해서 자료론에서의 증명 유형에 대해 구체적으로 살펴보자.

[명제41] 만약에 삼각형에서 한 각이 주어져 있고, 주어진 각을 이루는 두 변의 비가 주어진다면, 그 삼각형의 모양은 주어진 것이다.

(증명) 삼각형 ABC에서 주어진 각을 각 BAC라 하고, 변 BA와 AC의 변의 길이 비가 주어졌다. 그러면 삼각형 ABC의 모양은 주어졌다고 말할 수 있다.



왜냐하면, 어떤 위치에 크기를 가지는 선분 DF를 만든다. 그리고 선분 DF위의 점 F에서 주어진 각 BAC와 크기가 같은 각 DFE를 작도할 수 있다.[원론1권, 명제23]

그리고 각 BAC가 주어진 것이므로 각 DFE도 역시 주어진 것이다.[정의1]

직선 DF가 위치하고, 그 직선위에 점 F를 지나고 주어진 각 DFE와 크기가 같은 직선 FE를 그릴 수 있다. 따라서 직선 FE도 위치를 작도할 수 있다.[명제29]

그리고 BA와 AC의 비가 주어져 있으므로, DF와 FE의 비도 그것과 똑같은 비를 가지게 된다. 그리고 DE를 연결한다. 따라서 DF와 FE의 비는 주어진 것이다.[정의2]

그리고 DF도 주어진 것이다. 따라서 FE도 역시 주어진 것이 된다.[명제2]

그러나 그것은 위치가 역시 주어진 것이다. 그리고 F는 주어진 것이다. 따라서 E 역시 주어진 것이다. 그리고 점 D, F의 각각 주어진 것이다. 따라서 직선 DF, FE, DE 각각 모두 크기와 위치가 주어진 것이 된다.[명제26]

따라서 삼각형 DFE는 모양은 주어진 것이다.[명제39]

그리고 두 삼각형 ABC, DEF는 한 각이 서로 같고, 두 변의 길이의 비가 같으므로 삼각형 ABC와 삼각형 DEF는 서로 닮음이다.[원론6권, 명제6]

그리고 삼각형 DFE의 모양도 주어진 것이다. 따라서 삼각형 ABC의 모양도 주어진 것이다.[정의3]■

증명의 형식적인 측면에 대해 분석해 보자. '명제41' 에 보여주는 증명 방법은 유클리드의 자료론에 나타난 가장 전형적인 형태라고 볼 수 있다. 이러한 증명을 통해서 우리가 중요한 수학적 의미를 발견할 수 있다. 만약에 어떤 것들이 주어져 있다면, 다른 것 역시 주어진 것과 마찬가지라는 주장을 명확하게 밝히고 있는 형식을 취하고 있다. 즉, '명제41' 에서는 삼각형의 한 각과 그 각을 만드는 두 변이 주어지면 다른 각의 크기와 다른 변의 길이도 주어진 것과 마찬가지이므로 삼각형의 모양이 주어진 것이라는 증명을 하고 있다. 이것이 자료론에서 제시해 주고 있는 가장 일반적인 형

태의 증명 형태이다. 여기서 명확하게 밝히기 위한 과정을 분석하면 다음과 같은 기본 진술 방식이 있다.

첫째, 증명의 서두에 명제의 가정과 명제의 결론을 언급하고 있다. 가정으로써의 '주어진 것' 과 결론으로써의 '주어진 것' 을 구체적인 그림과 함께 제시하고 있다.

둘째, 결론이 주어진 것으로 볼 수 있는 이유를 설명한다는 의미에서 '왜냐하면' 으로 증명을 시작하고 있다.

셋째, 가정의 주어진 것으로부터 얻을 수 있는 대상들을 찾아 그들을 다시 새로운 '주어진 것' 으로 받아들인다.

넷째, 증명의 과정의 가장 중요한 부분은 원론의 명제를 인용하고 있다. 원론의 제시된 명제의 정확한 이해를 바탕으로 증명이 진행되어지고 있다.

(2) '주어진 것' 의 의미

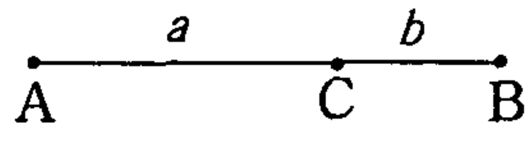
자료론에서 가장 많이 사용되어진 단어는 바로 '주어진 것' 이다. 앞에서 언급한 것처럼 '주어진 것' 이라는 것은 명제에서 모두 세 개(혹은 네 개)의 서로 다른 수학적인 자료가 주어지고, 이 세 개(혹은 네 개)중에 임의의 두 자료(혹은 세 자료)를 알면 나머지는 한 자료를 반드시 구할 수 있다는 점이다. 이것은 원론의 연역적인 증명과는 많은 차이점이 있음을 알 수 있다. 즉 원론에서 증명된 명제는 역이 성립하지 않을 수 있기 때문이다. 또한 가장 다양한 의미로 사용되어진 것이 또한 '주어진 것' 이라고 볼 수 있다. 앞에서도 언급하였지만 이 책의 부제가 'The importance of being given' 이라고 할 만큼 이 책에서 '주어진 것' 이 차지하는 비중은 매우 높다. 구체적으로 이 '주어진 것' 의 의미에 대해 살펴보자.

1) 명제의 가정으로서의 '주어진 것'

명제는 가정과 결론 두 부분으로 구분할 수 있다. 자료론에서 사용된 '주어진 것' 의 의미가 가장 단순하게는 명제의 가정으로 사용되기도 한다. 다음 주어진 '명제1' 을 통해 가정으로써의 '주어진 것' 의 의미를 찾을 수 있다.

[명제1] 두 개의 크기가 주어지면, 이 두 크기의 비도 주어진 것이다.

'명제1' 의 의미를 구체적으로 살펴보면, a와 b의 값이 주어지면, $a:b$는 구할 수 있다는 의미로 받아들일 수 있다. 여기서 주어졌다는 것은 명제의 가정으로써 주어진 것으로 보인다.

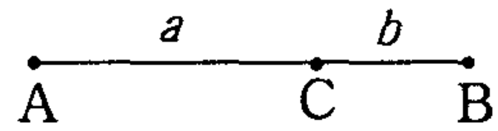


2) 크기를 구할 수 있다는 의미로서의 '주어진 것'

'주어진 것' 의 의미가 우리가 원하는 크기를 구하거나 구체적인 수치 값을 구할 수 있다는 의미로 사용되어지고 있다. 다음 주어진 '명제7' 을 통해 구체적으로 살펴보자.

[명제7] 한 크기가 주어지고, 이 크기를 두 개로 분할하는 비가 주어지면, 이 두 크기는 주어진 것이다.

'명제7' 의 의미를 구체적으로 살펴보면, 두 크기의 합 $a+b$ 와 두 크기의 비 $a:b$가 주어지면, 각각의 크기 a, b를 구할 수 있다는 의미로 받아들일 수 있다. 예를 들어, 크기의 합이 10이고, 두 크기의 비가 2 : 3이면 A와 B의 크기를 구할 수 있다는 것이다.

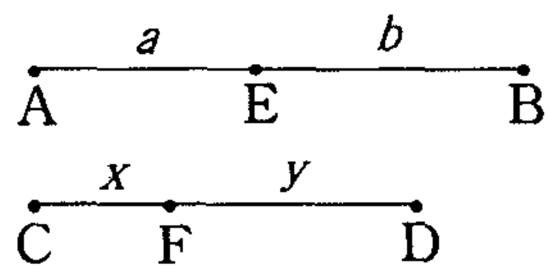


3) 비율을 구할 수 있다는 의미로서의 '주어진 것'

'주어진 것' 은 구체적인 값을 구할 수 있다는 것과 함께 비율을 구할 수 있다는 의미로 사용되어지고 있다. 다음 주어진 '명제23' 을 통해 구체적으로 살펴보자.

[명제23] 두 부분의 합으로 된 주어진 전체의 비가 주어져 있고, 두 전체를 구성하는 각각의 부분들끼리의 비가 주어져 있으면, 부분들의 모든 비는 주어진 것이다.

'명제23' 의 의미는 두 크기들의 합의 비 $a+b \ : x+y$ 가 주어지고, 일부분의 크기의 비 $a:x$, $b:y$가 각각 주어지면, $x:y$의 비를 구할 수 있다는 의미로 볼 수 있다. 구체적으로 $a+b : x+y = 1 : 3$, $a:x = 1 : 4$, $b:y = 3 : 7$ 이면 $x:y$의 값을 실제로 구할 수 있다.

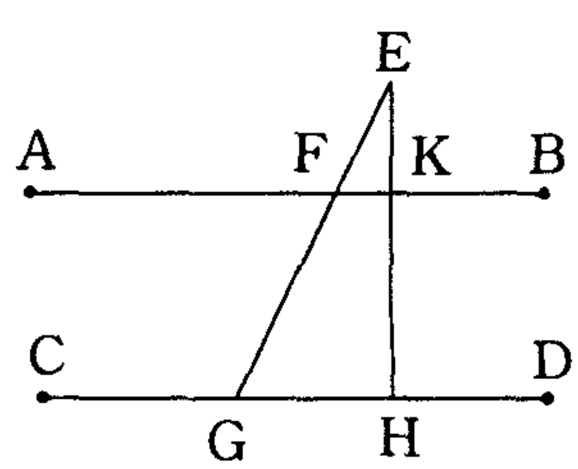


4) 도형을 작도할 수 있다는 의미로서의 '주어진 것'

'주어진 것' 은 작도를 할 수 있다는 의미로 사용되어지고 있다. 고대 그리스 시대에 모든 수를 선분으로 표현하려고 했다는 측면에서 작도 가능성의 문제는 매우 중요한 문제였다. 따라서 작도가능성으로써의 '주어진 것' 의 의미는 매우 중요한 의미를 지닌다. 다음 주어진 '명제34' 와 '명제84' 를 통해 구체적으로 살펴보자.

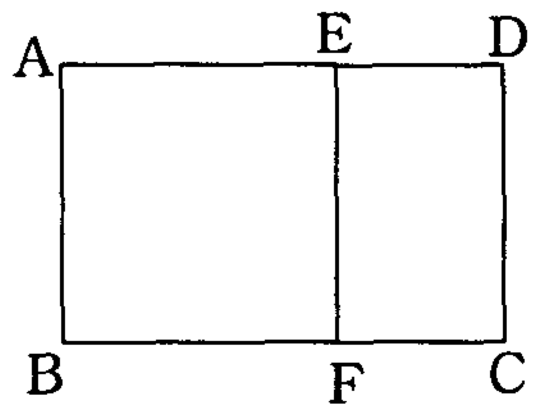
[명제34] 주어진 점으로부터 위치가 주어진 두 평행한 직선 사이에 직선을 그으면 잘려진 부분은 비가 주어진다.

'명제34' 의 의미를 구체적으로 살펴보면, 두 평행선 AB, CD가 있고, 이 평행선을 지나는 한 직선 EG가 있다고 하면, 선분 EF와 선분 FG의 길이의 비를 '주어진 것' 으로 볼 수 있다는 것이다. 여기서 길이의 비가 주어졌다는 것은 선분 EF와 선분 FG의 길이의 비와 같은 길이의 비를 가지는 선분을 작도할 수 있다는 것을 의미한다.



[명제84] 넓이가 주어진 평행사변형이 있고, 한 변의 길이가 다른 변의 길이보다 주어진 길이만큼 더 크게 주어져 있다면, 각각의 두 변의 길이는 주어진 것이다.

'명제84' 의 의미를 특별한 경우인 직사각형을 통해 살펴보자. 직사각형 ABCD의 넓이가 주어져 있고, 선분 BC의 길이와 선분 AB의 길이의 차가 주어져 있다고 하면, 직사각형의 두 변의 길이인 선분 AB, 선분 BC의 길이를 작도할 수 있다는 것을 의미한다. 실제로, 주어진 넓이를 S라고 하고, 길이의 차이를 K라고 하면 다음과 같은 대수식을 얻을 수 있다.



$$AB \cdot BC = S, \quad BC - AB = K$$

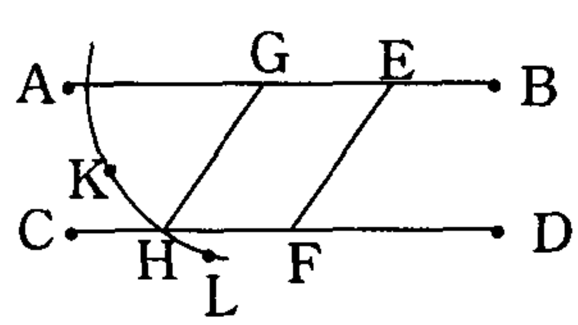
이 식을 풀면, $AB = \dfrac{-K+\sqrt{K^2+4S}}{2}$ 를 얻을 수 있고, 이 값은 실제로 간단하게 작도가 가능하다. 따라서, 주어진 것으로부터 원하는 도형을 작도할 수 있다.

5) 도형의 형태가 존재한다는 의미로서의 '주어진 것'

'주어진 것' 은 작도보다 더 넓은 의미로 사용되어지고 있다. 주어졌다는 것은 조건에 합당한 도형의 형태가 존재한다는 의미를 지닌 경우도 있다. 다음 주어진 '명제33' 과 '명제40' 을 통해 구체적으로 살펴보자.

[명제33] 위치가 주어진 평행인 두 직선 사이에 크기가 주어진 직선을 긋는다면 평행선이 직선과 이루는 각의 크기는 주어진 것이다.

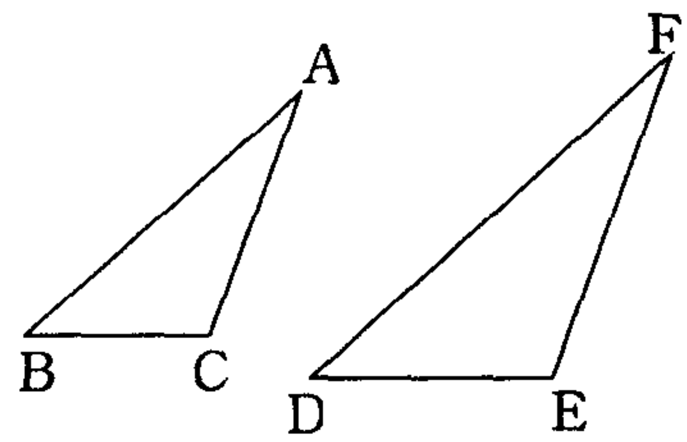
'명제33' 의 의미는 두 평행선 AB와 CD가 주어졌고, 이 두 평행한 직선 사이에 크기가 주어진 선분 EF가 주어져 있으면(점 E는 직선 AB위에 점 F는 직선 CD위에 있다) 이 선분이 두 평행선과 만나는 점에서 이루는 각 BEF, 각 EFD은 주어진 형태를 가지고 있다는 의미이다.



[명제40] 만약 삼각형의 세 각의 크기가 주어진다면, 그 삼각형은 모양이 주어진 것이다.

'명제40' 에서 세 각의 크기가 주어지면 삼각형은 한 도형으로 결정되지는 않는다. 하지만 그 삼각형의 형태는 닮음이란 의미로 동일한 형태를 지니고 있다. 따라서, '주어진 것' 이 형태를 가지고 있다는 의미로 사용되어지고 있다.

4. 자료론의 수학적 의미

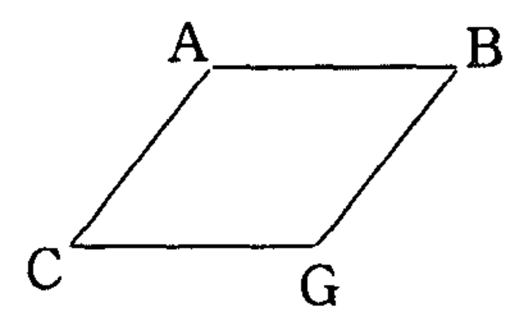


자료론에 나타난 명제들의 수학적인 의미를 대수적인 관점, 기하학적인 관점, 유클리드의 원론과 대비된 관점으로 나누어 살펴본다.

(1) 대수적인 의미

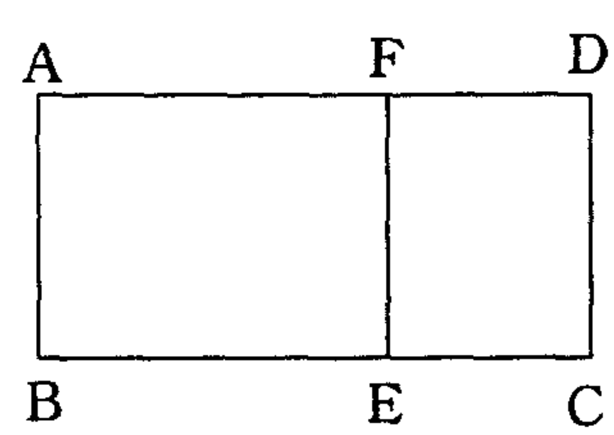
이 절에서는 자료론에 제시된 명제들 중 대수적인 의미를 가지는 명제들에 대해 분석한다. 다음 '명제57' 과 '명제85' 를 통해 구체적으로 살펴보자.

[명제57] 넓이가 주어져 있고, 한 변의 길이와 한 각의 크기가 주어진 평행사변형이 있다면, 다른 한 변의 길이는 주어진 것이다.



위 명제를 현대적 의미로 살펴보면 오른쪽 그림에서처럼, 주어진 평행사변형 ACGB의 넓이를 S라 하고, 주어진 한 변 AB의 길이를 p, 주어진 한 각 CAB의 크기를 θ라고 하면, 다른 한 변 q의 길이를 구할 수 있다는 것이다. 즉, 평행사변형에서 이웃하는 두 변의 길이 p, q와 그 사이의 끼인각 θ가 주어지면 그 넓이는 $pq\sin\theta$가 되므로, 위 명제에서처럼 다른 한 변 b의 길이를 충분히 구할 수 있고, 세 대상 한 변 a와 한 각 θ, 넓이 S, 그리고 다른 한 변 b는 '자료' 가 됨을 알 수 있다. 예를 들어, 한 변 $a=4$, 각 $\theta=30^\circ$, 넓이 $S=10$이면 다른 한 변의 길이 b를 구할 수 있다는 것이다. 이것은 또한 두 변의 길이가 주어지고 넓이가 주어지면 그 끼인각도 역시 구할 수 있다.

[명제85] 만약 두 직선이 주어진 각 내부에 넓이를 가지고 있고 만약 그들의 합이 주어진다면 그들의 각각은 주어진다.



기하학적인 형태를 나타내고 있는 명제85에서 두 직선에 의해 주어진 각을 직각인 직사각형인 경우로 생각해 보자. 그러면 이것은 도형의 넓이가 주어질 것이다. 따라서 주어진 각에 대한 두 변을 각각 x, y라 하고 그 넓이를 a^2, 두 변의 합을 b라고 하면, 이것을 다음과 같은 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$xy=a^2,\quad x+y=b$$

위 식의 대수적인 해를 구하여 보면 $x=\frac{b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2}$, $y=\frac{b-\sqrt{b^2-4a^2}}{2}$를 얻을 수 있다.

(2) 기하학적인 의미

이 절에서는 자료론에서 제시된 기하학적 의미를 정의와 명제로 구분하여 살펴보자.

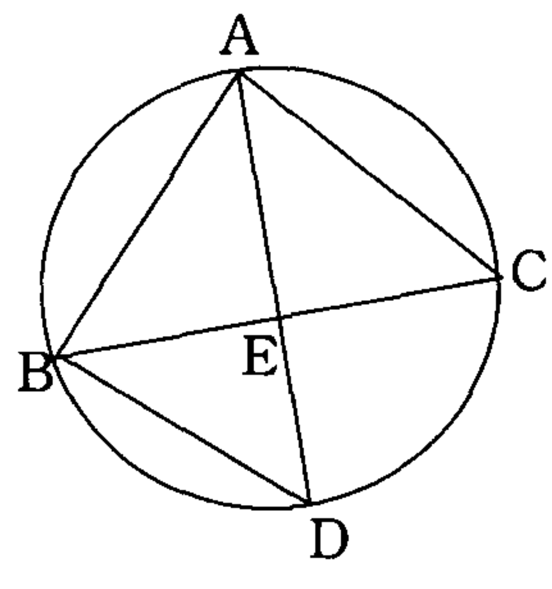
1) 정의를 통한 기하학적 의미

자료론에서 주로 언급되는 '주어진' 의 의미가 여러 가지로 쓰이고 있다. 그중에서 'A의 모양이 주어진 것이다.' 라는 문장은 '주어진 직선으로 둘러싸인 도형 B가 있고, A는 B와 닮은 것이다.' 라는 것을 의미하고 있음을 '정의3' 에서 제시하고 있다. 이 정의는 '만약 한 각이 다른 각과의 관계로 주어지고, 변은 다른 변과의 비율로 주어진다면 직선으로 둘러싸인 도형의 모양은 주어진 것이다.' 이다.

2) 명제를 통한 기하학적 의미

자료론에서 명제들이 가지는 기하학적인 의미에 대해 '명제93' 을 통해 구체적으로 살펴보자.

[명제93] 위치가 주어진 원 안에 크기가 주어진 두 선분이 한 점에서 주어진 각의 크기를 만들면서 만나고 있다. 그리고 이 주어진 각을 이등분하는 선분이 주어져 있다. 그러면, 처음 주어진 두 선분의 길이의 합과 주어진 각의 이등분선으로 만들어지는 선분의 길이의 비는 주어진 것이다. 또한, 처음 두 선분의 양끝점을 이은 선분과 각의 이등분선이 만나는 점에 의해서 각의 이등분 선분의 나머지 부분을 생각할 수 있다. 이 부분과 처음 두 선분의 길이의 합을 두 변으로 하는 직사각형의 넓이는 주어진 것이다.



'명제93' 의 의미를 살펴보자. 원위에 있는 두 선분 AB와 AC가 한 점 A에서 만나고 있고, 각 BAC는 크기가 주어져 있다. 각 BAC의 이등분선을 선분 AD라고 하자. 또한, 선분 BC와 선분 AD가 만나는 점을 E라고 하자. 그러면, 선분 BA와 선분 AC의 합과 선분 BD를 한 변으로 하는 직사각형의 넓이는 선분 AD와 선분 BC를 한 변으로 하는 직사각형의 넓이와 같다.

이 명제는 '톨레미 정리'의 특별한 경우로 볼 수 있다. 왜냐하면 만약 선분CD를 연결하면 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이 된다. 선분 BA와 선분 AC의 합과 선분 BD를 한 변으로 하는 직사각형의 넓이라는 것은 대수적으로 표현하면 다음과 같다. 즉, $(BA+AC)BD=BA\cdot BD+AC\cdot BD$이다. 여기서 $BD=CD$가 성립하면 '톨레

미 정리'가 된다.

(3) 원론과 자료론

이 절에서는 원론과 자료론의 내용 구성적 체계를 비교하여 보고, 원론과 자료론 사이의 내용적인 연관성에 대해 살펴보자.

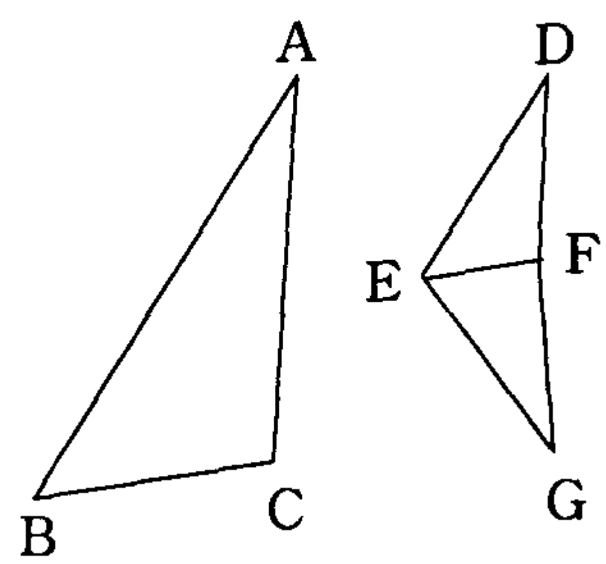
첫째, 자료론은 원론의 1~6권까지 평면도형, 원, 그리고 비례 이론 등의 내용들과 깊은 관련을 맺고 있다. Taisbak([7])에 따르면, '명제1'~'명제9' 는 원론 5권, '명제10'~'명제24' 는 원론 5, 6권, '명제39'~'명제55' 는 원론 1, 3, 5, 6권, '명제56'~'명제67' 은 원론 1, 2, 5, 6권, '명제68'~'명제83' 는 원론 1, 3, 4, 5, 6권, '명제84'~'명제94' 는 원론 1, 2, 3, 5, 6권과 관련이 있다.

둘째, 원론은 출발점에서 정의, 공준, 공리들을 명확하게 제시하고 명제들을 증명하는데 있어서 다른 책에 있는 내용을 언급하지 않고 오로지 원론에 나오는 내용들만을 가지고 연역적인 방법으로 증명하고 있다. 하지만 자료론은 94개의 명제들을 책의 서두에 새롭게 정의한 내용을 기초로 하여 차례대로 자료론의 명제들을 이용할 뿐만 아니라 원론의 내용(정의, 공준, 공리, 정리)들을 이용하여 연역적으로 증명하여 나가고 있다. 예를 들어, '명제 79' 를 통해 살펴보자. 이 명제는 '만약 두 삼각형의 한 각이 서로 같고 그 같은 각으로부터 수선을 긋고 첫 번째 삼각형의 밑변 대 높이의 비가 두 번째 삼각형의 밑변 대 높이의 비와 같다면, 삼각형들은 등각이다.' 이다. 이 명제를 증명하기 위해서 자료론의 정의나 명제를 전혀 이용하지 않고 오로지 원론의 내용으로만 즉, '공준1', 원론 1권의 '명제12', '명제23', '명제28', '명제29', '명제32', '명제33', 원론 3권의 '명제21', 원론 4권의 '명제5', 원론 5권의 '명제9', '명제11', 원론 6권의 '정의1', '명제4' 만을 이용하여 증명하고 있다. 이것은 원론을 가장 기본서로 보고 있다는 것이며 자료론은 그에 따른 보조 교재로 보고 있음을 알 수 있다. 그래서 간혹 유클리드의 저서들 중에 자료론을 '보조론(Dedomena)' 이라고 하는 것도 이와 같은 이유라고 생각된다.

셋째, 자료론에 제시된 명제가 원론의 어떤 내용과 연관성이 있는지 살펴보자. 삼각형에서 두 개의 주어진 각, 혹은 한 각 그리고 두 변들 사이에 주어진 비, 혹은 세 변들 사이에 주어진 비는 모양이 주어짐으로 '자료' 를 가지는 명제는 '명제40'~'명제46' 에서 볼 수 있다. 이 명제들 중에서 원론 6권 '명제4'~'명제7' 과 깊은 관계가 있는 것을 표 2와 같이 나타낼 수 있다.

표 2. 자료론과 원론 사이의 관계

명제 \ 자료	$\angle A$	$\angle B$	$a:b$	$b:c$	원론
40	○	○			6권 명제4
41	○			○	6권 명제6
42			○	○	6권 명제5
44	○		○		6권 명제7



위 표 2를 바탕으로 원론 6권 '명제5' 와 자료론의 '명제42' 의 연관성을 살펴보자. 먼저 원론 6권의 '명제5'를 통해 살펴보면 '만약 두 삼각형의 변들이 비례한다고 하면 두 삼각형의 각들이 모두 같고, 그 삼각형들은 대응하는 변들을 마주보는 각들의 크기가 같다.' 이다. 여기서 '두 삼각형의 변들이 비례한다.' 는 문장은 오른쪽 그림에서처럼, 현대적 의미로 AB:BC=DE:FE, BC:CA=EF:FD, BA:AC=ED:DF이다. 이것을 이용하여 두 삼각형 ABC와 DEF는 각의 크기가 같음을 원론에서 증명하고 있다. 여기서 주목할 만한 것은 두 삼각형 사이에 대응하는 변의 길이의 비가 같음을 이용하고 있지만 사실 한 삼각형 ABC에서도 각 변들 사이에 길이의 비가 존재함을 알 수 있다. 이 명제와 관련된 것으로 자료론의 '명제42' 를 살펴보자. 이 명제는 '삼각형의 세 변의 길이에 대한 서로 서로의 변의 길이의 비가 주어지면 삼각형의 모양은 주어진다.' 이다. 이 명제에서 현대적 의미는 세 변의 길이의 비 즉, AB:BC와 BC:AB 가 주어지면 삼각형의 모양은 주어진다는 것이다. 앞 절에서 언급한 것처럼 삼각형의 모양이 주어진다는 것은 주어진 도형과 삼각형은 닮았음을 뜻한다. 따라서 두 도형의 대응하는 각의 크기 또한 구할 수 있다.

다음으로 원론 6권 '명제7' 은 '두 삼각형의 한 각의 크기가 같고, 그 각을 끼고 있는 변들의 길이가 비례하면 그 두 삼각형들은 각의 크기가 같다.' 이다. 이것은 삼각형의 닮음조건 중 SAS 닮음이다. 이와 관련하여 자료론의 '명제44' 는 '만약 삼각형이 한 각의 크기가 주어지고 다른 각에 대한 변들이 서로 서로 비가 주어진다면 그 삼각형은 모양이 주어진 것이다.' 이다. 이 명제는 원론 6권 '명제7' 의 응용문제로 끼인각에 대한 두 변의 길이의 비가 주어진 것이 아니고 한 각과 다른 각에 대한 두 변의 길이의 비가 주어져도 역시 각의 크기를 구할 수 있다는 것이다.

5. 결론 및 제언

지금까지 유클리드의 자료론을 다양한 측면에서 분석하고 고찰하였다. 이상의 연구로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 자료론의 내용 구성을 분석한 결과 정의 15개와 명제 94개로 구성되어져 있음을 알 수 있었다. 특히 명제는 크기와 비, 위치·거리·방향·평행, 다각형, 원추곡선 네 개의 큰 영역으로 구분할 수 있었다.

둘째, 자료론의 형식적인 체계를 정의의 기술 방식, 명제의 기술 방식, 명제의 증명 방식, '주어진 것' 의 의미를 통해 분석하였다. 구체적으로, 정의의 기술 방식은 크게 네 개의 서로 다른 유형으로 분류되어져 있었다. 명제의 기술 방식에서는 모든 명제가 '만약에~이라면,~이 된다.' 의 구조를 취하고 있었는데, 주어진 조건을 충족시키면

주어진 결과를 얻을 수 있다는 명제의 가장 기본적인 골격을 갖추었다. 특히, 가정과 결론에서 주어진 대상들을 '자료' 라고 표현하였는데, 이것은 하나를 제외한 나머지 자료가 주어졌을 때(가정) 이들로부터 그 나머지 하나(결론)를 구할 수 있는 것을 의미하였다. 이러한 '자료' 들은 작도나 증명을 위한 분석을 가능하도록 한다는 점에서 중요한 의미를 지닌다고 볼 수 있고, 이러한 측면에서 자료론에 제시된 명제들은 매우 유용한 가치를 가진다고 하겠다. 명제의 증명 기술 방식을 보면 자료론에서는 a,b,c,d 가 모두 기하학적인 대상이라고 할 때, 만약 a,b 가 주어졌다고 하면, c,d 는 주어진 것과 똑같은 것임을 보임으로써 증명을 완성하고 있다. '주어진 것' 의 의미는 명제의 가정으로서의 '주어진 것', 크기를 구할 수 있다는 의미로서의 '주어진 것', 비율을 구할 수 있다는 의미로서의 '주어진 것', 도형을 작도할 수 있다는 의미로서의 '주어진 것', 도형의 형태가 존재한다는 의미로서의 '주어진 것' 등 다양한 의미로 사용되고 있음을 알 수 있었다.

셋째, 자료론의 수학적인 의미를 분석한 결과 대수적인 관점, 기하적인 관점에서 중요한 의미를 가지고 있었으며 원론과도 밀접한 관계를 지닌 것으로 나타났다. 특히, 원론과의 관련성 측면에서 볼 때, 자료론이 그 중요한 원론에 있는 명제와 문제들의 부가적인 해석을 위한 기본적인 연습에 의미있는 내용으로 구성되어졌음을 확인할 수 있었다. 따라서, 자료론이 위대한 원론의 학습을 위한 보조자료로 중요한 가치를 지니고 있었다.

이러한 연구결과를 바탕으로 우리는 다음과 같이 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 자료론에 나타난 명제들의 의미를 정확하게 분석하여 현대적인 의미를 보다 구체적으로 재정립할 필요가 있다. 둘째, 자료론에 제시된 종합과 분석적 방법에 대한 체계적인 분석을 통해 논증기하를 효과적으로 지도하기 위한 연구가 필요하다. 셋째, 자료론에 제시되어져 있는 정의와 명제들이 중등학교 기하 내용과 어떤 관련성을 맺고 있는지 분석하고, 이를 통해 기하교육에 주는 시사점에 대해 고찰할 필요가 있다. 넷째, 자료론에 제시된 '자료' 와 '주어진 것' 에 다양한 의미 분석을 통해 증명과 작도 지도를 위한 다양한 학습자료의 개발이 필요하다. 다섯째, '자료' 가 되는 다양한 수학적인 상황을 수집하여 학생들의 문제해결력을 높이기 위한 여러 가지 학습 자료의 개발이 필요하다.

참고 문헌

1. 정은실, Polya의 수학적 발견술 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문 (1994).
2. 한인기, 교사를 위한 수학사, 교우사, 2003.
3. Eves, H., ***An Introduction to the History of Mathematics***, Saunders College

Publications, 1990.
4. Heath, T., ***A History of Greek Mathematics***, Dover Publications Inc, 1981.
5. Herz-Fischler, R., ***What are propositions 84 and 85 of Data all about?***, Historia Math., 11 (1984), 86-91.
6. Mcdowell, G. L., ***Sokolik, M. A., The Data of Euclid*** : Translated from the text of Menge, Union Square Press, 1993.
7. Taisbak, C. M., ***Euclid's Data(ΔΕΔΟΜΕΝΑ) or The Importance of Being Given***, Museum Tusculanum Press, 2003.
8. Taisbak, C. M., ***Zeuthen and Euclid's 'Data' 86 algebra - or A lemma about intersecting hyperbolas?***, Centaurus., 38 (1996), 122-139.

On the data of Euclid

Gyeongsang National University and RINS **Dae Won Yoon**
A lecturer at Kyungpook National University **Bo Euk Suh**
Chunggu High School **Dong Keun Kim**

This study is about the Data which is one of Euclid's writing. It dealt with the organization of contents, formal system and mathematical meaning.

First, we investigated the organization of contents of the Data. Second, on the basis of this investigation, we analyzed the formal system of the Data. It contains the analysis of described method of definition, proposition, proof and the meaning of 'given'. Third, we explored the mathematical meaning of the Data which can be classified as algebraic point of view, geometric point of view and the opposite point of view to 'The Elements'.

Key words: History of mathematics, Euclid, Data, Given.

2000 Mathematics Subject Classification : 01A01

ZDM Classification : G15

접수일 : 2008년 1월 22일　　수정일 : 2008년 3월 10일　　게재확정일 : 2008년 3월 17일