

고유치를 이용한 GRIN 광섬유 내에서의 광파모드의 해석*

손영호**

요약

최근 GRIN 다중모드 광섬유는 광대역 통신선로로써 주목받아왔으며, 광섬유 내부에서 광파의 운동은 모드간 결합, 휨에 의한 손실 등 여러 다른 연구와 맞물려 큰 관심이 되고 있다. 본 논문에서는 기존의 복잡하고 난해한 Bessel 함수를 통한 파동방정식의 해석을 피하고 파동방정식을 고유치문제(Eigenvalue Problem)로 풀이한 수치해석을 통하여, GRIN 광섬유 내에서의 각 광파의 각 의존도와 모드수등을 관찰하였다. 이 연구는 GRIN 광섬유의 다른효과(휨, 모드간 결합) 등의 추후 연구에 유용하게 쓰이리라 생각된다.

Numerical Analysis of Lightwave Modes in GRIN Optical Fibers by Using Eigenvalue

Young-Ho Sohn**

ABSTRACT

Graded-Index Multimode Optical fibers have recently received a lot of attention as regards their application and lightwave behavior in relation to broadband communication links. Accordingly, this article presents a novel lightwave mode analysis that solves the wave equation using a numerical analysis based on an eigenvalue problem method, thereby avoiding the typical complicated Bessel function method. Angular dependences and number of modes were observed as well. Future research implications will be possibly noticed such areas as bending effects and mode coupling analyses through this research.

Key words : GRIN Optical Fiber, Eigenvalue Problem

* 본 연구에 많은 도움을 주셨던 고 Henry Taylor 교수님(전 Texas A&M Univ., ECE Dept. 교수, IEEE Fellow)께 깊은 감사의 뜻을 전한다.

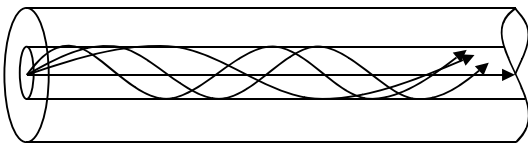
본 논문은 2005학년도 영남대학교 학술연구조성비 지원에 의한 결과물로 작성되었다.

** 영남대학교 전자정보공학부

1. 서 론

오늘날 광대역 정보통신망에 많이 사용되는 광통신 기술은 1970년대 저 손실 광섬유의 출현 이래 매우 빠른 속도로 발전해왔다. 통신선로로서의 광섬유는 기존의 동선에 비해 가볍고, 전자기파의 간섭을 받지 않으며, 열악한 환경이나 기후에도 내구성이 강하다는 큰 장점을 가지고 있다[1]. 또한 광섬유를 이용한 통신은 기존의 통신방식에 비해서 많은 양의 데이터를 먼 거리까지 빠르게 잘 전달할 수 있어서 매우 각광 받아왔다.

다중모드 광섬유(MMF : Multimode Fiber)중에서도 GRIN(Graded Index) 광섬유는 모드간 분산 문제등으로 인해 대부분의 통신선로에서 SI(Step Index) 광섬유보다 널리 쓰이고 있으며 (그림 1)은 GRIN 광섬유 내부에서 여러모드의 광파의 움직임을 보여주고 있다. 그동안 많은 학자들은 휨, 감청등으로부터 보다 안정된 통신선로로서의 GRIN 광섬유에 대한 연구를 다양하게 진행하였다[2~8], 이중 일부 연구는 광섬유의 대역폭 및 휨에 의한 손실등을 모드간 결합문제등으로 다루기도 하였는데[2, 3, 5~7], 모드간 결합문제등은 광섬유내에서 광파의 전파특성등에 대한 상세한 해석이 동반되어야 할 것이라 생각된다.



(그림 1) GRIN 광섬유 내부에서 광파의 움직임

이에 본 연구에서는 GRIN 다중모드 광섬유 내부에서 광파의 전파특성을 고찰하는데 있어, Bessel 함수 등의 복잡성을 피하고, 해석이 더 간편한 고유치문제로 해결하는 길을 제시하였다. 이는 GRIN 광섬유 내부에서 광파의 전파특성을 고찰하는 추후의 연구 및 휨에 의한 모드간 결합이나 도청방

지등의 안정적인 광정보통신을 위해서도 매우 중요한 일이라 여겨진다.

2. GRIN 광섬유의 도파 특성에 대한 고찰

일반적으로 GRIN 광섬유의 코어·굴절률 분포는 다음과 같이 표현된다[9].

$$n(r) = n_1 [1 - 2(r/a)^p \Delta]^{1/2} \quad (1)$$

여기서, $n(r)$ 은 코어중심으로부터의 반경 r 을 함수로 하는 굴절률 분포이고, n_1 은 코어 중심축에서의 굴절률, a 는 코어의 반경, p 는 굴절률 분포 변화를 나타내는 매개변수, 그리고 Δ 은 굴절률 변화 추이를 나타내는 척도인자이다. 척도인자 Δ 는 아래식과 같이 표현될 수 있다.

$$\Delta = (n_1^2 - n_2^2) / 2n_1^2 \quad (2)$$

여기서, n_2 는 코어와 클래딩 접합점에서의 굴절률이다. 매우 작은 $\Delta n (= n_1 - n_2)$ 을 가진 GRIN 광섬유의 경우, $\Delta = (n_1 - n_2) / n_1$ 으로 고려할 수 있을 것이다. 대부분의 GRIN 광섬유는 포물선 모양의 굴절률 분포를 지니고(e.g. $p=2$), 매우 작은 Δn 에 대해서 식 (1)은

$$n = n_1 - \Delta n (r/a)^2 \quad (3)$$

으로 다시 쓸 수 있을 것이다.

우리는 여기서 GRIN 광섬유 내에서 진행하는 각 모드의 광파에 해당하는 파동방정식의 해를 구하여, 광전파 특성을 살펴보고자 한다.

이전의 Taylor and Asawa 연구[6]에서 다중모드 GRIN 광섬유 내에서 모드결합의 영향에 관심

을 가지고 광파를 분석한 예가 있으나, 광섬유 내에서의 코어의 굴절률 분포 변화(refractive index variation)를 나타내는 식

$$n = n_1 - \Delta n(x^2 + y^2)/a^2 \quad (4)$$

을 편의상 무한 코어(“Infinite core” case)로 가정하고 연구하였다.

하지만, 본 논문에서는 GRIN 광섬유의 실제에 더 가까운 유한 코어(finite core) 경우의 보다 유용한 모델을 제시하고, 광섬유 내에서의 각 모드의 전파특성을 살피고자 한다.

여기에 중점을 두고 이론을 전개하고 수치해석을 통하여 이들을 수량화 할 필요가 있다. 또 이 문제를 분석하기 위해서는 광섬유 내에서 진행되는 각 모드의 광파에 해당하는 파동방정식의 해를 구해 보고자 한다.

유한 코어(finite core) GRIN 광섬유의 굴절률(n) 변화 (refractive index variation)는

$$n = n_1 - \Delta n(x^2 + y^2)/a^2, \quad (5)$$

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$n = n_1 - \Delta n, \quad (6)$$

$$a^2 < x^2 + y^2 < b^2$$

인데, n_1 은 코어의 굴절률이고, a 는 코어의 반경이며, b 는 클래딩을 포함하는 광섬유의 반경이다. 그리고 Δn 은 n 의 변화량이고, x 와 y 는 파동의 전파 방향 z 축에 수직인 축들을 나타낸다.

광섬유내의 광파를 시간에 종속적인 고조파(time-dependent harmonic wave)로 가정했을 경우 파동 방정식은

$$\nabla^2 \psi + n^2 k_0^2 \psi = 0 \quad (7)$$

과 같이 표현할 수 있는데[10], 여기서 ψ 는 파동함수이고 k_0 는 파수(wave number, $= 2\pi/\lambda$)이다. 원

통좌표계 ψ 는 다음과 같은 형태를 지닌다.

$$\psi(r, \theta, z) = u(r, \theta)e^{-i\beta z} \quad (8)$$

여기서 β 는 전파상수(propagation constant)인데, 식 (7)을 다시 쓰면

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2)u = 0 \quad (9)$$

과 같고, 모드장(mode field)을 나타내는 $u_{lm}(r, \theta)$ 는 이 방정식의 해로서

$$u_{lm}(r, \theta) = f_{lm}(r)e^{im\theta} \quad (10)$$

와 같다. 여기서 m 은 임의의 정수이고 l 은 양의 정수이다. f 에 대한 식 (9)는

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{m^2 f}{r^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2)f = 0 \quad (11)$$

이다. 이제 f 는 r 에 대한 함수이므로, 경계조건을 결정할 수 있게 된다. 코어 내부에서는 $f(r) = P(r)e^{-\alpha r^2/2}$ 의 형태로 되는데, 여기서 $P(r)$ 은 r 에 대한 다항식(polynomial)이고,

$$\alpha = (2\pi NA/\lambda a)^{1/2} \quad (12)$$

와 같이 정의되며, 수치구경(NA-Numerical Aperture) 값은

$$NA = (2n_1 \Delta n)^{1/2} \quad (13)$$

로 표현된다.

예를 들어, 만약 NA 가 0.2, $\lambda = 1.3\mu\text{m}$, 그리고 코어의 직경이 $50\mu\text{m}$ ($a = 25\mu\text{m}$)인 경우 $\alpha = 0.196/\mu\text{m}$ 가 된다. 코어 외부에서는, 수정된 형태의 Bessel

함수로 해를 표시하여야 할 것이다.

경계조건은 f 와 f' 가 $r=a$ 에서 연속적이고, $f(b)=0$ 이라고 둔다. 여기서, Bessel 함수는 다루기가 쉽지 않은 관계로 본 논문은 이 식을 풀기 위하여 수치해석을 통한 고유치 문제(eigenvalue problem)로 다룬다[11, 12].

3. 수치해석

각 모드의 크기를 파동 방정식에서 구한 식 (11)을 통해서 구해야 하는데 우리는 미분 방정식을 차분 방정식(difference equation) 형태로 표현한 고유치 문제로 다루기로 한다.

식 (11)을 차분방정식으로 바꾸기 위해서는 연속적인 항의 형태를 이산적인 항의 형태로 바꿔야 할 것이고, 일차 및 이차 도함수는 다음과 같은 형태를 지니게 될 것이다.

$$\left(\frac{df}{dr}\right)_{r_j} = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta r} \tag{14}$$

$$\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right)_{r_j} = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{(\Delta r)^2} \tag{15}$$

여기서, $f_j = f(r_j)$, $f_{j+1} = f(r_j + \Delta r)$, $f_{j-1} = f(r_j - \Delta r)$, 그리고 $r_j = j\Delta r$ 이다. 항들을 정리하고 식 (14)와 식 (15)를 식 (11)의 관련항에 대입하고 다시 정리하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$f_{j+1} = (Q/Q_p) \cdot f_j + (Q_m/Q_p) \cdot f_{j-1} \tag{16}$$

여기서,

$$Q = 2 - n_j \cdot (\Delta r)^2 \tag{17}$$

$$Q_p = 1 + 0.5 \cdot \Delta r / r_j \tag{18}$$

$$Q_m = 0.5 \cdot \Delta r / r_j - 1 \tag{19}$$

이며, $r_j = j\Delta r$ 이다.

위의 식 (16)으로부터 우리는 f_j 와 f_{j-1} 로부터 f_{j+1} 을 계산할 수 있다. 우선 f_0 와 f_1 값을 결정한 다음 $m=0$ 인 경우와 $m \neq 0$ 인 경우에 대해서 각각 처리하고, 이 방정식에서는 $\Delta(\beta^2)$ 을 고유치로 써서 각 모드의 크기를 구할 수 있게 되는데, m 값은 각 의존도(angular dependence)를 나타낸다.

우선, $m=0$ 인 경우, $f(r) = e^{-a^2 r^2}$ 를 시험해(trial solution)로 가정하고 풀이하면, 구해진 두 초기치 f_0 와 f_1 값은 $f_0 = 1$, $f_1 = 1 + C_2(\Delta r)^2$ 를 얻을 수 있고, 여기서 $C_2 = -\frac{\Delta(B^2)}{4}$ 이다. 마찬가지로 $m \neq 0$ 인 경우에 대해서 풀이하면 $f_0 = 0$, $f_1 = (\Delta r)^{m^2}$ 를 얻을 수 있다.

차분방정식 (16)을 풀기 위해서 아래와 같은 순서로 해를 구하게 되며, 프로그램 실행을 통해서 결과를 취득하였다.

1. 충분히 작은 Δr 을 선택하고,
2. 임의의 시험치(trial value) $\Delta(\beta^2)$ 를 정한 다음,
3. $m=0$ 인 경우와 $m \neq 0$ 인 경우에 대해서 두 초기치 f_0 와 f_1 값을 결정한 다음,
4. 식 (16)을 이용하여 $f_2, f_3, f_4 \dots f_N$ 을 구한다. 그리고
5. $|f_N| < \epsilon$ 를 만족시켜주는 고유치 $\Delta(\beta^2)$ 을 찾을 때까지 차분 방정식을 반복해서 실행하게 된다. 여기서 ϵ 은 미리 결정된 아주 작은 값이다.

본 연구에서 Δr 은 $0.1\mu m$, ϵ 은 10^{-7} 으로 놓고 프로그램을 실행하였으며 정확성을 높이기 위해서 고유치의 값을 소숫점 이하 15째자리까지 확대하였다. $\Delta(\beta^2)$ 값이 0.9301 이하인 경우가 코어모드이지만, 모드를 충분히 관찰하기 위하여 $\Delta(\beta^2) \leq 1.05$ 인 경우까지 포함하였다.

다음 표는 프로그램 실행을 통해서 얻어진 m 값에 대한 각각의 고유치들 중 일부($m=0, 5, 12$)이다. 여기서, 각 의존도(angular dependence)를 나타내는 m 값 이외에도, l 값은 영점 교차수(zero crossing)를,

그리고 흐려진 부분은 클래딩 모드에 해당하는 값들을 나타낸다.

본 연구에서는 코어모드가 없어지는 m 값까지에 대해서 실행을 반복하였고, 코어모드를 충분히 보기 위하여 클래딩 모드의 값이 나타나더라도 더 큰 고유치에 대해서도 실행함으로써 정확성을 기하고자 하였다. 프로그램 실행결과 m 값이 12인 경우 모든 값이 클래딩모드로 나타나서 더 이상의 프로그램 수행을 확대하지 않았다.

〈표 1〉 $m = 0$ 일때의 고유치들

m	l	$\Delta(\beta^2)$
0	0	0.077332777422409
	1	0.231975846260003
	2	0.386601887112045
	3	0.541329441956863
	4	0.695660341788819
	5	0.849650551646499
	6	0.939914449627332
	7	0.949650551646499
	8	0.978775678433705
	9	1.018705678433705

〈표 2〉 $m = 5$ 일때의 고유치들

m	l	$\Delta(\beta^2)$
5	0	0.463996664534454
	1	0.618615219379272
	2	0.773018774224090
	3	0.927993329068908
	4	0.947983329068908
	5	0.967993329068908
	6	1.000203329068908

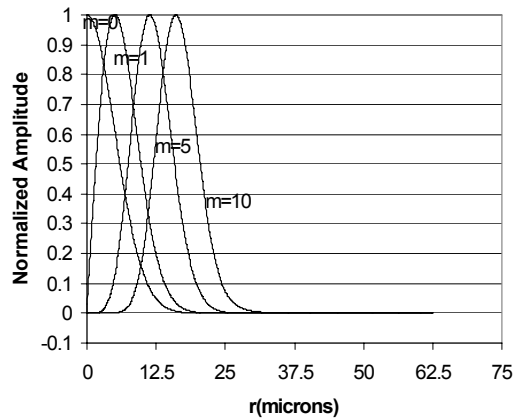
〈표 3〉 $m = 12$ 일때의 고유치들

m	l	$\Delta(\beta^2)$
12	0	0.999726095481317
	1	1.005779106491317

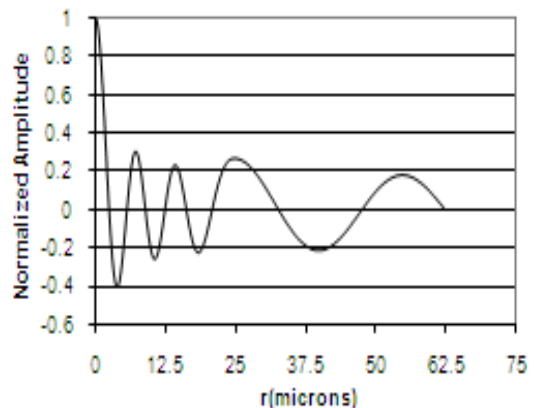
4. 결 과

다음 그림들은 위의 고유치를 가지고 얻은 표준화된 각 모드의 크기 vs. 코어의 중심으로부터의 반경과의 관계를 보여주고 있다. 각각의 그림에서 $r=25\mu\text{m}$ 인 점이 코어와 클래딩의 경계면이다.

(그림 2)는 0점 교차가 없는 경우의 일부 표준화된 모드장의 크기를 나타내고 있으며, 그림에서 관찰할 수 있듯이 m 값(각 의존도)이 증가함에 따라서 모드의 크기가 클래딩과의 경계면 쪽으로 이동함을 알 수가 있다.



(그림 2) 0점 교차가 없는 경우의 모드장 크기



(그림 3) 클래딩모드가 있는 경우의 모드장 크기

(그림 3)의 경우는 $r=25\mu\text{m}$ 지점 밖에서 일부 모드가 나타남을 볼 수가 있는데 이들이 클래딩모드를 나타낸다.

5. 결 론

본 연구를 통하여 우리는 수치해석으로 GRIN 다중모드 광섬유 내에서의 광파모드의 동작 특성을 관찰할 수 있었다. 이는 Bessel 함수의 복잡함을 피하고도 광파의 운동을 관찰할 수 있었고, 고유치 문제를 통한 해석의 유용함을 입증하였다. 또한, 코어의 중심축으로부터 $0.1\mu\text{m}$ 씩 나뉜 반경에 대하여 각각의 각 의존도와 모드수를 더불어 관찰할 수 있었다.

특히, 본 연구는 저자가 지속적으로 연구중인 안정적인 통신을 위한 광섬유의 휨 효과(Bending Effect) 및 모드간 결합해석(Coupled Mode Analysis) 등의 연구에 기초연구로 유용하게 사용될 수 있으리라 보여진다.

참 고 문 헌

- [1] H. Zanger and C. Zanger, Fiber Optics Communication and Other Applications, New York : Maxwell Macmillan, 1991.
- [2] T. Ishigure, Y. Aruga, and Y. Koike, "High-Bandwidth PVDF-Clad GI POF With Ultra-Low Bending Loss", Journal of Lightwave Technology, Vol. 25, No. 1, pp. 335-345, Jan. 2007.
- [3] K. Ohdoko, T. Ishigure, and Y. Koike, "Propagating Mode Analysis and Design of Waveguide Parameters of GI POF for very short-Reach Network Use", IEEE Photonics Technology Letter, Vol. 17, No. 1, pp. 79-81, Jan. 2005.
- [4] C. K. Asawa, "Intrusion-alarmed fiber optic communication link using a planar waveguide bimodal launcher", Journal of Lightwave Technology, Vol. 20, No. 1, pp. 10-18, Jan. 2002.
- [5] J. Arrue, J. Zubia, G. Durana, and J. Mateo, "Parameters Affecting Bending Losses in Graded-Index Polymer Optical Fibers", IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics, Vol. 7, No. 7, pp. 836-844, September/October 2001.
- [6] C. K. Asawa and H. F. "Taylor Propagation of light trapped within a set of lowest-order modes of graded-index multimode fiber undergoing bending", Journal of Applied Optics, Vol. 39, No. 13, pp. 2029-2037, May 2000.
- [7] D. Donlagic and B. Culshaw, "Propagation of the Fundamental Mode in Curved Graded Index Multimode Fiber and Its Application in Sensor System", Journal of Lightwave Technology, Vol. 18, No. 3, pp. 334-342, March 2000.
- [8] G. C. Papen and G. M. Murphy, "Modal noise in multimode fibers under restricted launch conditions", Journal of Lightwave Technology, Vol. 17, No. 5, pp. 817-822, May 1999.
- [9] J. C. Palais, Fiber Optic Communications, 4th edition, Upper Saddle River, New Jersey Prentice Hall, 1998.
- [10] P. Banerjee and T.-C. Poon, Principles of Applied Optics, Boston, Massachusetts : Aksen Associates Inc., 1991.
- [11] C. H. Edwards Jr. and D. E. Penney, Differential Equations and Boundary Value Problems : Computing and Modeling, Englewood

Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, 1996.

- [12] D. U. Von Rosenberg, Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations, New York : American Elsevier Pub. Co., 1969.



손영호

1989년 경북대학교 전자공학과
(공학사)

2002년 ECE Dept., Texas
A&M Univ.(공학박사).

2002년~2005년 영남대학교
전자정보공학부 객원교수

2005년~현재 영남대학교 전자정보공학부 조교수