한국수학사학회지 제21권 제2호(2008년 5월), 39 - 54

문제해결과 데카르트의 <기하학>

인하대학교 수학교육과 **한경혜**
stern251@hanmail.net

이 논문에서는 문제해결의 입장에 서서 수학사에서 중요한 의미를 지닌 데카르트의 <기하학>을 고찰한다. 문제해결의 일반적 원리를 천명한 것만이 아니라 실제로 당면한 문제를 해결하기 위하여 새로운 방법을 찾아내는 것이야말로 데카르트가 문제해결에 관하여 후세에 영향을 크게 남긴 업적이라 할 수 있다. 따라서 본고에서는 그의 방법에 초점을 맞추어 분석하도록 한다.

주제어 : 데카르트, 문제해결, 기하학, 해석기하, 원추곡선

1. 수학에 대학 관점: 결과 혹은 과정

프랑스의 인식론학자 바슐라르(Gaston Bachelard, 1884-1962)는 “모든 지식은 문제에 대한 응답이다”라고 갈파한 바 있다([1, p.14]). 이에 따르면 수학적 이론과 개념은 질문에 대한 답변을 찾는 도구, 즉 문제해결의 방편이라 할 수 있다.
수학의 역사를 들여다보면 실제로 많은 경우에 수학적 개념이 문제를 해결하기 위하여 구성되고 수정되고 확장되었음을 쉽게 알 수 있다. 이처럼 지식을 구성하는 역사에서 문제의 역할을 강조하는 입장에서 본다면 역사를 이해하는 과정 역시 기존의 해석과는 다소 달라진다.

문제 중심 혹은 문제해결 중심으로 역사를 바라보는 입장은 수학적 지식에 관한 인식론적 개념에 상응한다. 수학적 지식을 대하는 입장은 크게 결과로 파악하거나 또는 과정으로 파악하는 두 가지가 있다. 때로는 수학 자체가 두 가지 측면-체계적이고 연역적인 과학으로서, 혹은 실험적이고 귀납적인 과학으로서-을 모두 지니고 있는 것으로 보기도 한다.

수학적 지식을 결과 중심으로 인식하는 것은 체계적이고 연역적인 과학이라는 측면을 부각시켜 지식의 결과와 구조, 즉 수학적 담론을 중심으로 파악하는 것이며, 과정으로 바라보는 것은 실험적이고 귀납적인 측면을 중심으로 수학적 활동에 초점을 맞춘다는 것을 뜻한다. 문제를 중심으로 수학사를 고찰하려면 후자의 관점에서 문제해결의 활동에서 파생되는 지식의 개선과 구성과정을 전면에 내세우게 된다.

이러한 관점에서 본다면 고대 그리스의 3대 작도 문제나 미분법이 창안되기 전 단계의 접선 문제, 적분의 원형으로서 케플러가 다루었던 포도주통의 부피 측정 문제, 확률론의 시초를 형성하는 도박문제 나아가 현대 수학의 중요한 비중을 차지하는 그래프이론에 단초를 제공한 쾨닉스베르그(Koenigsberg) 다리 문제나 4색 문제 등의 의미가 특히 크다는 것은 말할 나위가 없다.

그런 가운데서도 데카르트(Rene Descartes, 1596-1650)가 다룬 문제야말로 후세에 지대한 영향을 끼쳤다고 할 수 있다. 그는 직접 문제해결의 알고리즘을 제시했을 뿐만 아니라 문제 해결 방법을 찾아 나가는 과정을 보여주었기 때문이다.
이런 맥락에서 서양 철학의 역사를 플라톤(Platon, BC 428/427-BC 348/347)의 저서에 주해를 달아 온 것이라는 일각의 주장과 유사하게 지난 350년간의 수학사를 단지 데카르트의 기하학에 주석을 다는 것이라고 보는 시각도 존재한다([12, pp.83]).

데카르트가 문제해결에 관해서 남긴 지침에 대해서는 이미 그 자신이 많이 언급했으므로 정답이 이미 나와 있는 것처럼 보이기도 한다. 그래서 많은 연구물에서 그의 저서인 <방법서설>*Discourse on Method*이나 <정신지도규칙>*Rules for Direction of Mind* 등에서 이와 관련된 구절을 종종 인용하기도 한다. 실제 데카르트는 아래와 같이 문제 해결을 위한 순서를 제시하였다([2, pp.9-11]):

"1. 그림을 그린다.
2. 찾고자 하는 것이 무엇인지를 분명히 한다.
3. 모든 미지수, 기지수, 양에 이름을 붙인다.
4. 이들 양 사이의 모든 관계를 기호로 적는다.
5. 이들 관계에 여러 가지 방법을 적용하여 미지수를 찾아낸다."

그렇지만 데카르트가 문제해결에 관하여 본질적으로 중요한 내용을 가장 많이 수록한 저서는 역시 <기하학>이라 할 수 있다. 물론 <기하학>이 <방법서설>에 수록되어 있는 일반 원리를 수학의 한 분야에서 구현해 보이려는 시도에서 쓰였다고는 하지만 그 자체로 문제해결의 실행에 많은 시사점을 남기고 있기 때문이다. 따라서 본고에서는 데카르트의 <기하학>이 문제해결과 관련하여 어떠한 내용을 담고 있으며 그 영향은 무엇인지를 고찰하도록 한다.

2. 데카르트의 기하학

2.1 개관

데카르트의 <기하학>은 해석기하학의 창안 과정을 포함하고 있다고 알려져 있다.

그렇지만 실제로 <기하학>의 내용을 들여다보면 일반적으로 알려져 있는 해석기하학의 기본적 내용은 들어있질 않다. 이른바 카테시안 좌표도 사용하지 않았으며 직선이나 원 또는 원추곡선에 관한 해석기하학적 접근이 이루어지고 있는 것도 아니다. 다만 특정한 규칙에 따라 기술적인 도구를 써서 그려나감으로써 구성 가능한 곡선을 다루고 있을 따름이다. 게다가 "해석기하학"이라는 용어는 전혀 사용하고 있지 않다. 데카르트는 그 자신이 새로운 영역을 개척했다고 주장하지도 않았다. 단지 오래된 문제를 취급할 수 있는 새로운 방법을 찾았을 뿐이라는데 이것이야말로 혁명적인 내용이었던 것이다.

데카르트는 <기하학>을 통하여 하나의 목적을 관철시키려 한다. 그 목적이 바로 문제해결이었던 것으로 난해한 문제를 자명한 제일 원리로부터 연역적인 과정을 거쳐 해결하고자 하였다([7, pp.12-13, 19]). 예컨대 특정한 조건을 만족시키는 점의 자취를 구하는 문제에 대하여 단지 "이러저러한 곡선"이라든지 "이러한 방정식으로 표현된다"가 아니라 "이러한 방정식으로 표현되는 이러한 곡선이며, 이렇게 해서 작도한다"는 것까지 보이려고 했다. 그리고 이러한 기하학적 목표에 도달하기 위하여 대수적 내용, 방정식 이론까지 다루고자 했던 것이다. 말하자면 기하학 내부의 문제를 해결하기 위하여 해로서 도출되는 곡선을 작도하는 것이 그의 목적지였다.

2.2 <기하학>의 배경

고대 그리스에서도 복잡한 자취 문제를 해결하기 위한 나름의 방법을 구사하였다. 그리스 수학자들이 사용한 두 가지 전략은 바로 환원법(reduction)과 분석법(analysis)이다([18, pp.23-24]).

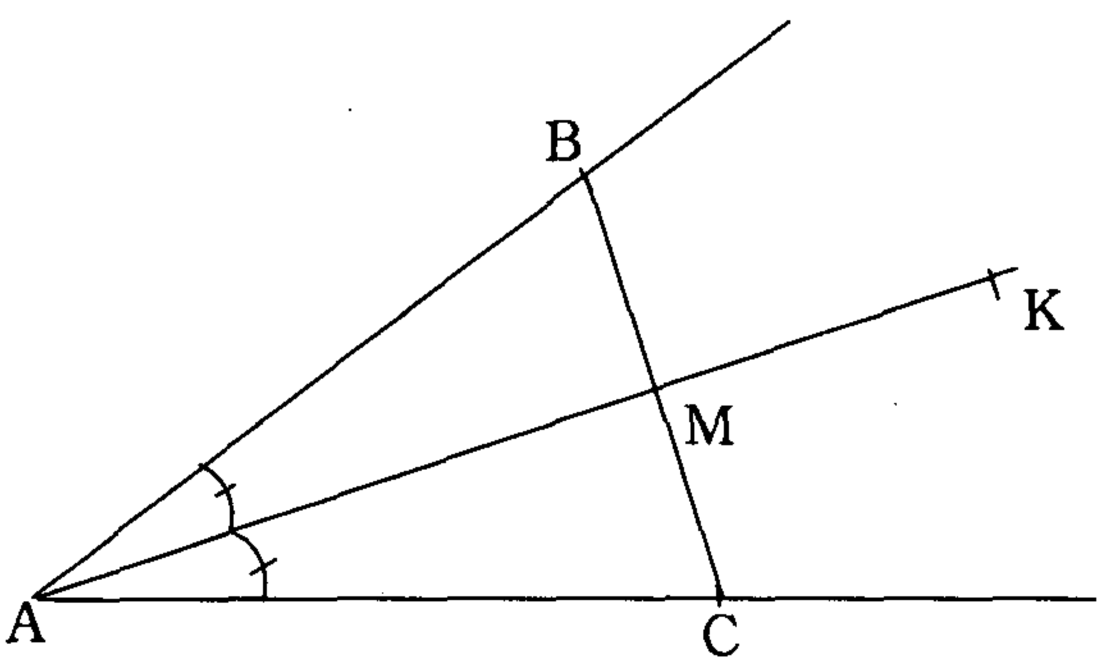
환원법이란 주어진 문제를 더욱 단순한 문제로 바꿔서 해결하는 것이다. 당시 삼대 작도문제 중 하나인 배적문제를 해결하기 위하여 이 방법을 적용한 예를 찾아볼 수 있다[1]. 배적 문제의 현대적인 표현은 주어진 a^3에 대하여 $x^3=2a^3$인 x를 찾는 것이다. 당시 수학자 히포크라테스(Hippocrates)는 이 문제를 a와 $2a$ 사이의 비례중항을 찾는 문제로 환원시켰다. 즉

$$a/x = x/y = y/2a \qquad (1)$$

가 성립하는 x, y를 찾는 문제로 바꾼 것이다. 그러면 y를 소거했을 경우 $x^3=2a^3$을 얻게 된다([16, p.23]). 좀 더 자세히 보면 (1)식의 처음 두 항은 $a/x=x/y$ 으로 $x^2=ay$가 되어 포물선의 식을 얻게 되고([18, p.61]), 처음과 세 번째 항에서는 $a/x=y/2a$로 $xy=2a^2$을 얻게 되어 쌍곡선의 식을 유도하게 된다. 그리하여 배적문제는 포물선과 쌍곡선의 교점을 찾는 문제로 환원된다.

1) 고대 삼도 작도 문제는 첫째, 임의의 각을 삼등분으로 작도하라는 각의 3등분 문제, 둘째, 주어진 정육면체의 2배의 부피를 갖는 정육면체를 작도하라는 배적 문제, 셋째, 주어진 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 작도하라는 원적문제 등이다 .

또 하나의 문제 해결 전략인 분석법의 원래 뜻은 “거꾸로 풀기”이다([13, vol. 2., p.400][18, P.9]). 이는 문제가 이미 해결되었다고 가정하고 거슬러 올라가 우리가 애초에 가지고 있는 전제까지 닿도록 하는 것이다. 이에 따라 임의의 문제를 해결하기 위해서는 우선 그 문제가 해결되었다고 간주하고 주어진 선과 구하는 선을 문자로 표시한다. 그러고 나서 이 두 가지를 가지고 동일한 양에 대한 두 개의 관계식을 얻어냄으로써 문제해결에 필요한 방정식을 유도하게 된다.



<그림1>

예를 들어 각의 이등분선을 찾기 위해 <그림1>에서 주어진 각 A를 이등분하는 직선 AK를 이미 찾았다고 간주하고 긋는다. 그리고 각을 이루는 양쪽 변에 같은 길이가 되도록 점 B, C를 잡는다. 그러고 나서 AK와 BC의 교점을 M이라 둔다. 각 BAM과 MAC의 크기는 같고 AB=AC, AM은 공통이므로 삼각형 ABM과 ACM은 합동이다. 따라서 M은 BC를 이등분한다. 여기서 우리는 선분의 이등분선을 작도할 수만 있다면 M을 찾을 수 있으므로 각의 이등분선 역시 찾을 수 있게 된다.

이처럼 그리스 시대부터 분석법을 사용하여 왔으므로 데카르트가 이 방법을 혁신적으로 사용하긴 했어도 최초의 발견자는 아닌 셈이다. 데카르트는 그리스 수학자들뿐만 아니라 다른 시대의 수학자들한테서도 문제해결에 관한 사고의 단초를 찾아내기도 했다. 13세기의 룰(Ramond Lull, 1232-1315)은 참인 명제를 모두 열거하고 그 중 타당한 한 가지를 선택하였다. 16세기의 라무스(Petrus Ramus, 1515-1572)는 학습자로 하여금 스스로 발견에 이르게 하는 방법을 찾고자 하였다([18, pp.148-149]). 17세기 철학자 베이컨(Francis Bacon, 1561-1616)은 자연의 법칙을 발견하는 방법은 체계적인 귀납과 실험임을 주장하기도 하였다.

이밖에 데카르트의 업적에 가장 직접적으로 영향을 끼친 것은 비에트(François Viète, 1540-1603)가 문제해결의 도구로서 창안한 기호대수학이었다. 이에 대해서는 비에트 자신이 명시적으로 그리스의 분석법의 일종이라고 밝힌 바 있다([3, p.65]). 그 영향으로 데카르트는 <기하학>을 저술하면서 변량을 두 가지 형태, 즉 우선 곡선을 따라 움직이는 점의 좌표와 좌표평면에서 주어진 선분의 점들에 상응하는 수집합의

변하는 원소로 도입하였다. 그는 기호대수학으로부터 가장 큰 영감을 받았다고 할 수 있다.

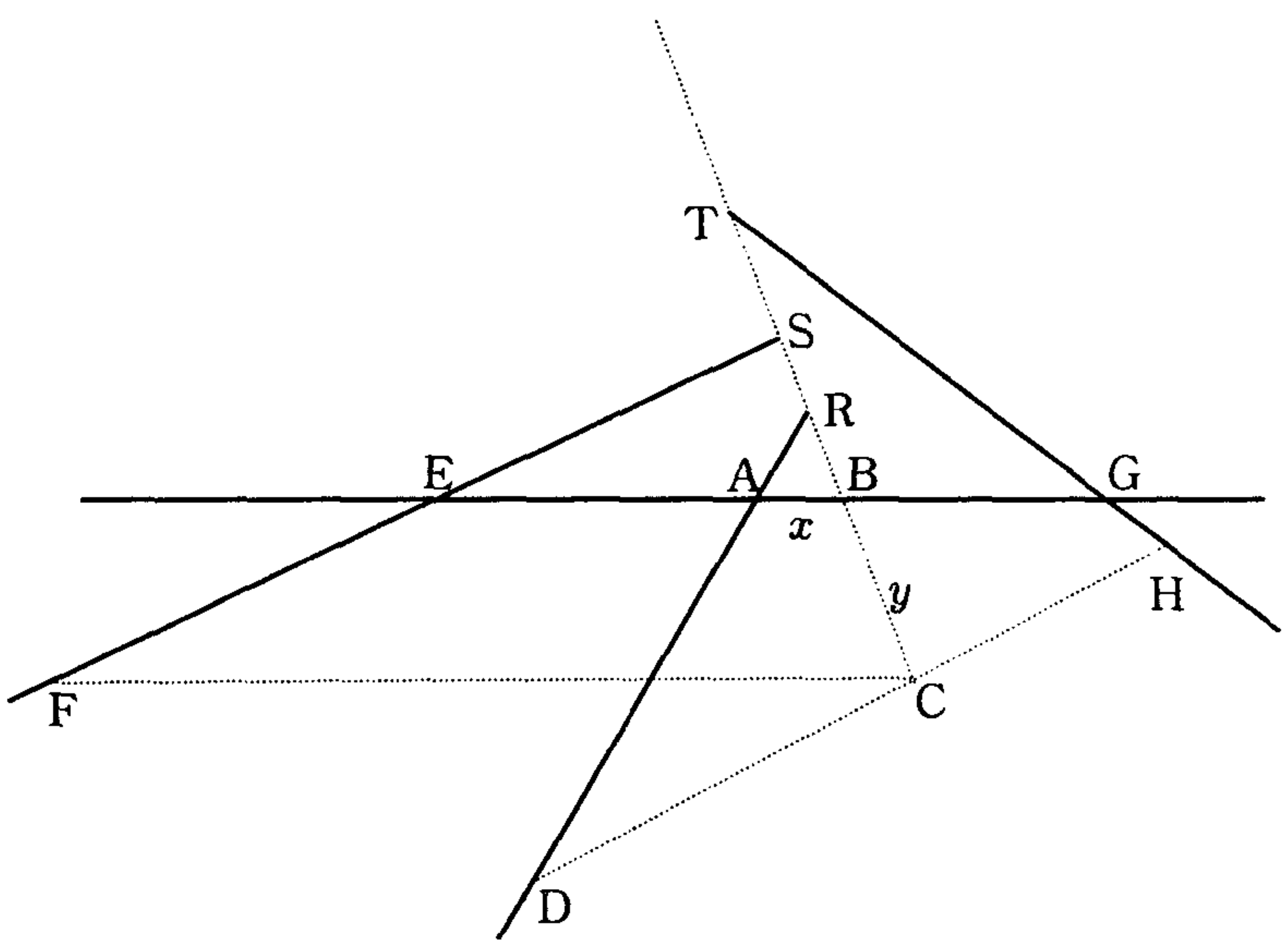
이처럼 앞선 세대의 여러 학자들로부터 영향을 받긴 했으나 데카르트는 이들의 사고를 종합하고 확장시킴으로써 문제해결의 새로운 지평을 열었다.

2.3 데카르트의 방법: 파푸스의 4선 문제

데카르트 자신이 고안해낸 새로운 방법으로 해결한 문제는 바로 유클리드(Euclid, ca.300.B.C.), 아폴로니우스(Apollonius, ca.40-ca.120) 등을 거쳐 파푸스(Pappus, ca.290-ca.350)가 일반화한 다음 문제이다([6, p.304, pp.309-314; 324-335]):

평면에 3, 4, …, n개의 직선이 주어졌다. 어떤 점 C에서 각 직선에 주어진 각을 이루도록 선분을 긋는다. 이 때 세 선분이 주어진 경우에는 이들 중 두 선분을 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형과 나머지 한 선분을 한 변으로 하는 정사각형이 주어진 비의 관계가 되도록 하는 점 C의 자취를 구하여라. 네 직선이 주어진 경우에는 이들 중 두 선분을 이웃하는 두변으로 하는 직사각형과 나머지 두 선분을 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형이 주어진 비의 관계가 되도록 하는 점 C의 자취를 구하여라.

아폴로니우스는 n=3, 4인 경우에 그 자취가 원추곡선이 된다는 사실은 밝혔지만 이들 원추곡선의 종류에 관해서 정확한 해석을 내리지는 못했다. 그로부터 500년이 지난 후에 파푸스는 이 문제를 더욱 일반화시켰다.



<그림 2>

이 문제는 <그림2>와 같이 네 직선 AB, AD, EF, GH가 주어져 있을 때 CD, CF, CB, CH가

$$(CD \cdot CF)/(CB \cdot CH) = const$$

를 만족하는 네 선분이 되도록 점 B, D, F, H에서 주어진 직선과 주어진 각으로 만날 수 있도록 C의 자취를 찾는 문제이다. 이는 조건에 맞는 곡선을 작도하는 방법을 알아내는 내용이라 할 수 있다.

데카르트는 먼저 분석법에 따라 이 문제가 해결되었다고 가정하여 주어진 선들 중 하나와 조건을 만족하도록 작도한 직선들 중 하나를 잡아 기준으로 삼았다. 즉 AB와 CB를 각각 x, y라 하고 나머지 직선들의 연장선을 그어 선 AB, CB와 교차하도록 하였다. 이렇게 해서 삼각형 ABR이 결정되면 한 변 RB는 x와 일정한 비를 가진다. 데카르트는 이 변을 $(b/z) \cdot x$로 두었다. 그러면 $CR = y + (b/z) \cdot x$가 되며 CD, CF, CB, CH의 길이도 마찬가지로 x, y를 써서 나타낼 수 있게 된다. 데카르트는 $(CD \cdot CF)/(CB \cdot CH) = 1$인 경우에 도출되는 여러 식에서 상수를 m, n, z, o, p라 놓아 x와 y사이의 관계식을 다음과 같이 유도하였다:

$$y = m - (n/z) \cdot x + \sqrt{m^2 + ox + (p/m) \cdot x^2}.$$

데카르트는 그리스 기하학을 공부하여 원추곡선에 대해서는 이미 알고 있던 터이라 x^2의 계수가 영이면 C는 포물선이며 계수가 양수이면 쌍곡선, 음수이면 타원임을 설명 없이 언급하였다.

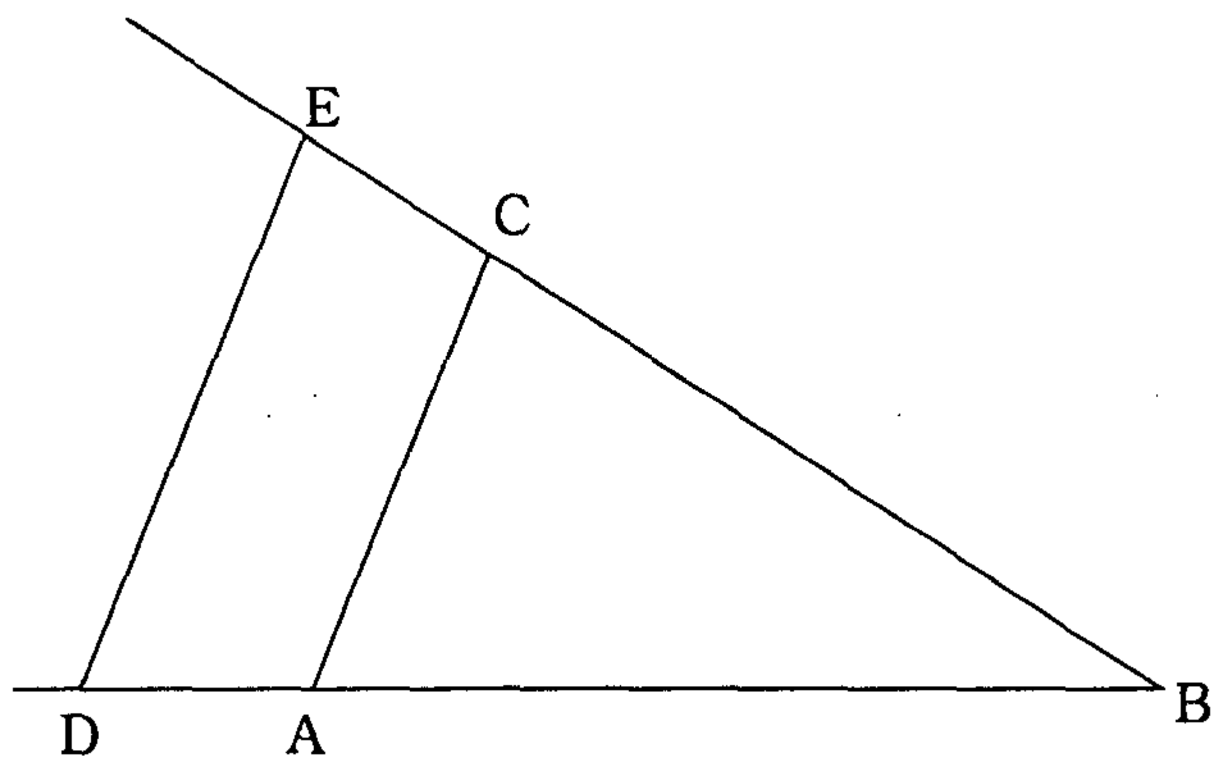
파푸스 문제라는 이름에서 알 수 있듯이 이 문제는 그리스 시대에 이미 상당 부분 해결되었다. 그렇지만 데카르트가 이 문제를 다룬 방식에는 비약적인 발전이 이루어져 있었다. 즉 데카르트는 기하학 문제를 대수학의 문제로 환원시켜서 해결했다는 사실이다. 일단 이렇게 하고 나면 대수학이 지닌 알고리즘의 위력과 일반성으로 기하학의 난제를 훨씬 쉽게 해결하게 된다. 어려운 문제를 한층 쉬운 문제로 환원시켜서 해결하는 방법은 오래된 문제해결법이긴 하지만 한층 쉬운 문제가 바로 대수학의 영역에 속한다는 사실이 이전과는 확연히 구분되는 지점이다.

2.4 그리스를 뛰어넘은 데카르트의 방법: 동차성의 원칙 폐기

대수학의 강점을 최대한 살리기 위해서 데카르트는 과거와 절연해야만 했다. 구체적으로 말하자면 그리스 시대 이래로 고수해 온 이른바 동차성의 원칙을 폐기한 것이다. 이는 기하학적 양과 대수적 표현은 일대일 대응을 이룬다는 생각으로 차수가 같은 항끼리만 서로 연산이 가능하다는 원칙이었다. 데카르트 바로 이전의 비에트 역시 그리스로부터 이어져 온 기하학적 양의 이론에 기초해서 자신의 기호대수학을 세웠

다. 이로 인해서 세 개의 양을 곱한 것은 언제나 부피가 되어야만 했다. 이러한 인식은 곧바로 문제를 야기한다. 예컨대 다섯 개의 양을 곱한 것은 무엇이 되어야 하는지 등의 문제이다. 이 전통에 따르자면 x^2+x과 같은 식은 사용할 수가 없었다. 데카르트 역시 순수하게 추상적 수만을 대상으로 삼지는 않고 기하학적 양을 염두에 두긴 했지만 대수방정식에 대한 해석을 이전과는 다르게 함으로써 심대한 제한으로부터 대수학을 해방시켰다.

데카르트는 임의로 잡은 길이의 선분을 "단위"로 삼아 이를 한 변으로 하고 다른 한 변의 길이가 x인 직사각형의 넓이를 x라 해석하였다. 그러면 x^2+x를 아무런 문제없이 두 넓이의 합으로 여길 수 있게 된다. 더욱이 그는 임의의 곱을 선분의 길이로 해석하기도 하였다. 선분 a와 b의 곱이 반드시 면적 ab를 뜻하는 것이 아니라 $ab/a=b/1$에서와 같이 다른 의미의 길이를 나타내기도 하며 ab는 <그림3>에서처럼 작도가능하다는 사실을 보였다.

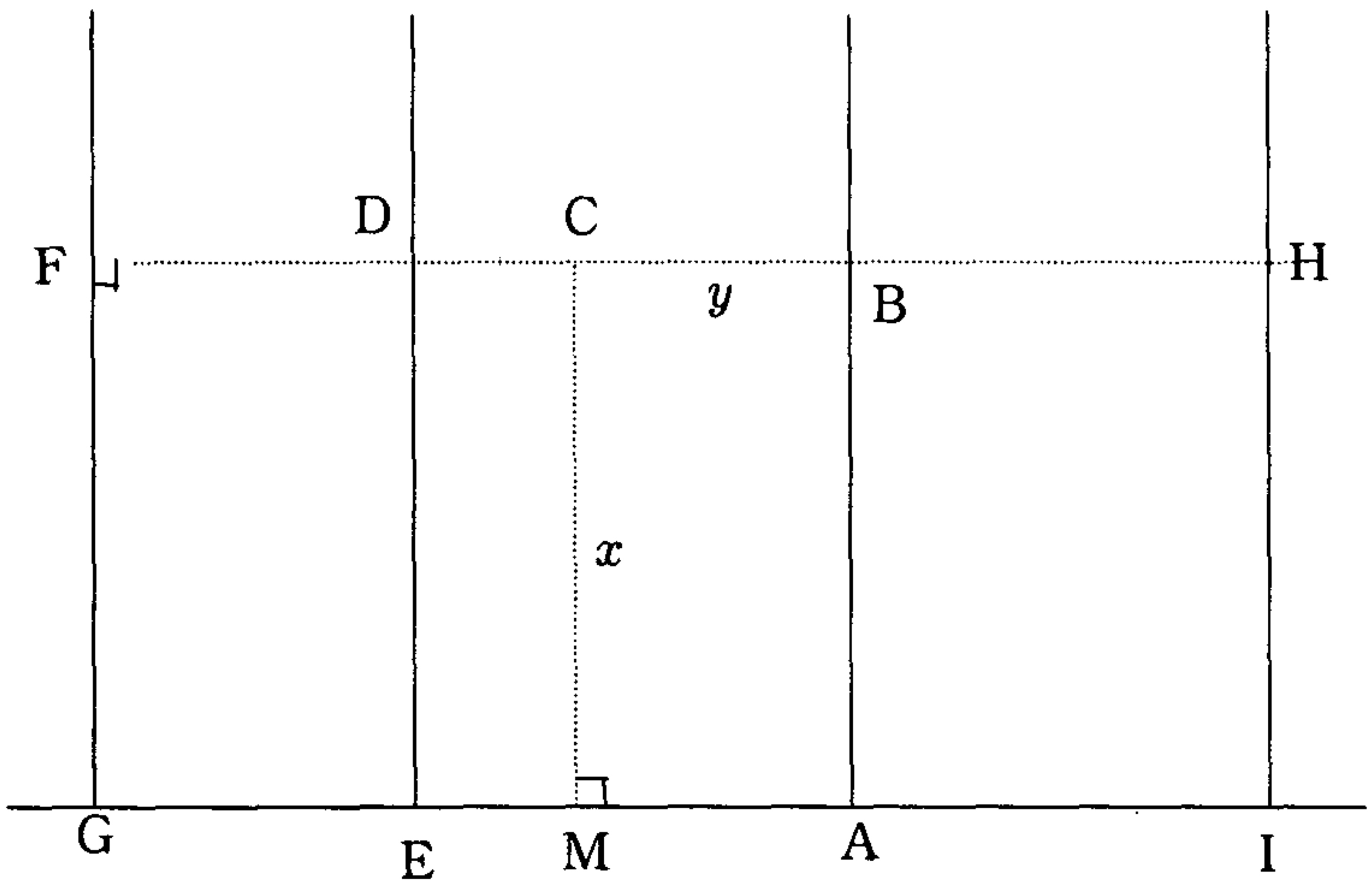


<그림3>

즉 <그림3>에서 주어진 단위 선분 AB 위에 선분 BD와 BC의 곱을 작도하는 게 된다. AB, BD를 한 점 B에서 뻗어나간 직선 위에 있는 두 선분이라 하고 BC는 BD와 만나는 선분이라 한다. 그리고 BC를 연장하여 AC와 평행이 되도록 ED를 잡으면 $AB=1$이므로 $BE/BD=BC/1$이 된다. 따라서 BE가 BD와 BC의 곱이 된다. 데카르트는 두 선분의 길이의 곱과 같은 길이의 선분이 있다는 것을 대수적으로 확인시켰을 뿐만 아니라 그것을 직접 작도하는 과정을 보여주었다. 이제 x^5과 같은 표현이 $x^5/x^3=x^2/1$의 식에서 나타나는 선분을 의미하게도 되었다.

이처럼 데카르트는 기본적 대수연산과 그에 상응하는 기하학적 작도를 자유자재로 구사하였으며 일반적인 대수적 표현에서도 진일보한 결과를 내었다. 이러한 사실을 근거로 데카르트 자신이 명시적으로 주장한 바는 없지만 대수학을 기하학적 양이 아니라 수를 대상으로 한 과학으로 서게 하였다고 평가되기도 한다. 그리고 무엇보다도 데카르트는 문제해결이라는 일반적 과정에 커다란 공헌을 했다.

데카르트는 이제 그리스에서 이루어졌던 수준을 넘어서 파푸스의 4선 문제를 5, 6, 12, 13 등 임의의 개수만큼의 직선에 대해서도 해결할 수 있게 되었다. 이와 같이 더욱 복잡한 문제에 대해서도 데카르트의 방법적 원리는 변함없이 가장 먼저 선분에 이름을 붙이고 나서 생겨난 방정식을 다루는 것이었다.



<그림4>

데카르트가 유도한 방정식이 원추곡선이 아닌 경우에는 어떻게 처리했는지는 5선 문제를 다룬 과정을 보면 알 수 있다. 그는 일정한 간격으로 떨어져 있는 네 개의 평행선과 이들과 직교하는 한 직선에서 AI를 일정한 거리로 둘 때

$$CF \cdot CD \cdot CH = CB \cdot CM \cdot AI \quad (2)$$

를 만족하는 C의 자취는 어떤 곡선이 되는지를 탐구하였다.

이 문제에서도 데카르트는 분석법을 사용하였다. 적당한 길이 x, y를 잡아 $x = CM$, $y = CB$가 되도록 하고 AI의 길이를 a라 하여 모든 기하학적 관계를 대수적으로 나타낸다. 그러면 $CD = a - y$이고 $CF = a + (a - y) = 2a - y$가 되고 (2) 식의 조건은

$$(2a - y)(a - y)(y + a) = y \cdot x \cdot a$$

가 되어

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy \quad (3)$$

가 된다.

여기서 위 방정식은 이미 알려진 원추곡선의 식이 아니므로 주어진 x에 대응하는 y 값을 찾아서 곡선을 작도하는 게 가능한지 여부에 관한 문제가 제기된다. 이에 대한 긍정의 답을 할 때까지 데카르트는 문제가 완벽하게 해결된 것으로 간주하지 않았

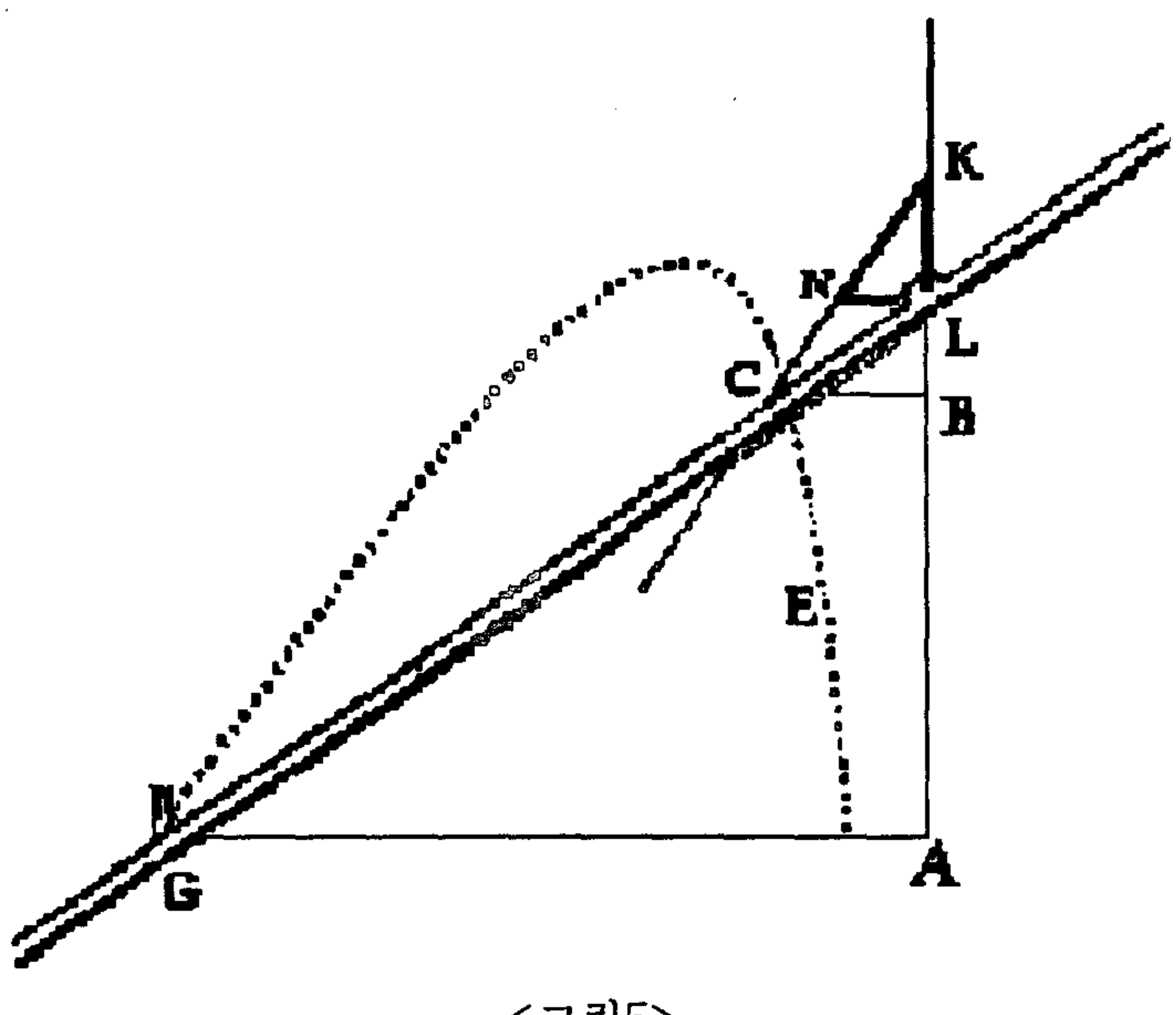
다. 왜냐하면 이 문제는 본질적으로 기하학 문제이기 때문이다. 데카르트는 대수방정식은 다만 목표에 이르기 위한 방편이지 그 자체가 해는 아닌 것으로 생각하였다.

여기서 데카르트는 "작도가능"이라는 것을 무슨 뜻으로 해석했으며, 삼차방정식으로 표현되는 곡선은 작도 가능한지 여부와 작도 방법에 관한 문제를 어떻게 해결했는지의 문제가 제기된다.

그리스 시대 이래로 작도를 위해 직선자[2)]와 컴퍼스만 사용하는 게 용인되었으므로 데카르트는 위 (3)과 같이 복잡한 식은 "기하학적이라기보다 기계적"이라 칭하였다. 아마도 작도를 위해서 다른 도구가 필요한 까닭에 이처럼 칭한 것으로 추측된다. 그렇지만 엄밀하게 말하자면 자와 컴퍼스 역시 도구이므로 데카르트는 다른 도구 역시 배제하지 말아야 한다고 주장하였다([6, p.315])

또한 데카르트는 기존의 유클리드 공리에 "둘 혹은 세 개의 직선이 서로 교차하는 점이 또 다른 곡선을 이루도록 움직일 수 있다"라는 내용을 덧붙이기로 하였다([6, p.316]).

즉 곡선은 정해진 규칙에 따라서 생성되어야 하는데, 데카르트는 그러한 규칙이란 적어도 연속적으로 움직이도록 고안된 기계적 도구를 사용하는 것이라 여겼던 것이다.



<그림5>

<그림5>는 데카르트가 고안한 작도를 위한 도구 중 하나이다([6, p.320]). 이 도구를 사용하여 생성해 낸 첫 번째 곡선은 움직이는 두 직선의 교차점에 의하여 생겨난다. 직선 KN은 직선자 GL로부터 일정한 거리만큼 떨어져 있다. 직선자는 점 G에 고

2) 길이는 잴 수 없고 직선만을 그을 수 있도록 만들어진 자를 뜻한다.

정되어 있어서 G를 중심으로 그 주위를 돌고 점 L은 직선 GL을 따라 미끄러진다고 한다. 이 때 선분 KL이 고정된 직선 AB 위를 움직이면 직선자는 G 주위를 회전하게 된다. KL과 KN 사이의 각은 고정되어 있으므로 GL이 KN과 만나는 점C가 이 도구에 의해서 생성되는 곡선 위의 점이 되는 것이다.

이렇게 생겨나는 곡선이 어떤 종류인지를 알아보기 위하여 데카르트는 써왔던 대로 새로운 방법에 따라 선분에 이름을 매겨 그들 사이의 기하학적 관계를 대수적으로 표현하였다. 즉 $y = CB, x = BA$ 라 두고 주어진 길이의 $a = AG, b = KL$로 나타내고는 KNC가 직선일 때 점 C가 움직이는 자취가 쌍곡선임을 보였다([5, p.322]).

데카르트는 직선 KNC 대신에 직선 KB가 축인 포물선을 적용하여 생겨나는 새로운 곡선이 바로 앞서 언급한 5선 문제에서 유도한 (3)식에 해당하는 것을 확인하였다([6, p.322]).

2.5 데카르트 방법의 위력: 접선과 방정식

데카르트는 기하학에서 어떤 곡선이든 작도 가능하기만 하다면 용인된다고 생각했지만 그에 대한 방정식도 알고 있어야 하며 곡선과 그 특성에 관한 연구는 반드시 대응하는 방정식의 연구를 통해서 진전될 수 있다고 보았다.

예를 들면 데카르트는 곡선이 다른 곡선과 이루는 각에 따라 특성이 결정된다고 했다([6, pp.341-342]) 그는 주어진 점에서 법선을 찾을 수만 있다면 문제를 완벽하게 해결할 수 있다고 생각하였다. 여기서도 한 문제를 다른 차원의 보다 쉬운 문제로 환원하는 방법을 사용하고 있는 것이다. 법선을 찾기 위해서 주어진 점에서 곡선에 접하는 원의 법선을 찾는 문제로 환원하여 해결을 시도한다. 즉 조건에 맞는 접원을 찾아 그 원의 중심을 구하는 문제로 귀착시킨다. 이 지점에서 데카르트는 다시 한 번 환원법을 구사하여 그 접원의 대수적 방정식을 유도하였다.

그는 우선 주어진 곡선과 두 점에서 만나는 원을 상정하고 그 두 점을 점차 가까이 가도록 하였다. 이는 주어진 곡선과 두 점에서 만나는 원의 방정식을 찾는 것을 의미하는 것으로 이 방정식은 두 개의 해를 가진다. 그리고 이 두 해가 일치할 때 원은 곡선에 접하게 된다([6, pp.346-347]). 따라서 판별식이 영이 되는 경우를 찾아내면 된다. 이처럼 대수적 방법의 강점을 활용하여 환원이라는 과정을 몇 단계에 걸쳐 사용함으로써 문제를 해결할 수 있었다.

데카르트는 이러한 방법을 여러 가지 곡선의 법선을 구하는 데 적용하였다. 이처럼 할선의 극한 위치를 가지고 접선을 찾아내는 방법에 관해서는 동시대에 페르마가 한층 명료하고 간단한 방법으로 다루고 있긴 하지만 처음 발표한 것은 데카르트였다.([3, pp.80, 94-95], [19, pp.165-169], [4, pp.166-169; 157-158]).

데카르트의 <기하학>에 담겨있는 중요한 내용 중의 하나는 대수방정식의 해법에 관한 것이다. 데카르트는 “모든 기하학 문제는 단 하나의 유형, 즉 방정식의 근을 찾는 문제로 귀착된다”고 주장하였다([6, p.401]). 사실 데카르트의 문제 해결 과정에서

이 부분은 아주 중요하므로 기하학적으로 작도하는 것보다 더 먼저 해법을 모색해야 했다.

그래서 <기하학>의 마지막 장에서 데카르트는 오늘날 방정식 이론에 해당하는 내용을 상당 부분 다루고 있다. 예를 들어

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x+5)=0$$

을 전개하면 아래의 식이 된다:

$$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0.$$

데카르트는 위 식이 그 앞의 식에서 나온 것이므로 세 개의 양근과 한 개의 음근을 가짐을 알 수 있다고 지적했다. 또한 양근의 수는 계수들의 부호가 바뀐 횟수와 같을 뿐 만 아니라[3] 여러 개의 근을 가진 방정식은 그 중 한 근이 a라면 $x-a$로 나누어떨어지며 차수만큼의 해를 가진다는 사실도 주장하였다([6, pp.372-374]). 데카르트가 이런 사실을 처음으로 제시하거나 그 증명을 완벽하게 해 낸 것은 아니었으나 표현 방식은 상당히 체계적이어서 그 결과의 중요성을 명료하게 인식시킬 수는 있었다. 그러면서도 대수학 그 자체가 목적은 아니었고 다만 기하학 문제를 해결하기 위한 연구대상이었다.

끝으로 데카르트가 다룬 또 다른 문제의 유형은 삼차 이상의 방정식의 근을 작도하는 것이다. 삼차방정식을 원추곡선의 교점을 구하는 문제로 환원하여 해결했던 그리스 수학을 넘어서 그는 5차, 6차 방정식에까지 이 방법을 확대 적용하였다. 즉 특별한 곡선을 도입하여 이 곡선들과 원의 교점을 이동시키면 방정식의 근을 얻을 수 있다고 주장하였다. 예를 들어 6차식의 해를 구하기 위하여 삼차식의 교점을 구하면 된다는 것이었다.

3. 문제 해결에 끼친 데카르트의 영향

3.1 규칙 제시

문제해결과 관련하여 직접적으로 데카르트가 끼친 영향을 살펴보자면 무엇보다도 그의 문제해결 방법이야말로 오늘날 학교 현장에서 학생들에게 가르치는 바로 그 내용임을 알 수 있다. 이렇게 된 배경으로는 물론 그 자신이 문제 해결에 관한 규칙을 직접 만들어서 제시하기도 했지만 그보다도 당시 해결되지 않고 있던 많은 문제를 풀었기 때문으로 보인다. 데카르트는 자신이 방법을 알고 있었으므로 문제해결자이자

3) 오늘날 데카르트의 부호의 법칙이라 일컫기도 하는 내용이다.

이를 학생들에게 가르치는 교사 역할을 자임할 수 있었다.

<기하학>은 그의 방법이 효과적임을 확인시켜 주는 문제 해결 과정을 다수 싣고 있기 때문에 어떻게 문제를 해결하는지를 배울 수가 있는 것이다. 문제해결이라는 관점에서 보자면 데카르트가 <기하학>에서 다룬 구체적인 문제보다는 한층 일반화된 대수적 해결 방법을 높이 평가하게 된다. 데카르트의 방법을 오늘날 우리가 직접 마주해서 익히는 것은 아니지만 그의 후세대 수학자들이 일구어 놓은 수많은 이론 가운데에 녹아들어가 있기 때문에 간접적으로 습득하게 된다고 할 수 있다. 즉 그가 끼친 영향으로 인하여 오늘날 표준화된 문제 해결과정에도 데카르트의 방법이 깔려 있다고 할 수 있다. 때로 전형적인 방법에 데카르트의 방법을 적용하는 것은 아주 기계적이기까지 하다. <정신지도규칙>*Rules for directions of the Mind*에서 밝힌 몇몇 가지는 <기하학>의 내용과 아주 유사하다. 그리하여 이를 토대로 폴리아(George Polya, 1887-1985)는 오늘날의 학생들을 위한 규칙을 만들 수 있게 된 것이었다([2, pp.177-178]).

3.2 새로운 방법의 창안

데카르트는 해석기하학처럼 새롭고 위대한 업적을 세우려는 학생이나 수학 교사들로 하여금 방법에 주목해야 한다는 걸 가르친다. 라이프니츠는 자신이 창안한 미적분법을 해석기하학과 명시적으로 견주면서 일종의 문제해결 방법으로 간주하였다.

“일반적인 기하학의 많은 정리를 기억하기 위해서 오늘날의 대수학을 모두 알 필요가 없는 것처럼 가르치거나 기억해 두지 않아도 될 정도로 용이하게 해결할 수 있는 이러한 종류의 문제들과 모든 탄복할 만한 정리가 이[미분법]로부터 유도된다.”([21, p.281])

우리 시대의 폴리아는 방법을 가르쳐야 한다는 점을 더욱 강조하기도 했다. 데카르트의 교훈을 정리해 보자면 먼저 문제 해결을 위한 기법이 무엇인지를 파악하고 나서 성공적이었던 기법의 강점과 단점을 파악하여 새로운 문제에 도전할 때 적용한다는 것이다. 이러한 과정을 밟아 데카르트 자신이 해석기하학을 창안했던 것이다. 데카르트는 <방법서설>*Discourse on Method*에서 이에 대하여 다음과 같이 언급하였다:

“나는 기하학적 분석법과 대수학이 지닌 강점을 파악하여 서로의 결함을 고쳐나갔다”([7, pp.13, 20]).

3.3 환원법과 분석법

데카르트 철학의 핵심은 수학적 방법으로 과학상의 문제를 해결할 수 있다는 것이

다. 그는 자신의 과학철학에 환원법과 분석법의 개념을 적용하였으며, 모든 미시적 현상은 자연을 구성부분으로 쪼개어 분석하면 설명이 가능하다고 보았다([8, pp.409-414]). 그는 가장 강력한 방법은 일반적이면서도 수학적인 것이라고 믿었으며, 자신의 <철학 원리>*Principles of Philosophy*(1644)에서 모든 자연법칙을 자명한 제일 원리로부터 이끌어내려는 시도를 하였다. 실제로 데카르트는 수학을 본떠서 만든 방법으로 모든 대상을 알아낼 수 있다고 주장하기도 하였다:

"그처럼 길게 이어진 간단하고도 쉬운 추론을 통하여 기하학자들이 가장 어려운 증명에 도달했다는 사실을 보고 나는 인간이 알 수 있는 모든 일은 유사한 논리적 연쇄로 분류되지 않을까 하는 생각을 하게 되었다. 만약 그렇게 된다면 진실이 아닌 것을 진실로 받아들이지 않아도 될 것이며 서로를 추론하기 위해 필요한 순서만 따르면 된다. 그리하여 증명할 수 없는 어떤 어려운 명제도, 발견할 수 없을 정도로 숨겨져 있는 어떤 명제도 존재하지 않게 된다."([7, pp.12-13; 19]).

데카르트의 이러한 생각은 라이프니츠가 진리를 찾는 일반적 기호법에 대하여 쓴(1677) 책에 다음처럼 고스란히 반영되어 있다:

"우리가 마치 산술에서 수를 표현하거나 기하학적 해석학에서 직선을 표현하는 것처럼 우리의 생각을 명확하고 엄밀하게 나타내는 데 적합한 특성이나 기호를 찾아낸다면 우리는 모든 대상에 관하여 산술이나 기하학에서 이룬 것과 똑같이 합리적인 추론을 할 수 있을 것이다."([23, pp.12-17]).

4. 결어

데카르트는 기하학에서 난해한 문제를 독창적인 방법으로 해결했다. 그가 창안한 이론은 당대에 유사한 연구를 수행했던 페르마(Pierre de Fermat, 1601-1665)의 방법과 함께 차세대 수학자들에게 많은 영향을 끼쳤다.[4)]

해석기하학을 체계화시킨 수학자로는 얀 더 비트(Jan de Witt, 1625-1672)를 들 수 있는데 그가 남긴 <곡선 원론>Elements of Curves에서는 원추곡선을 방정식으로부터 구성하는 내용이 실려 있다.([3, pp.115-116]) 판 호레(Hendrik van Heuraet, ?-?)는 호의 길이를 찾는 방법을 다루기도 하였다. 판 슈텐(Frans van Schooten, 1615-1660)의 데카르트 주해서는 월리스(John Wallis, 1616-1703)와 뉴턴(Issac Newton, 1642-1727)에게도 지대한 영향을 끼쳤다. 월리스는 카테시안 기하학의 방법

4) 페르마는 해석기하학, 접선, 면적 계산 등에 관하여 많은 업적을 남겼지만 1670년대까지는 발표된 것은 없었다.

을 잘 이용하였을 뿐만 아니라 기하학적 개념 대신에 대수적 혹은 산술적 개념을 적용하기도 하였다([3, p.109]). 또한 뉴턴은 1660년대에 판 슈텐이 펴낸 데카르트의 주해서를 면밀하게 읽고 나서 미적분법 연구의 주요 출발점으로 삼았다([22, pp.106-111, 128-130]). 라이프니츠는 자신이 미적분법을 창안하기 두 해 전 데카르트의 <기하학>을 통해서 자신의 방법을 고안해 내었다고 한다. 그는 심지어 데카르트가 발표하지 않은 연구물까지도 구해서 읽었다고도 한다([14, pp.182-183]).

데카르트의 <기하학>에 전개된 문제 해결 방법은 뉴턴과 라이프니츠를 위시하여 17세기를 거치는 동안 많은 수학자들에게 새로운 발견을 하도록 도와주었다. 그리고 이러한 영향은 그 후 18세기 내내 계속되었다([9, pp.156-158, 505-507]).

일반적으로 알려져 있는 것처럼 학교 수학에서 다루고 있는 방식의 해석기하학은 데카르트나 페르마에게서 비롯된 것이 아니라 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783), 몽쥬(Gaspard Monge, 1746-1818), 라그랑제(Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813) 등이 저술한 18세기 교과서에서 연유하였다고 보는 편이 타당하다([10, pp.192-224]).

말하자면 데카르트는 교과서 저술가가 아니라 문제해결자였던 것이다. 그가 남긴 영향의 핵심은 새로운 접근방법이었으며 그 방법에 대한 자각이었다고 할 수 있다.

데카르트를 한편으로는 해석기하학의 창시자로 칭송하면서 다른 한편으로는 철학적 토대에 근거한 사유 방법으로 문제해결의 알고리즘을 정립한 것을 분리해서 평가해 온 측면이 있다. 그런데 이 두 가지 측면은 서로 불가분의 관계를 지니고 있다는 것을 결론적으로 말할 수 있다. 문제해결이란 근본적으로 주어진 패턴에 따라서 또 하나의 문제에 대한 답을 내는 것이라기보다는 문제를 해결하기 위한 새로운 방법을 찾아내는 것이 그 핵심이며, 그 점에서 데카르트는 전형적인 모델을 제시함으로써 지대한 영향을 후세에 남긴 것이다.

데카르트는 방법상의 제국주의자 또는 환원주의자로 비판을 받기도 하는 한편 지적인 실험가 또는 현대 사상의 창시자로 칭송을 받기도 한다([5][12][15][20]). 좋든 싫든 그가 지녔던 구상의 위력이야말로 17세기 이후의 서구 사상을 형성해 왔다고 해도 과언이 아니다. 그리고 그의 수학 연구는 그 자신의 철학에도 영감을 주었다. 그의 철학에 대한 우리의 평가가 어떠하든 그가 이룬 수학적 업적은 아주 분명해 보인다. 과거 350년의 수학의 역사는 데카르트의 문제 해결 방법론이 승리를 거두어 온 자취라고 볼 수 있기 때문이다.

참고 문헌

1. Bachelard, *Gaston La formation de l'esprit scientifique*, 5th ed., Paris: Vrin, 1967, p.14
2. Beck, L. J., *The Method of Descartes: A Study of the Regulae*, Clarendon,

Oxford, 1952

3. Boyer, Carl, ***History of Analytic geometry***, Scripta Mathematica, New York, 1956, pp.115-116
4. Boyer, Carl B., ***The concepts of the Calculus***, Columbia, New York, 1939,
5. Davis, P. J., Hersch Reuben, ***Descartes Dream***, Harcourt, Brace, Jovanovich, New York, 1986;
6. Descartes, René, ***The Geometry***, tr. from the French and Latin by D. E. Smith and M. l. Latham, Dover Reprint, New York, 1954, pp.343-344; pp.360-362)
7. Descartes, René, ***Discourse on the Method of Rightly Conducting the Reason to seek the Truth in the Sciences***, 1637, tr. L. J. Lafleur, Bobbs-Merrill, New York, 1956; pp.12-13, 19
8. Dijksterhuis, E. J,, ***The Mechanisation of the World Picture***, tr. C. Dikshoorn, Oxford niversity Press, Oxford, 1961; pp.409-414
9. Gillies, Donald, ed., ***Revolutions in Mathematics***, Oxford University Press, Oxford, 1992, 192-224
10. Grabiner, Judith V., ***The Centrality of mathematics in the history of Western thought***, Math. Magazine 61(1988), pp.220-230
11. Grabiner, Judith, ***Descartes and Problem-Solving***, Mathematics Magazine 68, 1995, PP.83
12. Grosholz, Emily, ***Cartesian Method and the Problem of Reduction***, Clarendon Press, Oxford, 1991
13. Heath. Thomas L., ***Greek Mathematics***, 2 vols., Clarendon Press, Oxford, 1921
14. Hofmann, J. E., ***Leibniz in Paris***, 1672-1676: His Growth to Mathematical Maturity, tr. A. Prag and D. T. Whiteside, Cambridge University Press, Cambridge, 1974; pp.182-183
15. Kline, Morris, ***Mathematics in Western Culture***, Oxford University Press, Oxford, 1964; Russell, Bertrand, A History of Western Philosophy, Simon and Schuster, New York, 1945
16. Knorr, Wilbur, ***The Ancient Tradition of Geometric Problems***, Birkhaeuser, Boston, 1986, p.23
17. Leibniz, G. W., ***Preface to the General Science***, in [Wiener P., ed. Leibniz: Selections, Scribner's, New York, 1951],
18. Mahoney, Michael S., ***The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventeenth Century***, pp.148-149)
19. Mahoney, Michael, ***The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601-65***, Princeton University Press, Princeton, 1973

20. Russell, Bertrand, ***A History of Western Philosophy***, Simon and Schuster, New York, 1945
21. Struik, Dirk J., ***A Source book in Mathematics***, 1200-1800, Harvard, Cambridge, 1969
22. Westfall, Richard S., ***Never at Rest*** : A Biography of Issac Newton, Cambridge University Press, Cambridge, 1980; pp. 106-111, 128-130
23. Wiener P., ed. ***Leibniz*** : Selections, Scribner's, New York, 1951

Problem-solving and Descartes' <The Geometry>

Department of Mathematical Education, Inha University **Kyeong Hye Han**

This paper investigate Descartes' <The Geometry>, which is significant in the history of mathematics, from standpoint of problem-solving. Descartes has clarified the general principle of problem-solving. What is more important, he has found his own new method to solve confronting problem. It is said that those great achievements have exercised profound influence over following generation. Accordingly this article analyze Descartes' work focusing his method.

Key word: Descartes, problem-solving, Geometry, analytic geometry, conic section

2000 Mathematics Subject Classification: 01A45

ZDM Subject Classification: A30, G70

접수일 : 2008년 3월 26일　　수정일 : 2008년 4월 24일　　게재확정일 : 2008년 5월 6일