

# 중동력을 받는 티모센코 보의 안정성에 미치는 크랙과 끝질량의 영향

손인수<sup>#</sup>, 윤한익<sup>\*</sup>, 안태수<sup>\*\*</sup>

## Effects of Crack and Tip Mass on Stability of Timoshenko Beam Subjected to Follower Force

In Soo Son<sup>#</sup>, Han Ik Yoon<sup>\*</sup> and Tae Soo Ahn<sup>\*\*</sup>

### ABSTRACT

In this paper, the stability of a cracked cantilever Timoshenko beam with a tip mass subjected to follower force is investigated. In addition, an analysis of the flutter instability(flutter critical follower force) and a critical natural frequency of a cracked cantilever Euler / Timoshenko beam with a tip mass subjected to a follower force is presented. The vibration analysis on such cracked beam is conducted to identify the critical follower force for flutter instability based on the variation of the first two resonant frequencies of the beam. Therefore, the effect of the crack's intensity, location and a tip mass on the flutter follower force is studied. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations.

**Key Words** : Timoshenko Beam Theory (티모센코 보 이론), Stability (안정성), Follower Force (중동력), Tip Mass (끝질량), Open Crack (개구형 크랙)

### 1. 서론

집중 중동력(concentrated follower force)을 받는 보의 동적 안정성에 대한 연구는 오랜 기간 동안 많은 연구자들로부터 연구되어져 왔다.<sup>1,2</sup> 이러한 중동력을 받는 보의 동적 안정성 해석은 비보존계의 안정성 문제로서 그 대표적인 예로 Beck<sup>1</sup>의 기동문제와 중동력으로 모델링 되어지는 미사일의 추력등에 의한 구조물의 불안정성 등을 들 수 있

다. 또, 구조손상의 하나인 크랙은 구조물의 진동 특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴를 유발하는 주요 원인이 된다. 따라서 크랙을 가지는 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안전진단 및 사고예방을 위해 중요한 문제라고 할 수 있다. 일반적으로 구조물에 크랙 형태의 결함이 존재하는 경우 그 부분의 강성이 저하되는 경향을 보인다. 크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 구조물에서 단지 크랙

☞ 접수일: 2007년 10월 16일; 게재승인일: 2008년 3월 21일

# 교신저자: 동의대학교 기계공학과

E-mail: isson92@deu.ac.kr Tel. (051) 890-2239

\* 동의대학교 기계공학과

\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법에서 출발하여, 최근에는 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 파괴역학적 변수를 계산하여 유연행렬을 구하고, 그 유연행렬을 적용하는 해석방법을 주로 사용하고 있다.<sup>3</sup> 이처럼 보의 끝에 집중 중동력이 작용하고, 크랙이 존재하는 경우는 계의 불안정에 큰 영향을 미치는 중동력과 크랙의 두 요소를 모두 포함하고 있으므로 이들의 연성관계에 의한 계의 동적특성 및 안정성을 파악하는 것은 공학적으로 매우 흥미로운 문제가 된다. 크랙과 중동력을 고려한 연구로서는 양단 자유 보를 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 해석과 크랙의 위치에 따라 계의 불안정을 일으키는 플러터 임계하중을 계산한 연구결과들이 있다.<sup>4,5</sup> 또 Wang<sup>6</sup>은 압축 중동력을 받는 탄성 지지된 외팔 보의 안정성에 미치는 크랙의 영향에 대하여 연구하기도 하였다. 끝질량을 가진 크랙 보에 대한 연구는 Dado<sup>7</sup> 등에 의해 끝질량 및 그 회전 관성모멘트가 크랙 외팔보의 횡방향 및 축방향 고유진동수에 미치는 영향에 대한 연구를 수행하였다. 최근 Euler 보 이론을 적용하여 끝질량과 중동력을 가진 크랙 외팔보의 안정성 해석에 관한 연구결과도 발표되었다.<sup>8</sup> 또 끝질량을 갖고 중동력을 받는 외팔 티모센코 보가 부분적인 탄성기초 위에 놓여 있는 경우, 그 탄성기초가 계의 동적 안정성에 미치는 영향에 관한 연구도 진행되었다.<sup>9</sup> 최근에도 크랙을 가진 티모센코 보의 자유진동에 대한 여러 연구결과들이 발표되어지고 있다.<sup>10,11</sup>

하지만 이들의 연구들은 대부분 크랙의 영향에 의한 계의 고유진동수 변화 및 동적특성에 관한 연구들이었으며 크랙과 끝질량이 중동력을 받는 계의 안정성에 미치는 영향에 대한 연구결과는 드문 실정이다. 따라서 이 연구에서는 중동력을 받는 티모센코 보에 크랙과 끝질량이 존재할 때 크랙(크기 및 위치)과 끝질량이 보의 횡방향 고유진동수 및 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계 중동력에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 크랙은 비진전, 개구형 크랙이라 가정하였다.

## 2. 시스템 모델링

Fig. 1은 본 연구에서 해석 예제로 가정한 끝질량과 중동력을 갖는 크랙을 가진 외팔보의 개략도를 나타낸 것이다. 여기서  $P$ 와  $M$ 은 각각 집중

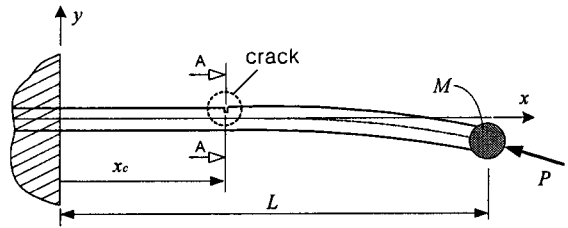


Fig. 1 Mathematical model of cracked beam subjected to follower force

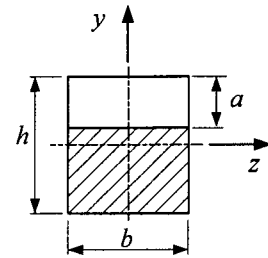


Fig. 2 Cross section of beam 'A-A'

중동력과 끝질량을 의미하며,  $L$ 과  $x_c$ 는 외팔보의 전체 길이와 크랙의 위치 즉, 보 고정단에서부터의 거리를 각각 나타낸다. Fig. 2에서  $b$ 는 보 단면의 가로, 혹은 크랙의 횡방향 길이를 의미하며,  $h$ 와  $a$ 는 각각 보 단면의 높이와 크랙의 크기이다.

### 2.1 크랙 모델링

구조물에서 동일한 하중이 작용한다고 하더라도 크랙이 존재하는 경우에 그 구조물의 자체 탄성 변형 에너지 이외에도 크랙에 의하여 추가적인 에너지 및 변형이 존재한다. Castigliano의 정리를 이용하면 크랙으로 인하여 부가되는 추가 에너지의 유연행렬을 구할 수 있으며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C = 6\pi(1-\nu^2)H \int_0^{\alpha} [\alpha F_1^2(\alpha)] d\alpha \quad (1)$$

여기서  $\nu$ 는 포아송 비이고, 식 (1)에 사용된 무차원 매개변수와  $F_1(\alpha)$ 는 각각 다음과 같다.

$$H = \frac{h}{L}, \quad \alpha = \frac{a}{h} \quad (2)$$

$$F_r(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left[ 0.923 + 0.1999 \left\{ 1 - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right\}^4 \right]}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (3)$$

해석에 필요한 무차원 스프링 상수( $k_r$ )는 식 (1)의 역수, 즉  $k_r = C^{-1}$ 이다.

### 2.2 중동력을 받는 티모센코 보

크랙과 끝질량을 가진 외팔보의 안정성 해석을 위하여 먼저 중동력을 받는 외팔보의 일반적 해석을 수행한다. 자유진동에 대하여 티모센코 보 이론을 적용한 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa GA \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \psi(x,t) \right) - \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

$$\kappa GA \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

여기서  $y(x,t)$ 는 횡방향 변위,  $\psi(x,t)$ 는 전단변형,  $\kappa$ 는 전단계수이다. 또,  $A$ 와  $G$ 는 각각 보의 단면적과 전단탄성계수를 나타내고 있다.  $m$ 은 보의 단위길이당 질량이며,  $E$ 와  $I$ 는 각각 영계수와 단면 2차 모멘트를 나타낸다. 식 (4), (5)로부터  $\psi(x,t)$ 를 소거시키면 다음과 같이 횡변위에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.<sup>11</sup>

$$EI \left( 1 - \frac{P}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho I \left[ 1 + \frac{E}{\kappa G} - \frac{P}{\kappa GA} \right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \left[ \rho A + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial t^4} = 0 \quad (6)$$

여기서  $\rho$ 는 보의 밀도이며, 횡변위와 전단변형은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,t) = Y(x)e^{i\omega_f t} \quad (7)$$

$$\psi(x,t) = \phi(x)e^{i\omega_f t} \quad (8)$$

여기서  $\omega_f$ 는 보의 고유진동수이며  $i = \sqrt{-1}$ 를 의미한다. 식 (7)을 식 (4)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Y^{iv} + \left[ \frac{(1 - \omega^2 \beta r)p + \omega^2(\beta + r)}{(1 - p\beta)} \right] Y'' + \frac{\omega^2(\omega^2 \beta r - 1)}{(1 - p\beta)} Y = 0 \quad (9)$$

여기서 ( )'은 무차원 축방향 좌표  $\xi$ 에 대한 미분을 나타내며, 식 (9)에 사용된 각 무차원 파라미터들과 좌표는 다음과 같다.

$$\omega^2 = \frac{mL^4 \omega_f^2}{EI}, \quad \beta = \frac{EI}{\kappa GAL^2}, \quad r = \frac{I}{AL^2}, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (10)$$

식 (9)의 일반해를 구하면 다음과 같다.

$$Y(\xi) = a_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + a_2 \cosh(\lambda_1 \xi) + a_3 \sin(\lambda_2 \xi) + a_4 \cos(\lambda_2 \xi) \quad (11)$$

여기서

$$\lambda_1 = \left[ \frac{\sqrt{k_2 - k_1}}{2} \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \left[ \frac{\sqrt{k_2 + k_1}}{2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

이며,  $k_1$ 과  $k_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$k_1 = \frac{(1 - \omega^2 \beta r)p + \omega^2(\beta + r)}{(1 - p\beta)}, \quad k_2 = k_1^2 - 4\omega^2 \frac{(\omega^2 \beta r - 1)}{(1 - p\beta)} \quad (13)$$

동일한 방법으로 계산을 하면 전단변형에 대해서도 다음과 같이 해를 구할 수 있다.

$$\phi(\xi) = q_1 a_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 a_1 \cosh(\lambda_1 \xi) + q_2 a_4 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 a_3 \cos(\lambda_2 \xi) \quad (14)$$

여기서

$$q_1 = (1 - p\beta)\lambda_1 + \frac{\omega^2\beta}{\lambda_1},$$

$$q_2 = (p\beta - 1)\lambda_2 + \frac{\omega^2\beta}{\lambda_2}$$
(15)

이다. 식 (11), (14)의  $Y(\xi)$  와  $\phi(\xi)$  는 크랙에 의하여 분할되는 각 구간에 대하여 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

I) segment 1: ( $0 \leq \xi \leq \xi_c$ )

$$Y_1(\xi) = A_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_2 \cosh(\lambda_1 \xi) + A_3 \sin(\lambda_2 \xi) + A_4 \cos(\lambda_2 \xi),$$
(16a)

$$\phi_1(\xi) = q_1 A_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_1 \cosh(\lambda_1 \xi) + q_2 A_4 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 A_3 \cos(\lambda_2 \xi)$$
(16b)

II) segment 2: ( $\xi_c \leq \xi \leq 1$ )

$$Y_2(\xi) = A_5 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_6 \cosh(\lambda_1 \xi) + A_7 \sin(\lambda_2 \xi) + A_8 \cos(\lambda_2 \xi),$$
(16c)

$$\phi_2(\xi) = q_1 A_6 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_5 \cosh(\lambda_1 \xi) + q_2 A_8 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 A_7 \cos(\lambda_2 \xi)$$
(16d)

끝질량을 가진 외팔보의 경계조건과 크랙에 의한 분할 구간의 연속조건은 각각 다음과 같다.

$$Y_1(0) = \phi_1(0) = 0,$$

$$\frac{d\phi_2(1)}{d\xi} = 0, \quad \frac{dY_2(1)}{d\xi} - \phi_2(1) = \mu\omega^2\beta Y_2(1)$$
(17)

$$Y_1(\xi_c) = Y_2(\xi_c), \quad \frac{\partial^2 Y_1(\xi_c)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 Y_2(\xi_c)}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^3 Y_1(\xi_c)}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 Y_2(\xi_c)}{\partial \xi^3},$$
(18)

$$k_R [\phi_2(\xi_c) - \phi_1(\xi_c)] = \frac{\partial \phi_2(\xi_c)}{\partial \xi}$$

식 (17), (18)에 사용된 무차원 매개변수와 좌표는 다음과 같다.

$$\mu = \frac{M}{mL}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}$$
(19)

식 (16)의 미지수들은 식 (17), (18)의 경계조건과

연속조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 또 계의 고유진동수는 다음과 같은 고유치의 기본 형태로 변환하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad |\Lambda| = 0$$
(20)

여기서  $\Lambda$  는 식 (17), (18)의 경계조건 및 크랙 위치에서의 연속조건을 대입하여 얻은 각각의 식을 행렬형태로 표현한 것이다. 또  $|\Lambda|$  는  $\Lambda$  의 행렬식을 나타내고 있으며,  $\mathbf{X}$  는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6 \ A_7 \ A_8]^T$$
(21)

여기서 위첨자 T는 전치를 의미한다.

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식과 진동수 방정식을 이용하여 계의 플러터 불안정을 유발하는 중동력의 임계값(플러터 임계 중동력) 및 크랙의 영향에 의한 티모셴코 보의 고유진동수를 구하고 고찰하였다. 일반적으로 중동력을 받는 외팔보에서 중동력이 증가할수록 1 차 모드 고유진동수는 서서히 증가하고, 2 차 모드 고유진동수는 감소한다.<sup>2</sup> 이 두 모드의 고유진동수가 일치하는 점의 중동력 값이 바로 그 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계 중동력( $p_{cr}$ )이며, 이때 고유진동수를 임계 고유진동수( $\omega_{cr}$ )라 하였다. 또 이 연구의 수치해석 예제에서  $E/(\kappa G) = 3.20$  을 사용하였다.<sup>12</sup>

Fig. 3 은 끝질량이 없는 경우 크랙의 크기와 위치 변화에 따른 계의 임계 중동력을 나타낸 것이다. Fig. 3(a)는 크랙이 존재하는 위치 0.4 일 때 크랙의 깊이 변화에 따른 보의 임계 중동력을 참고문헌 (8)의 오일러 보 이론으로 구한 결과와 비교하여 도시하였다. 크랙의 크기와 임계 중동력은 서로 비례적인 경향을 나타낸다. 크랙이 존재하지 않는 경우의 임계 중동력 값은 오일러 보인 경우 20.05<sup>1,2</sup> 이며, 티모셴코 보인 경우는 18.47 이다. 전반적으로 오일러 보에 비해 티모셴코 보의 플러터 임계 중동력 값은 약 7~8% 정도 낮은 값을 가진다. Fig. 3(b)는 크랙의 크기가 0.5 로 일정한 경우에 크랙의 위치변화에 따른 보의 임계 중동력의 변화를 보여준다. 오일러 보인 경우 크랙의 위치가 0.34

일 때 최대 임계 종동력(23.8)을 나타내고, 티모센코 보에서는 크랙의 위치가 0.35 일 때 최대 임계 종동력(21.95)을 가진다. 이처럼 크랙의 위치가 비교적 앞부분에 존재하는 경우 최대 임계 종동력이

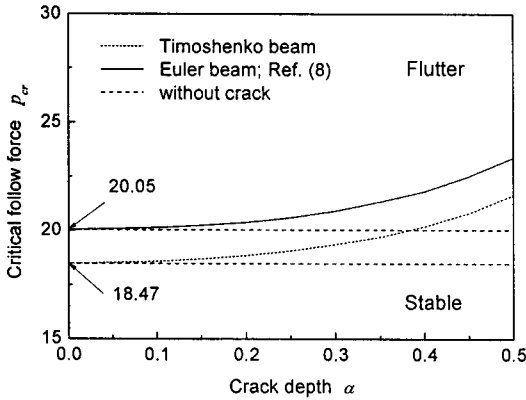


Fig. 3(a) Stability of cracked beam subjected to follower; effect of crack depth ( $\mu = 0, \xi_c = 0.4$ )

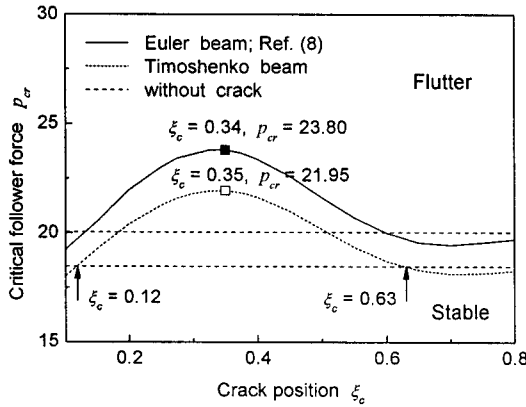


Fig. 3(b) Stability of cracked beam subjected to follower; effect of crack position ( $\mu = 0, \alpha = 0.5$ )

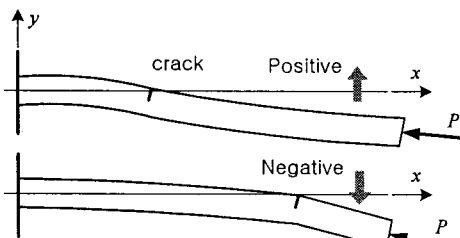


Fig. 4 Crack effect on the mode transition

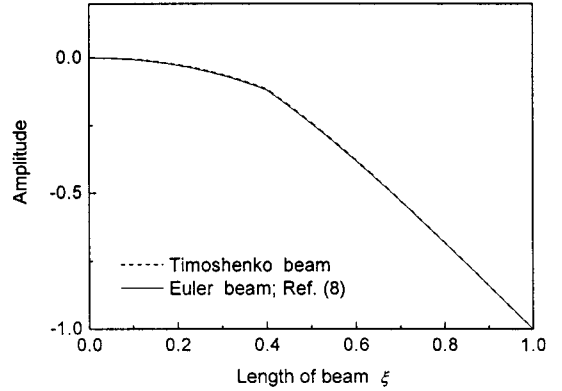


Fig. 5 Mode shape of cracked beam subjected to follower force ( $p = 10, \alpha = 0.5, \xi_c = 0.4$ )

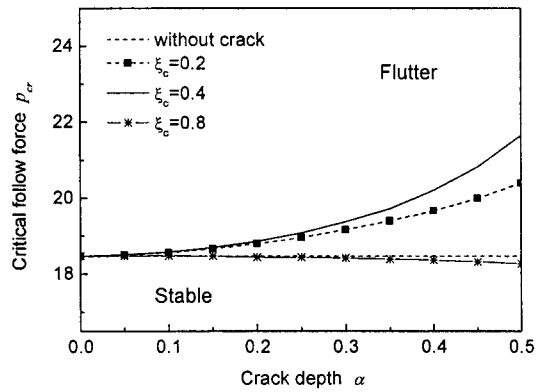


Fig. 6(a) Stability of cracked beam subjected to follower force; effect of crack depth ( $\mu = 0$ )

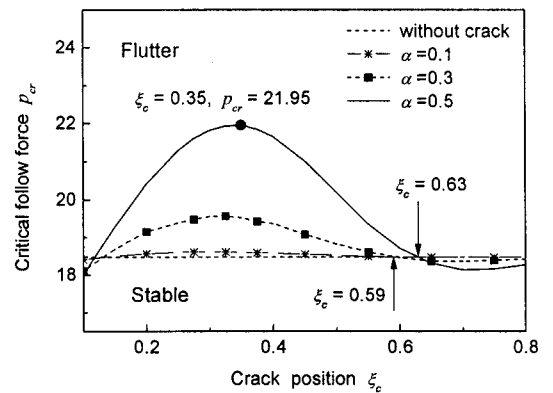


Fig. 6(b) Stability of cracked beam subjected to follower force; effect of crack position ( $\mu = 0$ )

나타나는 이유는 Fig. 4 에서 확인 할 수 있는 것처럼 진동(모드)형상이 크랙의 위치 변화에 의하여 영향을 받기 때문인 것으로 판단된다. 또 티모센코 보인 경우 크랙이 위치하는 범위가  $0.12 \leq \xi_c \leq 0.63$  일 때는 크랙이 존재하지 않는 경우의 임계 종동력에 비하여 더 큰 임계 종동력 값을 가지지만 그 이외의 위치에 크랙이 존재하는 경우는 더 작은 임계 종동력 값을 가짐을 알 수 있다. 이러한 현상은 종동력이 작용하는 경우 외팔보의 모드형상과 곡률(curvature) 모양 변화의 영향에 의한 결과임을 알 수 있다.<sup>6</sup>

Fig. 5 는 보에 작용하는 종동력  $p=10$  인 경우 보의 1 차 진동모드를 정규화하여 나타낸 것이다. 이 때 크랙의 크기와 위치는 각각 0.5 와 0.4 로서 오일러 보와 티모센코 보는 거의 비슷한 크기의 진폭을 가진다. 여기서 오일러 보의 무차원 고유진

동수( $\omega$ )는 4.34, 그리고 티모센코 보의 고유진동수는 4.31 이다.

Fig. 6 은 끝질량이 없는 경우 크랙의 영향에 따른 티모센코 보의 임계 종동력을 나타낸 것이다. Fig. 6(a)에서 크랙의 위치가 0.2, 0.4 인 경우는 크랙이 없는 경우에 비하여 더 큰 임계 종동력을 갖지만 0.8 인 경우는 반대의 경향을 보인다. 이것은 앞서 Fig. 3 에서 설명한 바와 같이 크랙의 위치가 0.8 인 경우 크랙 위치가 0.2, 0.4 일 때와 반대위상의 곡률을 갖기 때문이다. Fig. 6(b)를 살펴보면, 크랙의 크기가 0.5 인 경우 크랙의 위치가 0.63 이상에서, 그리고 크기가 0.3 일 때는 0.59 이상에서 크랙이 없는 경우에 비하여 오히려 더 낮은 임계 종동력을 가진다. 크랙의 크기가 0.5 인 경우 크랙의 위치가 0.35 에서 최대 임계 종동력(21.95)을 가지며, 크랙의 크기에 관계없이 크랙의 위치가 약

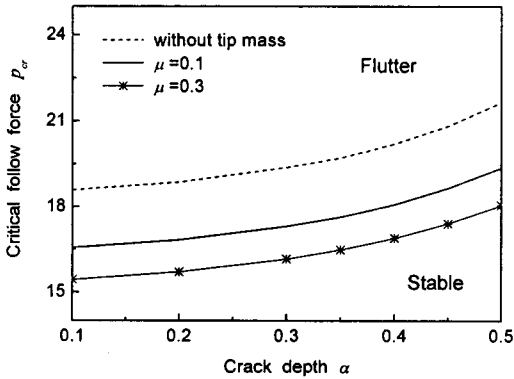


Fig. 7(a) Critical follower force versus crack depth for tip mass ( $\xi_c = 0.4$ )

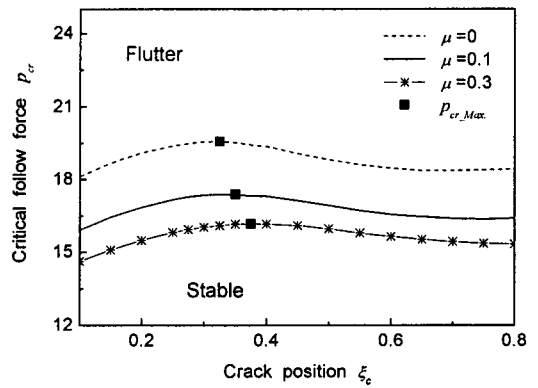


Fig. 8(a) Critical follower force versus crack position for tip mass ( $\alpha = 0.3$ )

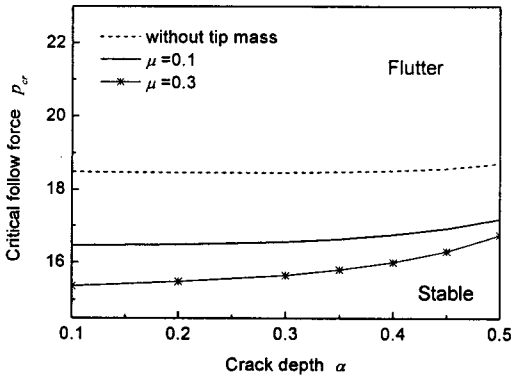


Fig. 7(b) Critical follower force versus crack depth for tip mass ( $\xi_c = 0.6$ )

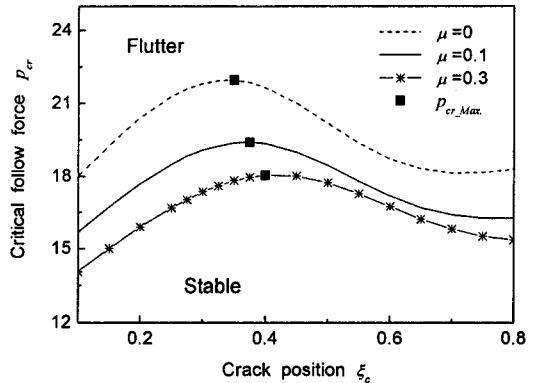


Fig. 8(b) Critical follower force versus crack position for tip mass ( $\alpha = 0.5$ )

Table 1 Critical natural frequency of cracked beam

$\mu$	$\alpha$	$\xi_c$	Critical natural frequency $\omega_{cr}$	
			Euler beam	Timoshenko beam
0	0.1	0.1	10.744	10.305
		0.4	10.755	10.471
		0.7	10.783	10.479
	0.3	0.1	9.745	9.419
		0.4	10.228	9.932
		0.7	10.588	10.299
	0.5	0.1	8.544	8.248
		0.4	10.085	9.299
		0.7	10.158	9.363
0.1	0.1	0.1	9.219	9.076
		0.4	9.160	9.152
		0.7	9.356	9.146
	0.3	0.1	8.387	8.024
		0.4	8.559	8.437
		0.7	8.457	8.449
	0.5	0.1	7.148	7.133
		0.4	8.238	8.186
		0.7	8.113	8.104

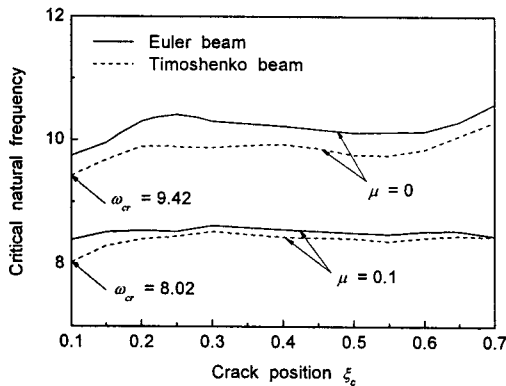


Fig. 9 Critical natural frequency of cracked beam subjected to follower force ( $\alpha = 0.3$ )

$0.3 \leq \xi_c \leq 0.4$  의 범위에서 임계 종동력에 미치는 영향이 가장 크다는 것을 알 수 있다. 즉, 크랙의 위치는 계의 불안정을 유발하는 임계 종동력에 매우 큰 영향을 미친다는 것을 판단할 수 있다.

Figs. 7, 8 은 끝질량이 존재하는 경우 크랙의 영향에 따른 계의 임계 종동력을 나타낸 것이다. 전반적으로 크랙의 영향(크기 및 위치)에 관계없이 끝질량과 임계 종동력은 서로 반비례적인 경향을 보인다. Fig. 7(a)에서 크랙의 크기가 0.4 인 경우에 끝질량이 존재하지 않는 경우에 비하여 끝질량의 크기가 0.1 일 때 약 10.5%, 그리고  $\mu=0.3$  일 때는

약 16.8%정도 더 낮은 임계 종동력을 갖는다.

Fig. 8 은 크랙의 위치와 끝질량의 변화에 따른 외팔보의 임계 종동력의 변화를 도시한 것이다. Fig. 8(a)에서 크랙의 크기와 위치가 각각 0.3, 0.4 인 경우의 결과를 살펴보면, 끝질량이 존재하지 않는 경우에 비하여 끝질량의 크기가 0.1 일 때는 약 10.7%,  $\mu=0.3$  일 때는 약 16.6%정도 더 작은 임계 종동력을 가진다는 것을 알 수 있다. 또 Fig. 8(a), (b)를 서로 비교해 보면, 동일한 끝질량을 가진 경우 크랙의 크기가 클 때 크랙의 위치에 따른 계의 플러터 임계종동력의 변화가 크다는 것을 판단할 수 있다. Fig. 8 에서 ■ 표시는 최대 임계 종동력을 갖는 크랙의 위치를 표현하고 있다. 끝질량의 크기가 증가할수록 최대 임계종동력이 나타나는 크랙의 위치가 보의 후반부로 조금씩 이동된다는 것을 알 수 있다.

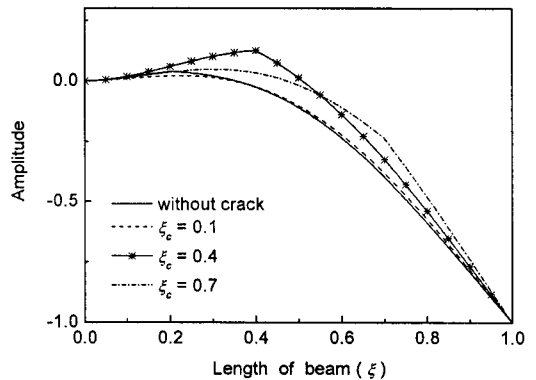


Fig. 10(a) Mode shape of cracked beam with tip mass at critical follower force ( $\alpha = 0.5, \mu = 0.1$ )

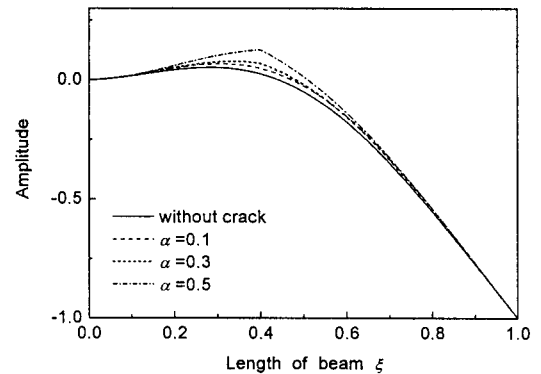


Fig. 10(b) Mode shape of cracked beam with tip mass at critical follower force ( $\xi_c = 0.4, \mu = 0.1$ )

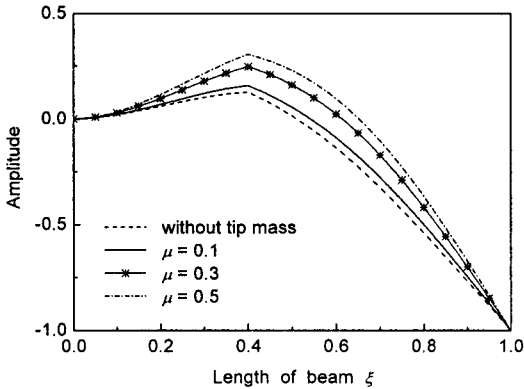


Fig. 11 Mode shape of cracked beam with tip mass at critical follower force ( $\alpha = 0.5, \xi_c = 0.4$ )

Table 1 과 Fig. 9 는 계의 무차원 임계 고유진동수 ( $\omega_{cr}$ ) 에 미치는 끝질량과 크랙의 영향을 나타낸 것이다. 여기서 임계 고유진동수는 플러터 불안정을 유발하는 임계 종동력이 보에 작용할 때의 고유진동수를 의미한다. 끝질량의 크기에 관계없이 크랙의 크기와 계의 임계 고유진동수는 서로 반비례적임을 알 수 있다. 끝질량이 0.1 이고, 크랙의 위치가 0.1 인 티모센코 보인 경우  $a=0.3$  일 때에 비하여 0.5 인 경우 약 3%, 크랙의 위치가 0.7 일 때는 약 4.1% 정도 고유진동수가 감소하였다.

Fig. 9 는 크랙의 크기가 0.3 으로 일정한 경우 크랙의 위치에 따른 계의 임계 고유진동수 변화를 도시한 것이다. 끝질량의 크기와 관계없이 크랙의 위치가 0.1 일 때 고유진동수가 가장 낮게 나타났으며,  $\mu=0.1$  인 경우는 크랙 위치가 0.2 이후는 거의 일정한 임계 고유진동수를 가짐을 알 수 있다.

Fig. 10 은 끝질량의 크기가 0.1 로 일정하고, 플러터 불안정을 일으키는 임계 종동력이 보에 작용할 때 크랙의 크기와 위치의 영향에 의한 보의 정규 진동모드를 나타내었다. 크랙이 존재하는 위치에서 약간의 모드형상의 변화가 생기는 것을 확인할 수 있다. 이러한 현상은 크랙의 위치가 보의 앞부분에 존재할수록, 크랙의 크기가 클수록 더욱 확연히 나타난다. 또 크랙의 크기와 진폭은 서로 비례적인 경향을 가진다.

Fig. 11 은 임계 종동력이 작용하는 경우 끝질량의 영향에 의한 보의 진동모드 형상을 나타낸 것이다. 이 때 크랙의 크기와 위치는 각각 0.5, 그리고 0.4 이다. 끝질량의 영향에 관계없이 전반적으로

동일한 형태의 모드형상을 보이고 있으나, 끝질량의 크기와 보의 진폭은 서로 비례적인 경향을 보임을 알 수 있다.

#### 4. 결론

티모센코 보 이론을 적용하여 크랙과 끝질량을 가진 외팔보에 종동력이 작용하는 경우 계의 안정성, 즉 플러터 임계 종동력과 고유진동수에 미치는 크랙과 끝질량의 영향에 대하여 수치해석하였다. 그 결과를 참고문헌 (8)의 오일러 보의 결과와 비교하였으며, 전반적으로 티모센코 보 이론을 적용한 경우 오일러 보의 결과에 비하여 약 7~8% 정도 낮은 임계 종동력을 가진다. 크랙의 크기가 클수록 플러터 불안정을 유발하는 계의 임계 종동력은 커진다. 하지만 보 위에 크랙이 존재하는 위치가 특정범위에 있을 때 모드형상과 곡률변화의 영향으로 인하여 크랙이 없는 경우보다 오히려 임계 종동력이 작아지는 현상을 보인다. 또 크랙의 위치가 약  $0.3 \leq \xi_c \leq 0.4$  정도의 위치에 존재할 때 크랙이 계의 임계 종동력에 미치는 영향이 가장 크다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과로 미루어 볼 때 크랙이 존재하는 경우 크랙의 위치는 계의 안정성을 확보함에 있어 매우 중요한 파라미터로 작용한다는 것을 판단할 수 있다. 또 크랙의 영향에 관계없이 끝질량의 크기가 커질수록 계의 임계 종동력과 고유진동수는 작아지는 경향을 가지며, 끝질량의 영향에 의해 최대 임계종동력을 갖는 크랙의 위치가 변화한다.

#### 참고문헌

1. Beck, M., "The Buckling Load of a Tangentially Loaded Beam Clamped on One Side," *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 3, pp. 225-228, 1952.
2. Leipholz, H., "Stability Theory," Academic Press, 1970.
3. Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., "Harmonic Analysis of the Vibrations of a Cantilevered Beam with a Closing Crack," *Computers and Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1057-1074, 1996.
4. Takahashi, I., "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force



- with an Axial Force,” *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 23, pp. 3071-3080, 1997.
5. Kim, K. H. and Kim, J. H., “Effect of a Crack on the Dynamic Stability of a Free-Free Beam Subjected to a Follower Force,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 1, pp. 119-135, 2000.
  6. Wang, Q., “A Comprehensive Stability Analysis of a Cracked Beam Subjected to Follower Compression,” *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 18-19, pp. 4875-4888, 2004.
  7. Dado, M. H. F. and Abuzeid, O., “Coupled Transverse and Axial Vibration Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, No. 4, pp. 675-696, 2003.
  8. Son, I. S., Yoon, H. I. and Ahn, T. S., “Stability Analysis of Cracked Beam with Tip Mass and Follower Force,” *Transactions of KSNVE*, Vol. 17, No. 7, pp. 605-610, 2007.
  9. Ryu, B. J., Shin, K. B. and Kim, H. J., “Influence of Partial Elastic Foundations on Dynamic Stability of a Cantilevered Timoshenko Beam with a Tip Mass under a Follower Force,” *Journal of KSPE*, Vol. 22, No. 10, pp. 65-71, 2005.
  10. Zhu, X., Li, T. Y., Zhao, Y. and Liu, J. X., “Structural Power Flow Analysis of Timoshenko Beam with an Open Crack,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, No. 1-2, pp. 215-226, 2006.
  11. Viola, E., Ricci, P. and Aliabadi, M. H., “Free Vibration Analysis of Axially Loaded Cracked Timoshenko Beam Structures Using the Dynamic Stiffness Method,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, No. 1-2, pp. 124-153, 2007.
  12. Harris, C. M., “Shock and Vibration Handbook (Fourth Edition),” McGraw-Hill, Chapter 7, 1961.