응용통계연구 제 **21**권 2호, 2008년, pp. 327–340

오차항이 AR(1)을 따르는 Box-Cox 변환 회귀모형에서 모형 식별을 위한 검정*

전수영[1] 윤석진[2] 황선영[3] 송석헌[4]

요 약

본 연구에서는 오차항이 AR(1)을 따르는 회귀모형에서 올바른 추론을 도출하고자 모형식별의 문제를 다루었다. 이를 위해 Box-Cox 변환된 회귀모형을 고려하여 (i) Box-Cox 변환모형과 AR(1) 오차에 대한 동시 검정, (ii) AR(1) 오차가 존재하는 모형에서의 Box-Cox 변환모형에 대한 검정 그리고 (iii) 모형이 Box-Cox 변환 되어 있을 때 오차가 AR(1) 과정을 따르는지에 대한 LM 검정통계량을 유도하였다. 특히 LM 검정방법에서 여러개의 모수가 비선형관계를 형성하고있어 정보행렬의 추정은 계산상 매우 어렵다. 따라서 정보행렬의 원소에 대한 기대값을 구함에 있어 Taylor전개를 이용하여 정보행렬을 구하고 이에 기반을 둔 LM 검정통계량(LM_E)를 제안하고 모의실험결과 LM_E가 기존의 헤시안행렬에 기반을 둔 LM 검정통계량(LM_H)에 비하여 유의수준을 잘 유지하고 있는 것으로 나타났다.

1. 서론

일반적으로 회귀자료들을 분석하는데 있어서 대부분의 모형은 선형성을 가정하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 모형의 선형성을 가정하기 어려운 경우가 많이 존재한다. 따라서 연구자들은 주어진 회귀자료에 대하여 선형회귀모형으로 가정하여 통계적 추론을 하여야하는지 비선형 회귀모형으로 다루어야 하는 지에 대한 모형 식별문제에 봉착하게된다. 본 연구에서는 회귀모형에서 이러한 함수의 형태에 관한 식별뿐만 아니라, 더불어 오차항의 자기상관의 존재에 따른 모형식별의 문제를 고려한다. 따라서 회귀모형에서 적절한 회귀모형의 함수의 형태 (선형/비선형, 로그선형/비선형 등)와 자기상관의 존재여부를 동시에 검정할 수 있는 검정통계량을 유도한다. 또한 동시검정의 결과 귀무가설이 기각되었을

* 본 연구는 (KRF-2005-070-C00022)의 연구비 지원에 의하여 수행되었음.
편집자 주 : 이 연구는 고 송석헌 고려대학교 통계학과 교수께서 생전에 작성하시고 마무리까지 직접하신 논문으로서 안타깝게도 유작으로 남게 되었습니다. 삼가 고인의 명복을 빕니다.

1) 미국, 버지니아 22908-0717, 버지니아대학교, 보건학과, 책임연구원.
E-mail: sc8te@virginia.edu
2) (150-717) 서울시 영등포구 여의도동 23-5, 한화증권(주), 사원.
E-mail: 200501034@stockoffice.co.kr
3) (140-742) 서울시 용산구 효창원길 52 숙명여자대학교 통계학과, 교수.
E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr
4) (136-701) 교신저자. 서울시 성북구 안암동 5-1, 고려대학교 통계학과, 교수.
E-mail: ssong@korea.ac.kr

경우, 그 결과가 오차항의 자기상관의 존재 때문인지 또는 함수의 형태에 따른 효과 때문인지 더 이상의 추론이 불가능하다. 이러한 동시검정의 약점을 극복하기 위하여, 본 연구에서는 자기상관이 존재한다는 가정하에서 모형의 함수형태에 관하여 검정하는 조건부 검정(conditional test)과 모형의 함수형태가 알려진 경우 오차항에서 자기상관의 존재 여부에 대한 조건부 검정을 수행하기 위한 검정통계량들을 유도하려한다.

모형식별을 위한 검정으로는 우도비(LR)검정과 라그랑쥐 승수(LM)검정, Wald검정이 주로 사용된다. LR검정방법은 전체 모수공간에서의 정보와 제약 하에서의 정보를 모두 이용해야 하는 반면, LM검정방법은 제약 하에서의 정보만을 이용하는 장점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 Box-Cox 변환 (Box와 Cox, 1964)된 회귀모형에서 오차항이 AR(1)을 따르는 모형에서 다양한 모형의 식별을 위하여 LM검정방법을 이용하려한다. 그러나 유도된 LM 검정통계량에서 정보행렬을 구함에 있어, 여러개의 모수가 비선형관계를 형성하고있어 정보행렬의 추정은 계산상 매우 어렵다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위하여 헤시안(Hessian)행렬의 원소에 음을 곱한 후 사용하는 방법 (Godfrey와 Wickens, 1981; Baltagi, 1997)과 Davidson과 MacKinnon (1984, 1985)이 제안한 double-length artificial방법 등이 이용되어왔다. 본 연구에서는 정보행렬의 원소에 대한 기대값을 구함에 있어 Taylor전개를 이용하여 구하고 이러한 정보행렬에 기반을 둔 LM 검정통계량(LM_E)을 제안하고 이를 헤이시안행렬에 기반을 둔 LM 검정통계량(LM_H)과 모의실험을 통해 소표본에서의 검정통계량들의 성질을 비교하고자한다.

본 연구의 2장에서는 오차항이 AR(1)과정을 따르는 Box-Cox 변환된 회귀모형을 다룬다. 3장에서는 동시검정과 조건부 검정을 위하여 LM 검정통계량을 유도한다. 그러나 유도한 검정통계량에 사용되는 정보행렬의 추정에 어려움이 있어 검정통계량의 계산을 위하여 Taylor 전개를 통하여 정보행렬의 근사값을 이용한 LM검정통계량을 제시하였다. 4장에서는 모의실험을 통해서 LM_E와 LM_H의 유의수준을 비교하였으며, 5장에서는 본 연구의 결과를 정리하였다.

2. 모형

본 연구에서는 다음과 같은 회귀모형을 고려한다.

$$h(y_t, \lambda) = h(x_{1t}, \lambda)'\beta_1 + x'_{2t}\beta_2 + u_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.1}$$

여기서 $h(\cdot)$을 모수 λ에 의존하는 Box-Cox변환함수라고 하면 변환된 종속변수 $h(y_t, \lambda)$는 다음과 같다

$$h(y_t, \lambda) = \begin{cases} \left(y_t^\lambda - 1\right)/\lambda, & \text{if } \lambda \neq 0, \\ \log y_t, & \text{if } \lambda = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Box-Cox 변환에서 주로 다루어진 변환은 $\lambda = 1$ (선형변환)과 $\lambda = 0$ (로그변환)이다. 본 연구에서는 선형 ($\lambda = 1$)과 로그선형 모형 ($\lambda = 0$)뿐만 아니라 비선형 변환인 $\lambda = 0.2, 0.5, 0.8$ 등 다양한 형태의 λ에 대해서 다루려한다. 또한 β_1과 β_2는 $k_1 \times 1$과 $k_2 \times 1$ 벡터인 회귀계수

이고, x_{1t}와 x_{2t}는 $k_1 \times 1$과 $k_2 \times 1$ 벡터인 독립변수이다. 그리고 오차항 $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$, $t = 2, \ldots, T$, $(u_1 = e_1/\sqrt{1-\rho^2})$. $-1 < \rho < 1$, $e_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$라 가정하면 $u \sim N\left(0, \sigma^2\Omega\right)$이다. 이때 Ω는

$$\Omega = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

식 (2.1)을 행렬을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$h(y, \lambda) = X(\lambda)\beta + u, \tag{2.4}$$

여기서 $X(\lambda) = \left(h\left(x_{1t}, \lambda\right)', x_{2t}'\right)'$는 $T \times (k = k_1 + k_2)$ 독립변수행렬이고, $\beta = (\beta_1', \beta_2')'$이고, $h(y, \lambda)$는 $T \times 1$종속변수 벡터이다. 모형 (2.3)에 대한 로그우도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L\left(y; X, \beta, \sigma^2, \rho, \lambda\right) &= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left|\sigma^2\Omega\right| + \sum_{t=1}^{T}\log h_y\left(y_t, \lambda\right) \\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\left(h(y, \lambda) - X(\lambda)\beta\right)'\Omega^{-1}\left(h(y, \lambda) - X(\lambda)\beta\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

이때 $h_y(y, \lambda) = \partial h(y, \lambda)/\partial y$이며 y를 λ의 함수인 $h(y, \lambda)$로 변환했을 때의 자코비안이고, $\sum_{t=1}^{T}\log h_y(y_t, \lambda) = \log\prod_{t=1}^{T} y_t^{\lambda-1} = (\lambda - 1)\sum_{t=1}^{T}\log y_t$의 관계에 있다. $\log|\sigma^2\Omega| = T\log\sigma^2 - \log(1-\rho^2)$이다. 따라서 식 (2.5)에서 상수항을 제외하고 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L\left(y; X, \beta, \sigma^2, \rho, \lambda\right) &= -\frac{T}{2}\log\sigma^2 + \frac{1}{2}\log\left(1-\rho^2\right) + (\lambda - 1)\sum_{t=1}^{T}\log y_t \\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\left(h(y, \lambda) - X(\lambda)\beta\right)'\Omega^{-1}\left(h(y, \lambda) - X(\lambda)\beta\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

ρ와 λ가 주어졌을 때 β와 σ^2의 constrained MLE는 다음과 같다.

$$\hat{\beta}(\rho, \lambda) = \left(X(\lambda)'\Omega^{-1}X(\lambda)\right)^{-1}X(\lambda)'\Omega^{-1}h(y, \lambda), \tag{2.7}$$

$$\hat{\sigma}^2(\rho, \lambda) = \frac{1}{T}\left(h(y, \lambda) - X(\lambda)\hat{\beta}(\rho, \lambda)\right)'\Omega^{-1}\left(h(y, \lambda) - X(\lambda)\hat{\beta}(\rho, \lambda)\right), \tag{2.8}$$

여기서 Ω^{-1}는 다음과 같다.

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & & & \\ -\rho & \left(1+\rho^2\right) & -\rho & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & -\rho \\ & 0 & & -\rho\ \left(1+\rho^2\right) & -\rho \\ & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

로그 우도함수 (2.5)에 $\hat{\beta}(\rho,\lambda)$ 과 $\hat{\sigma}^2(\rho,\lambda)$ 을 대입하면 ρ와 λ의 concentrated 로그우도함수는 다음과 같다.

$$L(\rho,\lambda) = -\frac{T}{2}\log\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{2}\log\left(1-\rho^2\right) + \sum_{t=1}^{T}\log h_y(y_t,\lambda). \tag{2.10}$$

3. LM 검정

모수 벡터 $\psi = \{\beta', \sigma^2, \rho, \lambda\}'$에 대해서 $S(\psi)$를 스코어벡터라 하고, $H(\psi)$를 헤시안행렬, $I(\psi) = -E[H(\psi)]$를 정보행렬이라 하자. 식 (2.6)에서 $S(\psi)$, $H(\psi)$와 $I(\psi)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
S'(\psi) &= \{S_\beta, S_{\sigma^2}, S_\rho, S_\lambda\}', \\
S_\beta &= \frac{\partial L}{\partial\beta} = \frac{1}{\sigma^2}X(\lambda)'\Omega^{-1}(h(y,\lambda)-X(\lambda)\beta), \\
S_{\sigma^2} &= \frac{\partial L}{\partial\sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(h(y,\lambda)-X(\lambda)\beta)'\Omega^{-1}(h(y,\lambda)-X(\lambda)\beta), \\
S_\rho &= \frac{\partial L}{\partial\rho} = -\frac{\rho}{1-\rho^2} - \frac{1}{2\sigma^2}(h(y,\lambda)-X(\lambda)\beta)'\partial\Omega^{-1}/\partial\rho(h(y,\lambda)-X(\lambda)\beta), \\
S_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial\lambda} = \sum_{t=1}^{T}\log y_t - \frac{1}{\sigma^2}(h_\lambda(y,\lambda)-X_\lambda(\lambda)\beta)'\Omega^{-1}(h(y,\lambda)-X(\lambda)\beta), \\
& h_\lambda(y,\lambda) = \frac{h(y,\lambda)}{\partial\lambda}, \qquad X_\lambda(\lambda) = \frac{X(\lambda)}{\partial\lambda},
\end{aligned}$$

$$H(\psi) = \begin{pmatrix} H_{\beta\beta} & H_{\sigma^2\beta} & H_{\rho\beta} & H_{\lambda\beta} \\ H_{\beta\sigma^2} & H_{\sigma^2\sigma^2} & H_{\rho\sigma^2} & H_{\lambda\sigma^2} \\ H_{\beta\rho} & H_{\sigma^2\rho} & H_{\rho\rho} & H_{\lambda\rho} \\ H_{\beta\lambda} & H_{\sigma^2\lambda} & H_{\rho\lambda} & H_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}, \quad I(\psi) = \begin{pmatrix} I_{\beta\beta} & I_{\sigma^2\beta} & I_{\rho\beta} & I_{\lambda\beta} \\ I_{\beta\sigma^2} & I_{\sigma^2\sigma^2} & I_{\rho\sigma^2} & I_{\lambda\sigma^2} \\ I_{\beta\rho} & I_{\sigma^2\rho} & I_{\rho\rho} & I_{\lambda\rho} \\ I_{\beta\lambda} & I_{\sigma^2\lambda} & I_{\rho\lambda} & I_{\lambda\lambda} \end{pmatrix},$$

여기서 $H(\psi)$와 $I(\psi)$의 원소들은 각각 부록 (1)과 (2)에 제시하였다. 만약 귀무가설에 의해 제약이 부과되었을 경우 LM 검정통계량은 다음과 같다.

$$\mathrm{LM} = S'(\psi)I^{-1}(\psi)S(\psi), \tag{3.1}$$

이때 정보행렬 $I(\psi)$을 구함에 있어서, 여러개의 모수가 비선형관계를 형성하고 있어 정보행렬의 계산은 매우 어렵다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위해 헤시안행렬의 원소에 음을 곱한 후 이를 이용하면 LM 검정통계량 다음과 같다.

$$LM_H = -S'\left(\hat{\psi}_0\right)H^{-1}\left(\hat{\psi}_0\right)S\left(\hat{\psi}_0\right). \tag{3.2}$$

본 연구에서는 정보행렬의 원소에 대한 기대값을 구함에 있어 Taylor 전개를 이용하여 정보행렬을 구하고 (정보행렬의 계산을 위한 원소들의 기대값은 부록 (3)에 제시) 이러한 정보행렬에 기반을 둔 다음과 같은 LM 검정통계량(LM_E)를 제안한다.

$$LM_E = S'(\hat{\psi}_0)I^{-1}(\hat{\psi}_0)S(\hat{\psi}_0), \tag{3.3}$$

여기서 관심 있는 모수가 ρ와 λ인 경우, 모수 벡터 $\psi = \{\beta', \sigma^2, \rho, \lambda\}'$를 $\psi_1 = \{\beta', \sigma^2\}'$, $\psi_2 = \{\rho, \lambda\}'$ 두 부분으로 분할하면 스코어 벡터와 헤시안 행렬, 정보행렬도 동일한 형태로 분할된다. 본 연구에서 다루는 귀무가설은 ψ_2에 관심이 있음으로 LM_E는 다음과 같이 표현된다.

$$LM_E = S_2'(\hat{\psi}_0) I^{22}(\hat{\psi}_0) S_2(\hat{\psi}_0), \tag{3.4}$$

여기서 $I^{22} = (I_{22} - I_{21} I_{11}^{-1} I_{12})^{-1}$이다. 그러면 $I^{22}(\hat{\psi}_0)$는 $I^{-1}(\hat{\psi}_0)$에서 ψ_2에 관련된 부분의 분할행렬이다. 식 (3.2)의 LM_H에 대해서도 식 (3.4)와 동일하게 표현할 수 있다.

3.1. Box-Cox 변환모형과 AR(1) 오차에 대한 동시검정

이제 Box-Cox 변환모형과 AR(1) 오차에 대한 동시검정을 고려해 보자. 이때 귀무가설은 다음과 같다.

$$H_0^a : \rho = \rho_0, \quad \lambda = \lambda_0, \tag{3.5}$$

여기서 ρ_0와 λ_0는 귀무가설 하에서의 값이다. 이때 검정통계량 LM_E은 다음과 같다.

$$LM_E(\rho_0, \lambda_0) \tag{3.6}$$

$$= S_2'(\hat{\psi}_0) \begin{bmatrix} I_{\rho\rho} - I_{\rho\sigma^2} I_{\sigma^2\sigma^2}^{-1} I_{\sigma^2\rho} & I_{\rho\lambda} - I_{\rho\sigma^2} I_{\sigma^2\sigma^2}^{-1} I_{\sigma^2\lambda} \\ I_{\lambda\rho} - I_{\lambda\sigma^2} I_{\sigma^2\sigma^2}^{-1} I_{\sigma^2\rho} & I_{\lambda\lambda} - (I_{\lambda\beta} I_{\beta\beta}^{-1} I_{\beta\lambda} + I_{\lambda\sigma^2} I_{\sigma^2\sigma^2}^{-1} I_{\sigma^2\lambda}) \end{bmatrix}^{-1} S_2(\hat{\psi}_0), \tag{3.7}$$

$\lambda = 0$인 경우에는 $\log y_t = \eta_t + u_t$이므로 계산이 쉽지만, $\lambda \neq 0$인 경우에는 $\log y_t$에 대해서 근사시켜서 풀어야만 한다. $\log y_t$에 대한 Taylor 전개는 다음과 같다 (참고, 부록 3).

$$\lambda \log y_t = \log(1 + \lambda\eta_t) + \theta_t u_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 u_t^2 + \frac{1}{3}\theta_t^3 u_t^3 + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\theta_t^k u_t^k + \cdots, \tag{3.8}$$

식 (3.8)에서 θ의 차수가 3차 이상이 되면 무시해도 될 만큼 작은 값이 되기 때문에 위의 전개에서 3차까지만 ($k = 3$) 근사시켰다. H_0^a하에서 $LM_E(\rho_0, \lambda_0)$는 점근적으로 $\chi^2(2)$를 따른다.

동시검정의 결과 귀무가설이 기각되었을 경우, 그 결과가 오차항의 자기상관의 존재 때문인지 또는 비선형의 효과 때문인지 더 이상의 추론이 불가능하다. 이러한 동시검정의 약점을 극복하기 위하여, 자기상관이 존재한다는 가정하에서 모형의 선형성여부를 검정하는 조건부 검정(conditional test)과 비선형모형 가정하에서 오차항에 자기상관의 존재 여부에 대한 조건부 검정을 수행하기 위한 검정통계량들을 유도한다

3.2. Box-Cox 변환 모형에 대한 조건부 검정

오차항에 1차 자기상관 ρ가 존재할 때 Box-Cox 변환모형에서 귀무가설은 $H_0^b : \lambda = \lambda_0 | \rho = \rho_0$이고, 이때 검정통계량은 다음과 같이 유도된다.

$$LM_E(\lambda_0|\rho) = S_\lambda'(\hat{\psi}_0) \left[I_{\lambda\lambda} - (I_{\lambda\psi_1} I_{\psi_1\psi_1}^{-1} I_{\psi_1\lambda}) \right]^{-1} S_\lambda(\hat{\psi}_0), \tag{3.9}$$

여기서 $I_{\lambda\psi_1} I_{\psi_1\psi_1}^{-1} I_{\psi_1\lambda} = I_{\lambda\beta} I_{\beta\beta}^{-1} I_{\beta\lambda} + I_{\lambda\sigma^2} I_{\sigma^2\sigma^2}^{-1} I_{\sigma^2\lambda}$이다. H_0^b하에서 $LM_E(\lambda_0|\rho)$는 점근적으로 $\chi^2(1)$을 따른다.

표 4.1: $H_0^a : \rho = \rho_0$, $\lambda = \lambda_0$에 대한 LM_H와 LM_E의 경험적 유의수준

		$\alpha = 0.01$				$\alpha = 0.05$			
		$T = 30$		$T = 50$		$T = 30$		$T = 50$	
λ	ρ	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E
0.0	0.0	0.064	0.009	0.019	0.009	0.137	0.051	0.073	0.049
0.0	0.2	0.058	0.008	0.020	0.009	0.129	0.044	0.068	0.047
0.0	0.5	0.053	0.008	0.020	0.008	0.120	0.042	0.068	0.048
0.2	0.0	0.062	0.008	0.020	0.010	0.132	0.048	0.070	0.051
0.2	0.2	0.058	0.007	0.019	0.009	0.124	0.044	0.069	0.049
0.2	0.5	0.051	0.008	0.019	0.009	0.114	0.040	0.066	0.046
0.5	0.0	0.061	0.008	0.021	0.010	0.132	0.050	0.070	0.049
0.5	0.2	0.058	0..007	0.020	0.010	0.128	0.046	0.069	0.049
0.5	0.5	0.051	0.007	0.020	0.010	0.114	0.040	0.068	0.047
0.8	0.0	0.061	0.007	0.021	0.010	0.133	0.051	0.072	0.052
0.8	0.2	0.057	0.007	0.021	0.010	0.127	0.047	0.071	0.050
0.8	0.5	0.050	0.007	0.019	0.010	0.118	0.038	0.069	0.048
1.0	0.0	0.061	0.007	0.022	0.010	0.133	0.050	0.073	0.053
1.0	0.2	0.057	0.007	0.020	0.009	0.129	0.048	0.072	0.049
1.0	0.5	0.051	0.006	0.019	0.009	0.116	0.048	0.070	0.047

3.3. AR(1) 모형에 대한 조건부 검정

Box-Cox 변환 모형의 모수 λ가 존재하고, 이를 알고 있는 경우 ρ의 존재 여부에 대한 귀무가설은 $H_0^c : \rho = 0|\lambda = \lambda_0$이고, 이에 대한 LM_E 검정통계량은 다음과 같다.

$$LM_E(\rho_0|\lambda) = S'_\rho(\hat{\psi}_0)\left[I_{\rho\rho} - (I_{\rho\psi_1} I^{-1}_{\psi_1\psi_1} I_{\psi_1\rho})\right]^{-1} S_\rho(\hat{\psi}_0), \tag{3.10}$$

여기서 $I_{\rho\psi_1} I^{-1}_{\psi_1\psi_1} I_{\psi_1\rho} = I_{\rho\sigma^2} I^{-1}_{\sigma^2\sigma^2} I_{\sigma^2\rho}$이다. H_0^c하에서 $LM_E(\rho_0|\lambda)$는 점근적으로 $\chi^2(1)$을 따른다.

4. 모의실험

본 장에서는 3장에서 LM_E검정통계량과 LM_H검정통계량의 효율성을 비교하고자 한다. 모의실험에 사용된 모형은 다음과 같다.

$$h(y_t, \lambda) = \beta_0 + x_t(\lambda)\beta_1 + u_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{4.1}$$

여기서 설명변수 x_{1t}는 균일분포 (0, 5)에서 추출하였고, β_0와 β_1은 1, 2로 고정하였다. 또한 각각의 모수들은 $\sigma = 0.1, 0.5$, $\rho = 0, 0.2, 0.5$ 그리고 $\lambda = 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1.0$로 변화시켜가며 실험했다. 모든 실험은 1000번 독립적으로 반복 실시하였으며, SAS/IML 프로시져를 이용하여 수행하였다. 본 실험에 표본의 수는 $T = 30, 50$을 사용하였다. 동시검정을위한 귀무가설, $H_0^a : \lambda = \lambda_0$, $\rho = \rho_0$과 조건부검정을 위한 귀무가설, $H_0^b : . \lambda = \lambda_0|\rho = \rho_0$, $H_0^c : \rho = 0|\lambda = \lambda_0$에 대하여 명목유의수준 0.01, 0.05에서 10000번의 반복을 통하여 검정통계량 LM_E와 LM_H들의 경험적 유의수준을 계산하였다.

표 4.2: $H_0^b: \lambda = \lambda_0 | \rho = \rho_0$에 대한 LM_H와 LM_E의 경험적 유의수준

		$\alpha = 0.01$				$\alpha = 0.05$			
		$T = 30$		$T = 50$		$T = 30$		$T = 50$	
λ	ρ	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E
0.0	0.0	0.034	0.009	0.017	0.010	0.091	0.052	0.061	0.052
0.0	0.2	0.034	0.009	0.015	0.009	0.089	0.053	0.061	0.051
0.0	0.5	0.036	0.009	0.015	0.010	0.090	0.053	0.059	0.049
0.2	0.0	0.034	0.008	0.017	0.011	0.090	0.055	0.062	0.052
0.2	0.2	0.034	0.009	0.016	0.011	0.089	0.053	0.062	0.052
0.2	0.5	0.034	0.010	0.015	0.010	0.087	0.054	0.061	0.051
0.5	0.0	0.034	0.011	0.017	0.011	0.089	0.054	0.062	0.052
0.5	0.2	0.033	0.010	0.017	0.011	0.091	0.053	0.062	0.053
0.5	0.5	0.032	0.010	0.017	0.012	0.090	0.053	0.062	0.053
0.8	0.0	0.034	0.011	0.017	0.010	0.090	0.054	0.062	0.054
0.8	0.2	0.034	0.010	0.017	0.011	0.090	0.055	0.065	0.055
0.8	0.5	0.034	0.010	0.018	0.011	0.090	0.054	0.065	0.055
1.0	0.0	0.036	0.012	0.017	0.011	0.089	0.056	0.063	0.053
1.0	0.2	0.034	0.011	0.017	0.012	0.089	0.055	0.066	0.055
1.0	0.5	0.036	0.010	0.018	0.011	0.088	0.055	0.064	0.056

표 4.3: $H_0^c: \rho = 0 | \lambda = \lambda_0$에 대한 LM_H와 LM_E의 경험적 유의수준

	$\alpha = 0.01$				$\alpha = 0.05$			
	$T = 30$		$T = 50$		$T = 30$		$T = 50$	
λ	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E	LM_H	LM_E
0.0	0.032	0.007	0.016	0.009	0.086	0.044	0.058	0.047
0.2	0.032	0.008	0.014	0.008	0.088	0.045	0.058	0.046
0.5	0.036	0.006	0.014	0.008	0.090	0.046	0.058	0.047
0.8	0.032	0.005	0.016	0.010	0.089	0.044	0.060	0.049
1.0	0.034	0.006	0.013	0.008	0.089	0.048	0.055	0.045

4.1. 모의실험결과

정보행렬을 이용한 LM_E와 헤시안 행렬을 이용한 LM_H에 대한 검정통계량에 관한 모의실험의 결과는 다음과 같다. 표 4.1은 귀무가설 $H_0^a: \rho = \rho_0$, $\lambda = \lambda_0$에서, 표 4.2는 귀무가설 $H_0^b: \lambda = \lambda_0 | \rho = \rho_0$에서, 표 4.3은 $H_0^c: \rho = 0 | \lambda = \lambda_0$에서 각각의 표본수와 유의수준에 따른 LM_E와 LM_H의 경험적 유의수준이 주어져있다. 표 4.1에서 헤시안을 이용한 검정통계량 LM_H는 과대 각하는 경향을 보인다. 그러나 표본의 수가 커질수록 LM_H도 소표본일 때보다 유의수준이 안정적임을 알 수 있다. 반면 LM_E 검정통계량은 소표본인 경우에도 명목 유의수준을 잘 유지하고 있다. 그러므로 정보행렬을 이용한 검정통계량 LM_E이 더 우수하다고 할 수 있다. 표 4.2에서도 LM_H 검정통계량은 과대기각하는 경향을 보이고 LM_E 검정통계량은 소표본인 경우에도 명목 유의수준을 잘 유지하고 있다. 그러므로 정보행렬을 이용한 검정통계량 LM_E이 더 우수하다고 할 수 있다. 표 4.3에서는 LM_H는 표 4.1과 4.2와

마찬가지로 과대 기각하는 경향을 보이고 있으나 LM_E는 소표본인 경우에 표 4.1과 4.2와는 달리 과소기각하는 경향이 있으나 표본의 수가 커질수록 LM_E 검정통계량은 명목 유의수준을 잘 유지하고 있다. 그러므로 모의실험결과 유의수준을 잘 유지해주는 LM_E 검정통계량을 이용하여 검정을 수행해야함을 알 수있다.

5. 결론

본 연구는 Box-Cox 변환 회귀모형에서 함수형태의 식별과 오차항의 자기상관의 존재에 대한 동시 검정과 오차항에 자기상관이 존재할 때 Box-Cox 변환 회귀모형에 대한 함수형태의 식별을 위한 조건부 검정, Box-Cox 변환모형의 λ값을 알고 있을 때 오차항의 자기상관 의 존재여부에 관한 조건부 검정을 위하여 정보행렬을 이용한 LM_E 검정통계량을 유도하고 헤시안 행렬을 이용한 LM_H 검정통계량과 비교하였다. 모의실험 결과 LM_H 검정통계량은 과대기각하고 있으며 LM_E 검정통계량은 소표본에서도 명목 유의수준을 따름을 알 수 있었다.

부록

1. 헤이시안 행렬의 원소

$$
\begin{aligned}
H_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta} = -\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}'(\lambda)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\lambda) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} (T-2)\rho^2-2(T-1)\rho+T & \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_t-\rho\left(\sum_{t=1}^{T}x_t+\sum_{t=2}^{T-1}x_t\right)+\sum_{t=1}^{T}x_t \\ \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_t-\rho\left(\sum_{t=1}^{T}x_t+\sum_{t=2}^{T-1}x_t\right)+\sum_{t=1}^{T}x_t & \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_t^2-2\rho\sum_{t=2}^{T}x_{t-1}x_t+\sum_{t=1}^{T}x_t^2 \end{bmatrix}, \\
H_{\beta\sigma^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}\mathbf{X}'(\lambda)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}(\lambda,\beta) \\
&= -\frac{1}{\sigma^4}\begin{bmatrix} \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}u_t-\rho\left(\sum_{t=1}^{T}u_t+\sum_{t=2}^{T-1}u_t\right)+\sum_{t=1}^{T}u_t \\ \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_tu_t-\rho\sum_{t=2}^{T}(x_{t-1}u_t+x_tu_{t-1})+\sum_{t=1}^{T}x_tu_t \end{bmatrix}, \\
H_{\beta\rho} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\rho} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}'(\lambda)\boldsymbol{\Omega}_\rho^{-1}\mathbf{u}(\lambda,\beta) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 2\rho\sum_{t=2}^{T-1}u_t-\sum_{t=1}^{T}u_t-\sum_{t=2}^{T-1}u_t \\ 2\rho\sum_{t=2}^{T-1}x_tu_t-\sum_{t=2}^{T}(x_{t-1}u_t+x_tu_{t-1}) \end{bmatrix}, \\
H_{\beta\lambda} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\lambda} = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\mathbf{X}'_\lambda(\lambda)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}(\lambda,\beta)+\mathbf{X}'(\lambda)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}(u_t+u_{\lambda t})-\rho\left(\sum_{t=1}^{T}(u_t+u_{\lambda t})+\sum_{t=2}^{T-1}(u_t+u_{\lambda t})\right)+\sum_{t=1}^{T}(u_t+u_{\lambda t}) \\ \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}(x_{\lambda t}u_t+x_tu_{\lambda t})-\rho\sum_{t=2}^{T}(x_{\lambda t-1}u_t+x_{\lambda t}u_{t-1}+x_{t-1}u_{\lambda t}+x_tu_{\lambda t-1}) \\ +\sum_{t=1}^{T}(x_{\lambda t}u_t+x_tu_{\lambda t}) \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
H_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2} = \frac{T}{2\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6}\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}(\lambda,\beta) \\
&= \frac{T}{2\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6}\left\{\rho^2\sum_{t=2}^{T-1}u_t^2-2\rho\sum_{t=2}^{T}u_{t-1}u_t+\sum_{t=1}^{T}u_t^2\right\}, \\
H_{\sigma^2\rho} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\sigma^2\partial\rho} = \frac{1}{2\sigma^4}\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}_\rho^{-1}\mathbf{u}(\lambda,\beta) = \frac{1}{\sigma^4}\left\{\rho\sum_{t=2}^{T-1}u_t^2-\sum_{t=2}^{T}u_{t-1}u_t\right\}, \\
H_{\sigma^2\lambda} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\sigma^2\partial\lambda} = \frac{1}{\sigma^4}\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta) \\
&= \frac{1}{\sigma^4}\left\{\rho^2\sum_{t=2}^{T-1}u_tu_{\lambda t}-\rho\sum_{t=2}^{T}(u_{t-1}u_{\lambda t}+u_tu_{\lambda t-1})+\sum_{t=1}^{T}u_tu_{\lambda t}\right\}, \\
H_{\rho\rho} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\rho\partial\rho} = -\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}_{\rho\rho}^{-1}\mathbf{u}(\lambda,\beta) = -\frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2}-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{T-1}u_t^2, \\
H_{\rho\lambda} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\rho\partial\lambda} = -\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}_\rho^{-1}\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\left\{2\rho\sum_{t=2}^{T-1}u_tu_{\lambda t}-\sum_{t=2}^{T}(u_{t-1}u_{\lambda t}+u_tu_{\lambda t-1})\right\}, \\
H_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial\lambda} = -\frac{1}{\sigma^2}\left\{\mathbf{u}'_\lambda(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta)+\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_{\lambda\lambda}(\lambda,\beta)\right\} \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\left\{\rho^2\sum_{t=2}^{T-1}\left(u_{\lambda t}^2+u_tu_{\lambda\lambda t}\right)-2\rho\sum_{t=2}^{T}u_{\lambda t-1}u_{\lambda t}-\rho\sum_{t=2}^{T}(u_{t-1}u_{\lambda\lambda t}+u_tu_{\lambda\lambda t-1})\right. \\
&\qquad \left.+\sum_{t=1}^{T}\left(u_{\lambda t}^2+u_tu_{\lambda\lambda t}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

여기에서

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(\lambda,\beta) &= h(\mathbf{Y},\lambda)-\mathbf{X}(\lambda)\beta, \\
\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta) &= h_\lambda(\mathbf{Y},\lambda)-\mathbf{X}_\lambda(\lambda)\beta, \\
\mathbf{u}_{\lambda\lambda}(\lambda,\beta) &= h_{\lambda\lambda}(\mathbf{Y},\lambda)-\mathbf{X}_{\lambda\lambda}(\lambda)\beta.
\end{aligned}
$$

이고, $\Omega_\rho^{-1} = \partial\Omega^{-1}/\partial\rho$, $\Omega_{\rho\rho}^{-1} = \partial^2\Omega^{-1}/\partial\rho\partial\rho$로 다음과 같다.

$$\Omega_\rho^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2\rho & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\rho & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{\rho\rho}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. 정보행렬의 원소

$$\begin{aligned}
I_{\beta\beta} &= \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}'(\lambda)\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}(\lambda) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} (T-2)\rho^2-2(T-1)\rho+T & \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_t-\rho\left(\sum_{t=1}^{T}x_t+\sum_{t=2}^{T-1}x_t\right)+\sum_{t=1}^{T}x_t \\ \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_t-\rho\left(\sum_{t=1}^{T}x_t+\sum_{t=2}^{T-1}x_t\right)+\sum_{t=1}^{T}x_t & \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_t^2-2\rho\sum_{t=2}^{T}x_{t-1}x_t+\sum_{t=1}^{T}x_t^2 \end{bmatrix}, \\
I_{\beta\sigma^2} &= 0, \\
I_{\beta\rho} &= 0, \\
I_{\beta\lambda} &= -\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}'(\lambda)\mathbf{\Omega}^{-1}E\left[\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta)\right] \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}E\left[u_{\lambda t}\right]-\rho\left(\sum_{t=1}^{T}E\left[u_{\lambda t}\right]+\sum_{t=2}^{T-1}E\left[u_{\lambda t}\right]\right)+\sum_{t=1}^{T}E\left[u_{\lambda t}\right] \\ \rho^2\sum_{t=2}^{T-1}x_tE\left[u_{\lambda t}\right]-\rho\sum_{t=2}^{T}\left\{x_{t-1}E\left[u_{\lambda t}\right]+x_tE\left[u_{\lambda t-1}\right]\right\}+\sum_{t=1}^{T}x_tE\left[u_{\lambda t}\right] \end{bmatrix}, \\
I_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{T}{2\sigma^4}, \\
I_{\sigma^2\rho} &= \frac{\rho}{\sigma^2(1-\rho^2)}, \\
I_{\sigma^2\lambda} &= -\frac{1}{\sigma^4}E\left[\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta)\right] \\
&= -\frac{1}{\sigma^4}\left\{\rho^2\sum_{t=2}^{T-1}E\left[u_tu_{\lambda t}\right]-\rho\sum_{t=2}^{T}\left\{E\left[u_{t-1}u_{\lambda t}\right]+E\left[u_tu_{\lambda t-1}\right]\right\}+\sum_{t=1}^{T}E\left[u_tu_{\lambda t}\right]\right\}, \\
I_{\rho\rho} &= \frac{(3-T)\rho^2+T-1}{(1-\rho^2)^2}, \\
I_{\rho\lambda} &= \frac{1}{\sigma^2}E\left[\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\mathbf{\Omega}_\rho^{-1}\mathbf{u}_\lambda(\lambda,\beta)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left\{2\rho\sum_{t=2}^{T-1}E\left[u_tu_{\lambda t}\right]-\sum_{t=2}^{T}\left\{E\left[u_{t-1}u_{\lambda t}\right]+E\left[u_tu_{\lambda t-1}\right]\right\}\right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{\sigma^2}\left\{E\left[\mathbf{u}'_{\lambda}(\lambda,\beta)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_{\lambda}(\lambda,\beta)\right]+E\left[\mathbf{u}'(\lambda,\beta)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}_{\lambda\lambda}(\lambda,\beta)\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left\{\rho^2\sum_{t=2}^{T-1}\left\{E\left[u_{\lambda t}^2\right]+E\left[u_t u_{\lambda\lambda t}\right]\right\}-2\rho\sum_{t=2}^{T}E\left[u_{\lambda t-1}u_{\lambda t}\right]\right.\\
&\quad\left.-\rho\sum_{t=2}^{T}\left\{E\left[u_{t-1}u_{\lambda\lambda t}\right]+E\left[u_t u_{\lambda\lambda t-1}\right]\right\}+\sum_{t=1}^{T}\left\{E\left[u_{\lambda t}^2\right]+E\left[u_t u_{\lambda\lambda t}\right]\right\}\right\}.
\end{aligned}
$$

3. 정보 행렬 계산을 위한 원소들의 기대값

i) $\lambda \neq 0$ 일때,

$$
\begin{aligned}
E\left[u_{\lambda t}\right] &= \frac{\phi_t}{\theta_t}-\frac{\eta_t}{\lambda}+\frac{\theta_t}{2\lambda}\omega+\frac{\theta_t^3}{\lambda}\omega^2-\eta_{\lambda t},\\
E\left[u_t u_{\lambda t}\right] &= \phi_t\omega-\frac{\theta_t^2}{2\lambda}\omega^2,\\
E\left[u_t u_{\lambda\lambda t}\right] &= \phi_t^2\omega+\left(\frac{1}{\lambda^2}\theta_t^2-\frac{\phi_t}{\lambda}\theta_t^2\right)\omega^2+\frac{35\theta_t^4}{4\lambda^2}\omega^3+\frac{35\theta_t^6}{3\lambda^2}\omega^4,\\
E\left[u_{\lambda t}^2\right] &= \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\phi_t\lambda}{\theta_t}-\eta_t\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}\left(\phi_t^2\lambda^2+\phi_t\lambda-\frac{\theta_t}{\lambda}-2\eta_t\theta_t+1\right)\omega\\
&\quad+\frac{1}{\lambda^2}\left(\phi_t\lambda\theta_t^2+\frac{35}{4}\theta_t^2-10\eta_t\theta_t^3-\frac{8\theta_t^3}{\lambda}\right)\omega^2\\
&\quad+\frac{65\theta_t^4}{12\lambda^2}\omega^3+\frac{35\theta_t^6}{3\lambda^2}\omega^4-2\eta_{\lambda t}E\left[u_{\lambda t}\right]-\left\{\eta_{\lambda t}\right\}^2,\\
E\left[u_t u_{\lambda t-1}\right] &= \phi_{t-1}\rho\omega-\frac{\theta_{t-1}^2\rho}{2\lambda}\omega^2,\\
E\left[u_{t-1}u_{\lambda t}\right] &= \left(\phi_t\rho-\frac{\rho\sigma^2}{2\lambda}\theta_t^2\right)\omega-\frac{\rho^3}{2\lambda}\theta_t^2\omega^2,\\
E\left[u_{t-1}u_{\lambda\lambda t}\right] &= \left(\phi_t^2\rho+\frac{\rho\sigma^2}{\lambda^2}\theta_t^2-\frac{\phi_t\rho\sigma^2}{\lambda}\theta_t^2+\frac{35\rho\sigma^4}{4\lambda^2}\theta_t^4+\frac{35\rho\sigma^6}{3\lambda^2}\theta_t^6\right)\omega\\
&\quad+\left(\frac{\rho^3}{\lambda^2}\theta_t^2-\frac{\phi_t\rho^3}{\lambda}\theta_t^2+\frac{35\rho^3\sigma^2}{2\lambda^2}\theta_t^4+\frac{35\rho^3\sigma^4}{\lambda^2}\theta_t^6\right)\omega^2\\
&\quad+\left(\frac{35\rho^5}{4\lambda^2}\theta_t^4+\frac{35\rho^5\sigma^2}{\lambda^2}\theta_t^6\right)\omega^3+\left(\frac{35\rho^7}{3\lambda^2}\theta_t^6\right)\omega^4,\\
E\left[u_t u_{\lambda\lambda t-1}\right] &= \left(\phi_{t-1}^2\rho\right)\omega+\left(\frac{\rho}{\lambda^2}\theta_{t-1}^2-\frac{\phi_{t-1}\rho}{\lambda}\theta_{t-1}^2\right)\omega^2+\frac{35\rho}{4\lambda^2}\theta_{t-1}^4\omega^3+\frac{35\rho}{3\lambda^2}\theta_{t-1}^6\omega^4,\\
E\left[u_{\lambda t}u_{\lambda t-1}\right] &= \left(\frac{\phi_t\phi_{t-1}}{\theta_t\lambda}-\frac{\phi_{t-1}\eta_t}{\theta_{t-1}\lambda}-\frac{\phi_t\eta_{t-1}}{\theta_t\lambda}+\frac{\phi_t\phi_{t-1}\eta_{t-1}}{\theta_t}+\frac{\eta_t\eta_{t-1}}{\lambda^2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{\phi_{t-1}\rho\sigma^2}{2\lambda}\theta_t^2+\frac{\phi_{t-1}}{2\lambda^2}\theta_t-\frac{\eta_{t-1}}{2\lambda^2}\theta_t+\frac{\phi_{t-1}\eta_{t-1}}{2\lambda}\theta_t+\frac{\phi_t}{2\lambda^2}\theta_{t-1}-\frac{\eta_t}{2\lambda^2}\theta_{t-1}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\phi_t\eta_t}{2\lambda}\theta_{t-1}+\frac{\sigma^4}{2\lambda^2}\theta_t^3\theta_{t-1}+\frac{\sigma^2}{4\lambda^2}\theta_t\theta_{t-1}+\phi_t\phi_{t-1}\rho\Big)\,\omega \\
&+\left(\frac{\phi_{t-1}}{\lambda^2}\theta_t^3-\frac{\eta_{t-1}}{\lambda^2}\theta_t^3+\frac{\phi_{t-1}\eta_{t-1}}{\lambda}\theta_t^3-\frac{\phi_{t-1}\rho^3}{2\lambda}\theta_t^2+\frac{\phi_t}{\lambda^2}\theta_{t-1}^3-\frac{\eta_t}{\lambda^2}\theta_{t-1}^3+\frac{\phi_t\eta_t}{\lambda}\theta_{t-1}^3\right. \\
&\left.-\frac{\phi_t\rho}{2\lambda}\theta_{t-1}^2+\frac{\sigma^4}{\lambda^2}\theta_t^3\theta_{t-1}^3+\frac{3\rho^2\sigma^2}{\lambda^2}\theta_t^3\theta_{t-1}+\frac{\rho\sigma^2}{4\lambda^2}\theta_t^2\theta_{t-1}^2+\frac{3\rho^2}{4\lambda^2}\theta_t\theta_{t-1}+\frac{\sigma^2}{2\lambda^2}\theta_t\theta_{t-1}^3\right)\omega^2 \\
&+\left(\frac{10\rho^2\sigma^2}{\lambda^2}\theta_t^3\theta_{t-1}^3+\frac{5\rho^4}{2\lambda^2}\theta_t^3\theta_{t-1}+\frac{5\rho^3}{12\lambda^2}\theta_t^2\theta_{t-1}^2+\frac{5\rho^2}{2\lambda^2}\theta_t\theta_{t-1}^3\right)\omega^3+\frac{35\rho^4}{3\lambda^2}\theta_t^3\theta_{t-1}^3\omega^4 \\
&-\left(\frac{\phi_t}{\theta_t}-\frac{\eta_t}{\lambda}+\frac{\theta_t}{2\lambda}\omega+\frac{\theta_t^3}{\lambda}\omega^2\right)\eta_{\lambda t-1}-\left(\frac{\phi_{t-1}}{\theta_{t-1}}-\frac{\eta_{t-1}}{\lambda}+\frac{\theta_{t-1}}{2\lambda}\omega+\frac{\theta_{t-1}^3}{\lambda}\omega^2\right)\eta_{\lambda t}+\eta_{\lambda t}\eta_{\lambda t-1}.
\end{aligned}
$$

ii) $\lambda=0$ **일때,**

$$
\begin{aligned}
E[u_{\lambda t}] &= \frac{1}{2}\eta_t^2+\frac{1}{2}\omega-\eta_{\lambda t}, \\
E[u_t u_{\lambda t}] &= \eta_t\omega, \\
E[u_t u_{\lambda\lambda t}] &= \eta_t^2\omega+\omega^2, \\
E[u_{\lambda t}^2] &= \frac{1}{4}\eta_t^4+\frac{3}{2}\eta_t^2\omega+\frac{3}{4}\omega^2-\eta_{\lambda t}\eta_t^2-\eta_{\lambda t}\omega+\eta_{\lambda t}^2, \\
E[u_t u_{\lambda t-1}] &= \eta_{t-1}\rho\omega, \\
E[u_{t-1} u_{\lambda t}] &= \eta_t\rho\omega, \\
E[u_{t-1} u_{\lambda\lambda t}] &= \eta_t^2\rho\omega+\rho^3\omega^2+\rho\sigma^2\omega, \\
E[u_t u_{\lambda\lambda t-1}] &= \eta_{t-1}^2\rho\omega+\rho\omega^2, \\
E[u_{\lambda t} u_{\lambda t-1}] &= \frac{1}{4}\left[\eta_t^2\eta_{t-1}^2+\eta_t^2\omega+4\eta_t\eta_{t-1}\rho\omega+\eta_{t-1}^2\omega+3\rho^2\omega^2+\sigma^2\omega\right]-\frac{1}{2}\eta_{\lambda t-1}(\eta_t^2+\omega) \\
&\quad -\frac{1}{2}\eta_{\lambda t}(\eta_{t-1}^2+\omega)+\eta_{\lambda t}\eta_{\lambda t-1}.
\end{aligned}
$$

여기에서,

$$
\theta_t=\frac{\lambda}{1+\lambda\eta_t},\quad \phi_t=\frac{\log(1+\lambda\eta_t)}{\lambda},\quad \omega=\frac{\sigma^2}{1-\rho^2},\quad \eta_t=\mathbf{x}_t(\lambda)\beta,\quad \eta_{\lambda t}=\mathbf{x}_{\lambda t}(\lambda)\beta.
$$

참고문헌

Baltagi, B. H. (1997). Testing linear and loglinear error components regressions against Box-Cox alternatives, *Statistics & Probability Letters*, **33**, 63–68.

Box, G. E. P. and Cox, D.R. (1964). An analysis of transformations, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **26**, 211–246.

Davidson, R. and MacKinnon, J. G. (1984). Model specification test based on artificial linear regressions, *International Economic Review*, **25**, 485–502.

Davidson, R. and MacKinnon, J. G. (1985). Testing linear and loglinear regression against Box-Cox alternatives, *Canadian Journal of Economics*, **18**, 499–517.
Godfrey, L. G. and Wickens, M. R. (1981). Testing linear and log-linear regressions for functional form, *Review of Economics Studies*, **48**, 487–496.

[2007년 8월 접수, 2007년 10월 채택]

Test of Model Specification in Box-Cox Transformed Regression Model with AR(1) Errors*

Sooyoung Cheon[1) Seok Jin Yoon[2) Sun Young Hwang[3) Seuck Heun Song[4)

ABSTRACT

This paper derives joint and conditional Lagrange multiplier tests based on information matrix for testing functional form and/or the presence of autocorrelation in a regression model. Small sample properties of these tests are assessed by Monte Carlo study and comparisons are made with LM tests based on Hessian matrix. The results show that the proposed LM_E tests have the most appropriate finite sample performance.

Keywords: Box-Cox regression model, model specification, autocorrelation, LM tests.

* This work was supported by (KRF-2005-070-C00022).

1) Post Dr., Dept. of Public Health Scoences, University of Virginia, VA 22908-0717.
E-mail: sc8te@virginia.edu

2) LTD, HANHWA Securities Co, Seoul 150-717, Korea.
E-mail: 200501034@stockoffice.co.kr

3) Professor, Dept. of Statistics,Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea.
E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr

4) Corresponding author. Professor, Dept. of Statistics, Korea University, Seoul 136-701, Korea.
E-mail: ssong@korea.ac.kr