

# 지역 극좌표계를 이용한 임의 형상 자유단 평판의 자유진동해석을 위한 무요소법 개발

## Development of Meshless Method for Free Vibration Analysis

### of Arbitrarily Shaped Free Plates Using Local Polar Coordinates

강 상 욱\* · S. N. Atluri\*

Sang Wook Kang and S. N. Atluri

(2008년 3월 25일 접수 ; 2008년 5월 19일 심사완료)

**Key Words** : Meshless Method(무요소법), Free Plate(자유단 평판), Local Polar Coordinates(지역 극좌표계), Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수), Arbitrarily Shaped Plate(임의 형상 평판), 경계 노드 배치법(Boundary Node Collocation Method)

#### ABSTRACT

A new meshless method for obtaining natural frequencies of arbitrarily shaped plates with the free boundary condition is introduced in the paper. In order to improve the characteristics of convergence and accuracy of the method, a special local polar coordinates system is devised and located for each of nodes distributed along the boundary of the plate of interest. In addition, a new way of decreasing the size of the system matrix that gives natural frequencies of the plate is employed to reduce the amount of numerical calculations, which is needed for computing the determinant of the system matrix. Finally, the excellence of the characteristics of convergence and accuracy of the method is shown in several case studies, which indicate that natural frequencies by the proposed method are very accurate and converged swiftly to exact values as the number of boundary nodes increases.

#### 1. 서 론

임의 형상 평판의 자유진동해석 기법 중의 가장 일반적인 방법은 유한요소법(finite element method)이나 경계요소법(boundary element method)과 같은 수치 해석적 방법을 이용하는 것이다<sup>(1,2)</sup>. 상기의 두 방법은 해석 대상물의 전체 영역 또는 경계 영역을 여러 개의 노드(node)와 요소(element)로 분할한 후

노드와 노드 사이의 변위를 보간 함수(interpolation function)로 근사화시키는 방법을 이용한다. 그러나 이들 보간 함수들이 해석 대상 평판의 운동 지배 방정식을 만족하지 않는 단점으로 인해, 유한요소법과 경계요소법은 해의 정밀도 확보에 있어서 한계를 가지며 많은 수치 계산량을 필요로 하는 단점을 가지고 있다.

상기의 단점을 극복하기 위한 일환으로, 저자는 해석 대상물의 내부 영역 또는 경계를(요소(element)를 사용하지 않고) 노드(node)만으로 이산화하는 무요소법(meshless method)의 일종인 무차원 동영향 함수법(method of non-dimensional dynamic influence functions)을 처음으로 개발하였

\* 교신저자: 정희원, 한성대학교 기계시스템공학과  
E-mail : swkang@hansung.ac.kr  
Tel : (02)760-4228, Fax : (02)760-4329

\* Department of Mechanical and Aerospace Engineering,  
University of California, Irvine

다<sup>(3)</sup>. 저자는 상기 무차원 동영향 함수법을 이용하여 임의 형상 멤브레인의 고유진동수 및 고유모드를 정확히 구할 수 있는 방법을 제안하였으며<sup>(3)</sup>, 나중에는 오목 형상을 가진 임의 형상 멤브레인, 고정단 경계조건을 가진 임의 형상 평판, 혼합 경계조건(단순지지 경계조건과 고정단 경계조건이 같이 존재)을 가진 임의 형상 평판을 고유진동수를 무차원 동영향 함수법을 이용하여 정확히 구할 수 있는 방법을 제안하였다<sup>(4-6)</sup>.

한편, 자유단 경계조건의 경우, 단순지지 혹은 고정단 경계조건에 비해 수치해석적으로 다루기가 상대적으로 어렵기 때문에, 최근에 와서야 본 저자는 무요소법을 자유단 경계조건을 가진 임의 형상 평판의 자유진동해석에 적용하기 위한 다각적인 연구를 진행 중에 있다. 그 일환으로 특정 형상(원형과 타원형)을 가진 자유단 평판과 임의 다각형 형상을 가진 자유단 평판의 자유진동해석에 무요소법을 적용하는 연구를 수행하였다<sup>(7,8)</sup>.

이 논문에서는 특정 형상(원형과 타원형) 물론이고, 임의 형상을 가진(단, 모서리가 없고 동시에 오목한 형상이 아닌) 자유단 평판의 고유진동수를 정확하게 추출할 수 있는 새로운 무요소법에 대한 개발 및 예제 연구가 이루어졌다. 이 논문에서 개발된 기법의 수렴성과 정확성을 검증하기 위해, 세가지 형상의 평판들(임의 형상, 원형, 타원형)에 대해 경계 노드의 개수를 증가시킴에 따라 변화되는 고유진동수들의 수렴성이 확보되는지를 검증하였다, 그리고 이 논문에서 개발된 방법에 의해 얻어진 고유진동수 결과를 유한요소해석 결과(ANSYS)와 비교하여, 이 논문에서 개발한 기법의 탁월한 정확성이 증명되었다.

한편 이 논문에서 제안한 방법은 노드 배치법(collocation method)의 일종이며, 기존의 노드 배치법<sup>(10,11)</sup>에 비해 가정되는 해가 매우 간단하며 일차원 함수라는 장점을 가진다<sup>(3)</sup>.

## 2. 이론 정식화

### 2.1 자유진동해 가정과 근사 자유단 경계조건

자유단 경계(free boundary)를 가진 평판의 자유진동에 관한 지배방정식과 자유단 경계조건은 다음과 같이 주어진다<sup>(9)</sup>.

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = 0 \tag{1}$$

$$\lambda = (\rho_s (2\pi f)^2 / D_E)^{1/4} \tag{2}$$

$$M_n(W) = 0, \tag{3}$$

$$V_n(W) = 0, \tag{4}$$

여기서  $W$ 는 평판의 진동변위,  $\lambda$ 는 주파수 파라미터(frequency parameter),  $\rho_s$ 는 평판의 면밀도,  $f$ 는 진동수(단위: Hz),  $D_E = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ 는 판강성(flexural rigidity of plate),  $M_n$ 은 모서리에서의 모멘트,  $V_n$ 은 모서리에서의 수직력(vertical force)을 뜻한다.

Fig. 1에서 점선은 이 논문에서의 해석 대상인 임의 형상을 가진 평판을 보여준다. Fig. 1에서와 같이 해석 대상 평판의 경계  $\Gamma$ 는  $N$ 개의 노드들로 이산화된다. 위치 벡터  $\mathbf{r}$ 로 표시된 평판 내부의 임의의 한 점  $P$ 에서의 진동 변위는 다음과 같이 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 가정된다<sup>(5)</sup>.

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \{A_k J_0(\lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|)\} \tag{5}$$

여기서  $J_0$ 와  $I_0$ 는 각각 제 1종 및 제 2종 0차 베셀 함수(Bessel function)를 나타내며,  $A_k$ 와  $B_k$ 는 미지 상수이다. 그리고  $\mathbf{r}_k$ 는 Fig. 1에서 알 수 있듯이 평판 경계에 위치한 노드  $P_k$ 에 대한 위치 벡터를 뜻한다. 참고로 베셀 함수  $J_0$ 와  $I_0$ 의 선형 결합

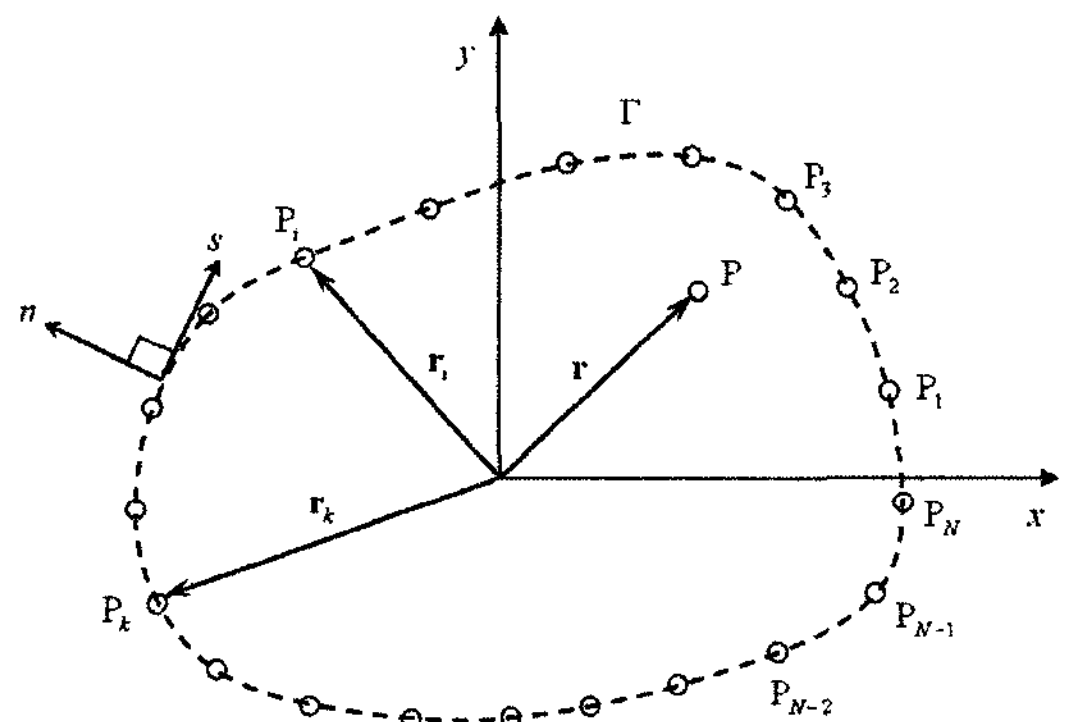


Fig. 1 An arbitrarily shaped plate discretized with boundary nodes  $P_1, P_2, \dots, P_N$

만으로도 임의 형상 평판의 진동변위를 가정할 수 있는 이유는 저자의 기 발표 논문들을 참조하기 바란다<sup>(3~6)</sup>.

가정된 자유진동해 식 (5)가 평판의 경계에 위치한 노드들 위에서 자유단 경계조건을 만족하도록 하기 위해, 경계를 연속적으로 정의된 경계조건인 식 (3), (4)를 다음과 같이 이산화하여 근사 자유단 경계조건을 정의한다.

$$M_n(W(\mathbf{r}_i)) = 0, \quad (6)$$

$$V_n(W(\mathbf{r}_i)) = 0, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

여기서  $\mathbf{r}_i$ 는 Fig. 1에서 알 수 있듯이 평판의 경계에 놓인 노드  $P_i$ 에 대한 위치벡터를 뜻한다.

### 2.2 지역 극좌표계(local polar coordinates)를 이용한 경계조건 적용

이 논문에서는 해석 대상 평판의 경계 노드에서 자유단 경계조건 식 (6), (7)을 고려하기 위하여 지역 극좌표계(local polar coordinates)를 사용하는 방안이 새로이 고안되었다. 참고로 극좌표계(polar coordinates)는 광역 좌표계(global coordinates)로 사용되고, 접선-법선 방향 좌표계(tangential-normal coordinates)는 지역 좌표계로 사용되는 것이 일반적이다.

이 논문과 관련된 기초 연구에서는 평판의 경계 노드에서 자유단 경계조건을 적용하기 위하여 식 (8), (9)와 같은 접선-법선 좌표계로 표현된 자유단 경계조건<sup>(9)</sup>을 사용하였으나, 만족할 만한 해석 결과를 얻지 못한바 있다(그 원인에 대해서는 현재 연구 중에 있으며 향후 발표될 논문에서 제시할 예정).

$$M_n(W) = \nabla^2 W - (1-\nu) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right) = 0, \quad (8)$$

$$V_n(W) = \frac{\partial}{\partial n} \nabla^2 W + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} - \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial s} \right) = 0. \quad (9)$$

상기와 같은 문제점을 극복하기 위해서 Fig. 2와 같은 지역 극좌표계가 이 논문에서 사용되었다. 참고로, 이 논문에서 가정된 진동 변위 식 (5)는 베셀

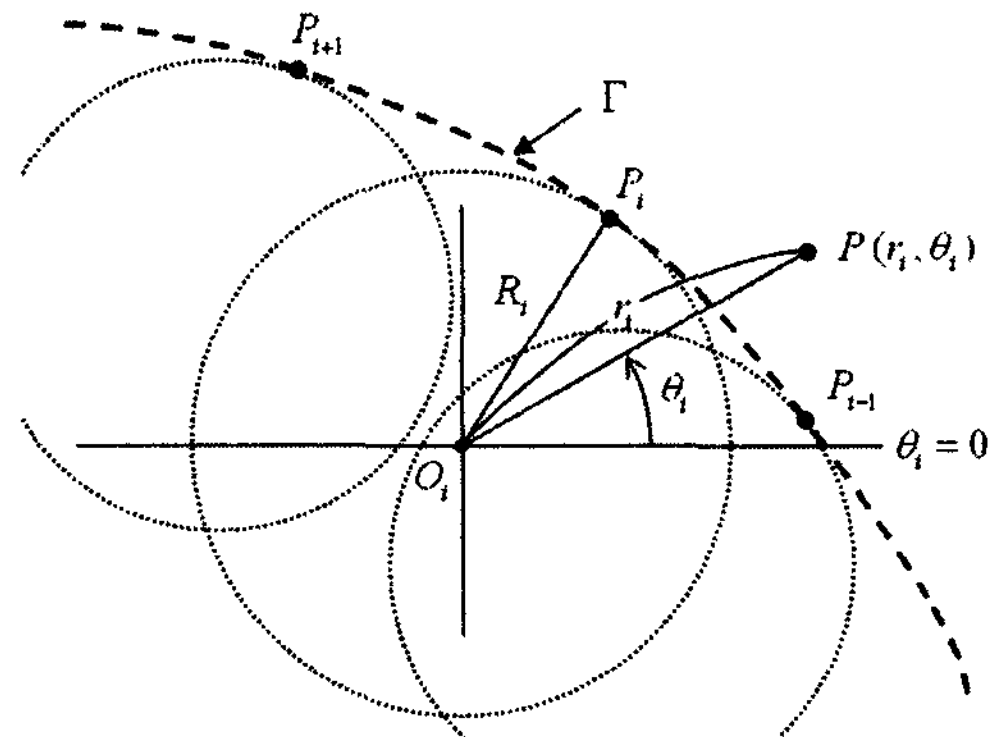


Fig. 2 Local polar coordinates  $(r_i, \theta_i)$  for node  $P_i$  on the boundary

함수들의 선형 결합이므로, 베셀 함수를 이용하여 고유치 문제를 푸는데 있어서 수치적 계산 오차를 가장 줄일 수 있는 좌표계가 극좌표계가 될 거라는 사실에 근거하여 지역 극좌표계 사용하는 방안을 고안하였다.

Fig. 2는 경계 위의 임의 노드  $P_i$ 에 설정된 지역 극좌표계  $(r_i, \theta_i)$ 를 보여준다. 그림에서 점  $O_i$ 는 지역 극좌표계의 원점이며, 노드  $P_i$ 에서의 곡률 반경 중심에 해당한다.

지역 극좌표계를 사용할 경우, 평판의 경계 노드에서의 이산 자유단 경계조건 식 (6), (7)은 다음과 같이 표현된다.

$$M_n(W(\mathbf{r}_i)) = \frac{\partial^2 W}{\partial r_i^2} + \frac{\nu}{r_i} \frac{\partial W}{\partial r_i} + \frac{\nu}{r_i^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_i^2} = 0, \quad (10)$$

$$V_n(W(\mathbf{r}_i)) = \frac{\partial^3 W}{\partial r_i^3} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 W}{\partial r_i^2} - \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial W}{\partial r_i} + \frac{2-\nu}{r_i^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r_i \partial \theta_i^2} - \frac{3-\nu}{r_i^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_i^2} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

### 2.3 시스템 행렬 크기의 축소를 통한 고유진동수 추출

앞에서 가정한 평판의 진동 변위 함수 식 (5)를 경계조건 식 (10), (11)에 대입한 후 정리하면 다음과 같은 행렬식이 각각 얻어진다.

$$\mathbf{SM}^J \mathbf{A} + \mathbf{SM}^I \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$VM^J A + VM^I B = 0 \quad (13)$$

여기서 행렬  $SM^J$ ,  $SM^I$ ,  $VM^J$ ,  $VM^I$ 의  $i$ 행,  $j$ 열 성분은 다음과 같다.

$$SM^J(i, k) = M_n[J_0(\lambda|r_i - r_k|)], \quad (14)$$

$$SM^I(i, k) = M_n[I_0(\lambda|r_i - r_k|)], \quad (15)$$

$$VM^J(i, k) = V_n[J_0(\lambda|r_i - r_k|)], \quad (16)$$

$$VM^I(i, k) = M_n[I_0(\lambda|r_i - r_k|)]. \quad (17)$$

그리고,  $A$ 와  $B$ 는 미지상수 벡터로 다음과 같다.

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}^T, \quad (18)$$

$$B = \{B_1, B_2, \dots, B_N\}^T. \quad (19)$$

식(14)~(17)의 실제 성분 값을 계산하는 과정에서  $i=k$ 인 경우에는  $r_i - r_k = 0$ 이 되어 성분 값을 구할 수가 없게 된다. 그래서 이 논문에서는  $i \neq k$ 인 경우만을 고려해서 식(12), (13)의 행렬식을 구성하였다.

이제 시스템 행렬(system matrix)<sup>(3)</sup>를 구하기 위하여 앞에서 구한 두 시스템 행렬식 식(12), (13)을 하나의 행렬식으로 변환하고자 한다. 이를 위해 식(13)을 식(2)과 같이 변환하는 방법이 적용되었으며, 이러한 방법은 시스템 행렬의 크기가 두 배로 커지는 단점<sup>(5)</sup>을 방지하는 장점을 가진다.

$$B = -VM^{I^{-1}} VM^J A, \quad (20)$$

여기서  $VM^{I^{-1}}$ 은  $VM^I$ 의 역행렬을 뜻한다. 다음으로 식(20)을 식(12)에 대입하면 다음과 같은 최종 시스템 행렬식이 구해진다.

$$[SM^J + SM^I - VM^{I^{-1}} VM^J] A = 0, \quad (21)$$

또는

$$SM(f) A = 0, \quad (22)$$

여기서

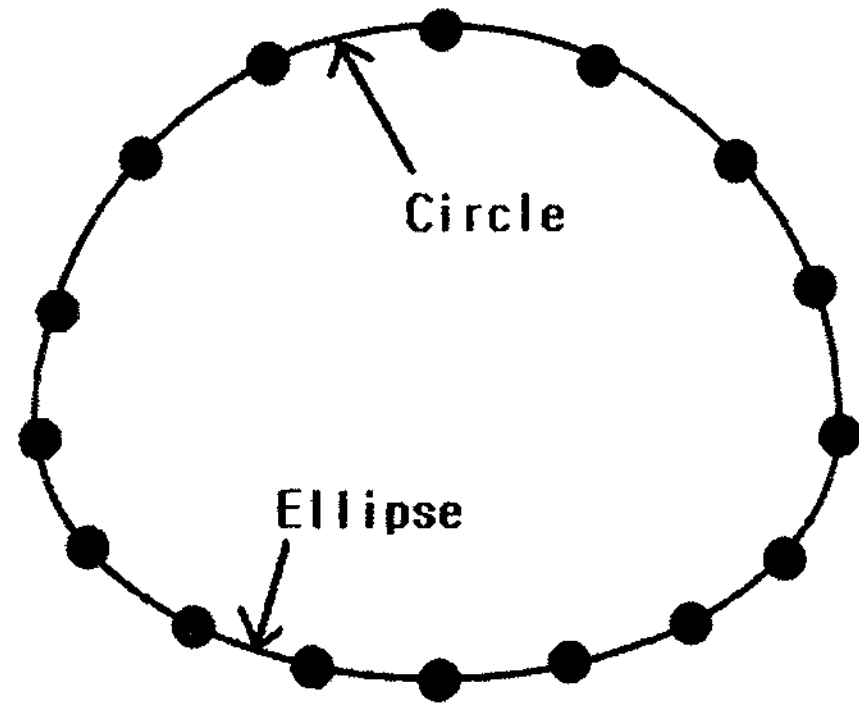


Fig. 3 Arbitrarily shaped plate with 16 nodes on the boundary

$$SM(f) = [SM^J + SM^I - VM^{I^{-1}} VM^J] \quad (23)$$

이며, 해석 대상 평판의 최종 시스템 행렬에 해당하는  $SM(f)$ 은 (식(2)에서 정의된) 진동수  $f$ 의 함수이다.

마지막으로 평판의 고유진동수는 시스템 행렬의 판별식이 영(zero)이 되게 하는 진동수로부터 구해질 수 있으며<sup>(3)</sup>, 다음과 같은 조건으로부터 구해질 수 있다.

$$\det(SM(f)) = 0 \quad (24)$$

그런데, 식(24)는 평판의 고유진동수뿐만 아니라 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인의 고유진동수치 까지도 제공함이 이 논문에서 확인되었다. 이러한 사실은 지금까지 저자가 수행해온 연구 결과들<sup>(5~8)</sup>과도 일치한다. 이러한 멤브레인의 고유진동수를 잉여 고유진동수(spurious natural frequency)라 부르며, 이 논문에서 발생한 잉여 고유진동수들을 제거하기 위한 연구가 현재 진행 중에 있다. 참고로, 고유모드를 추출하는 방안에 관한 연구는 현재 수행 중에 있으며, 향후 발표될 추가 논문에서 관련 연구 내용을 제시할 예정이다.

### 3. 검증 예제

이 논문에서 정립한 자유단 평판에 대한 무요소법의 수렴성 및 정확성을 검증하기 위해 세가지 형상의 평판에 대해 이 논문에서 개발한 기법을 적용하

였다. 두께( $h$ )가 0.005 m, 영률( $E$ )이 210 Gpa, 푸아송비( $\nu$ )가 0.3, 밀도( $\rho_s / h$ )가 7800 kg/m<sup>3</sup>인 물성치를 가지는 평판이 아래 예제들에서 사용되었다.

### 3.1 임의 형상 평판

이 예제에서는 상단은 원형(반지름 1 m)이고 하단은 타원(단축 0.7 m, 장축 1 m)으로 이루어진 Fig. 3 과 같은 임의 형상 평판에 대한 해석이 이루어졌다. 참고로 이 예제에서 임의 형상 평판이라 함은 그 형상이 타원좌표계(elliptical coordinates)나 경사좌표계(skew coordinates) 등과 같이 특별한 좌표계로 매핑(mapping)이 될 수가 없어서 이론적으로 고유치 해석이 불가능한 평판을 의미한다.

Fig. 3은 16개의 노드가 균등한 간격으로 경계에 설정된 경우를 보여주며, 이 예제에서는 12개, 14개, 16개, 18개의 노드가 설정된 경우들에 대해 해석이 수행되었다. 참고로 노드를 균등하게 설정하지 않더라도 고유치 해석 결과는 거의 변화가 없는 것으로 확인되었다(1/1000 오차 이내).

Table 1은 이 논문에서 개발한 방법에 의한 해석 결과를 보여준다. 경계 노드의 개수를 12개, 14개, 16개, 18개로 점차적으로 증가시킴에 따라 고유진동수들이 일정한 값으로 수렴되고 있음을 확인할 수 있다. 첫 번째 고유진동수의 경우, 노드의 개수가 증가함에 따라 고유진동수가 점점 커지고 동시에 변화의 폭은 작아지면서 일정한 값(아마 엄밀해)으로 수렴됨을 확인할 수 있다. 나머지 고유진동수들도 마찬가지로 첫 번째 고유진동수와 비슷한 수렴 양상을 보임을 확인할 수 있다.

단지 18개의 노드만을 사용한 해석 결과를 4014

개의 노드를 사용한 FEM(ANSYS) 해석 결과와 비교해보았을 때 오차가 거의 없으며(모든 고유진동수들이 0.9% 오차 이내에 있음.), 결과적으로 이 논문에서 제안한 방법은 우수한 수렴성 뿐만 아니라 정확도에 있어서도 아주 우수한 결과를 제공한다고 말할 수 있다. 참고로 이 FEM 해석에서는 충분한 노드 수를 사용했기 때문에 Table 1에 제시된 FEM 고유진동수들은 거의 수렴된 결과라고 말할 수 있다.

### 3.2 원형 평판

반지름이 1 m인 Fig. 4와 같은 원형 평판의 경계에 12개, 14개, 16개, 18개의 노드를 균등한 간격으로 설정한 네 가지 경우에 대해 해석을 수행하였다. 그 결과는 Table 2에서 제시되었다. Fig. 4는 원형 평판 경계에 16개의 노드를 설정한 경우를 보여준다.

Table 2에서 확인할 수 있듯이 단지 12개의 노드가 사용된 경우에도 첫 번째부터 네 번째 고유진동수들이 이미 수렴된 결과를 보여준다. 그리고 다섯

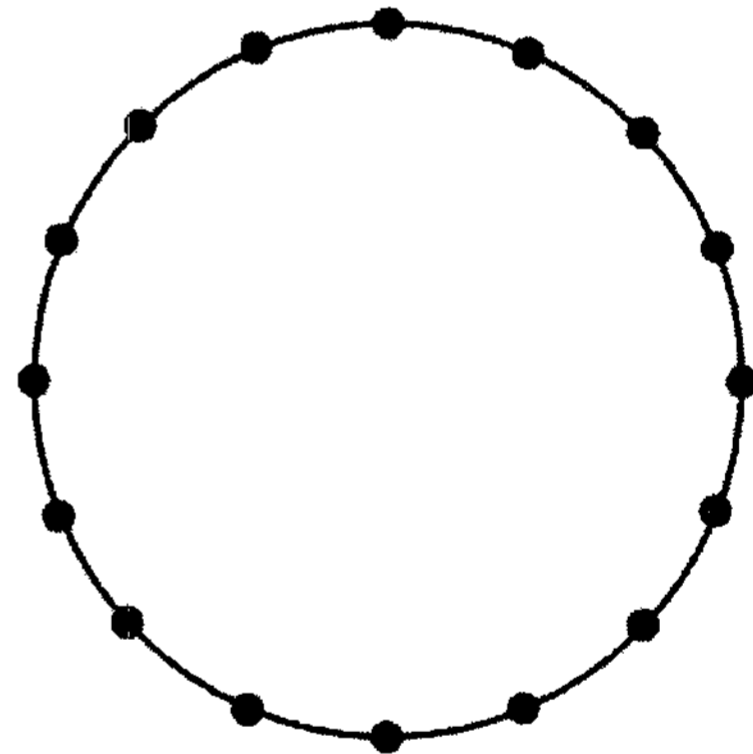


Fig. 4 Circular plate with 16 nodes on the boundary

Table 1 Natural frequency  $f_i$  of the arbitrarily shaped plate

	Number of nodes(proposed method)				ANSYS (4014 nodes)
	12	14	16	18	
1	59.64	60.05	60.26	60.34	60.70
2	67.74	67.98	68.11	68.13	68.26
3	125.81	125.72	125.67	125.64	124.54
4	149.00	149.46	149.79	149.87	150.76
5	161.11	160.64	160.31	160.26	160.50

Table 2 Natural frequency  $f_i$  of the circular plate

	Number of nodes(proposed method)				ANSYS (4219 nodes)
	12	14	16	18	
1	51.62	51.62	51.62	51.62	51.76
2	88.38	88.38	88.38	88.38	89.23
3	120.11	120.11	120.11	120.11	120.10
4	201.23	201.23	201.23	201.23	201.82
5	211.14	211.15	211.18	211.18	211.02

번째 고유진동수의 경우는 16개의 노드를 사용했을 때 수렴된 결과를 보여준다. 상기와 같이 이 논문에서 개발한 방법은 적은 개수의 노드를 사용하더라도 우수한 수렴성을 가짐을 알 수 있다. 그리고 18개의 노드가 사용된 경우의 고유진동수들을 4219개 노드가 사용된 FEM(ANSYS) 해석 결과와 비교해보았을 때 거의 오차가 미미함을 확인할 수 있다. 앞의 예제와 마찬가지로 FEM 해석 결과들은 충분히 수렴된 결과이다.

### 3.3 타원 형상 평판

Fig. 5는 세 번째 증명 예제로 사용된 타원 형상 평판(단축 길이: 0.7 m, 장축 길이: 1 m)의 경계에 16개의 노드가 설정된 경우를 보여준다. 이 예제에서도 마찬가지로 12개, 14개, 16개, 18개의 노드를 평판 경계에 설정한 네 가지 경우에 대한 해석이 수행되었다. Table 3은 해석 결과를 보여준다.

Table 3에서 알 수 있듯이 고유진동수들이 일정한 방향으로 수렴되고 있음을 확인할 수 있다. 한 예로 두 번째 고유진동수의 경우 경계 노드의 수가 증가함에 따라 그 크기가 점점 작아지면서 어떤 값에 수렴되고 있음을 확인할 수 있다. 나머지 다른 고유진동수들도 경계 노드의 개수가 증가함에 따라 어떤 특정한 값(엄밀해)으로 수렴되는 것을 확인할 수 있다.

그리고 단지 18개의 경계 노드가 사용된 경우의 고유진동수 값들을 4125개의 노드가 사용된 FEM(ANSYS) 해석 결과와 비교해보았을 때 오차가 거의 없는 것을 확인할 수 있으므로, 이 논문에서 개발한 방법은 우수한 수렴성 뿐만 아니라 우수한 정확성을 가지고 있다고 말할 수 있다.

Table 3 Natural frequency  $f_i$  of the elliptic plate

	Number of nodes(proposed method)				ANSYS (4125 nodes)
	12	14	16	18	
1	31.99	31.99	31.99	31.99	31.99
2	37.41	37.39	37.38	37.37	37.42
3	73.28	73.28	73.28	73.28	73.41
4	78.38	78.53	78.61	78.64	78.60
5	83.63	83.43	83.18	83.14	83.26

## 4. 결 론

이 논문에서는 자유단 경계를 가진 임의 형상 평판의 고유진동수를 정확하게 구할 수 있는 무요소법(meshless method)의 개발이 이루어졌다. 해석 결과의 수렴성 및 정확성을 우수하게 하기 위해 지역 극좌표계의 사용과 시스템 행렬을 크기를 줄이는 방안의 도입이 이 논문에서 이루어졌다.

한편, 이 논문에서 개발한 무요소법은 해석 대상 영역의 경계를(요소(element)를 사용치 않고) 단지 노드(node)만으로 이산화하는 방법으로 단지 적은 수치 계산량만을 필요로 하는 장점을 가진다. 아울러 이 논문에서 제안한 방법은 경계 노드 수를 증가함에 따라 고유진동수들이 신속히 수렴되는 특성을 가지고 있고 동시에 아주 정확한 고유진동수를 제공함이 다양한 예제를 통해 검증되었다.

## 후 기

이 논문은 2006년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2006-311-D00301).

## 참 고 문 헌

- (1) Bathe, K., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", New Jersey: Prentice-Hall.
- (2) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. 1984, "Boundary Element Techniques", New York: Springer-Verlag.
- (3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, "Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.
- (4) Kang, S. W. and Lee, J. M. 2000, "Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(5) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.

(6) Kang, S. W. 2002, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions", *Journal of Sound and Vibration* Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.

(7) Kang, S. W., et al., 2003, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates With Free Edges Using Non-dynamic Influence Functions", *Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 821~827.

(8) Kang, S. W., 2007, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates With Free

Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners", *Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.

(9) Meirovitch, L., 1967, *Analytic Methods in Vibrations*, New York: Macmillan Publishing, pp. 179~182.

(10) Yee, H. Y., 1966, "On Determination of Cutoff Frequencies of Waveguides with Arbitrary Cross-section", *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, Vol. 54, pp. 64~71.

(11) Yee, H. Y. and Audeh, N. F., 1966, "Cutoff Frequencies of Eccentric Waveguides", *Institute of Electrical and Electronic Engineers, Transactions on Microwave Theory and Techniques MTT-14*, pp. 487~493.