한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 1, 133-157, March 2008

한·미·일 수학 교과서에 나타난 대수 개념의 유형 분석

임미란1) · 송영무2)

이 연구는 학교수학의 중심에 놓여있는 대수의 유형을 분류한 여러 이론 중에서 대수의 다양한 의미를 포괄적으로 정의한 Usiskin의 이론을 토대로 한국과 미국 그리고 일본의 교과서 문자와식 영역에 나타난 문항들의 대수개념을 비교분석한 것이다, 이러한 분석에 근거하여 교과서에 있는 문항들이 어떠한 의미를 가지고 서술되어 있는지를 인식한 상태에서 수학수업을 한다면 미약하나마 학교교육의 변화를 유도할 수 있을 것이다.

주요용어 : 문제해결과정, 구조를 표현하는 대수, 양 사이의 관계, 일반화된 산술로서의 대수

I. 서 론

현대수학의 특징 가운데 하나는 수학의 '대수화' 즉, 대수적인 방법으로 수학을 연구하는 것이라 할 수 있다. 이러한 대수는 오늘날 학교수학의 중심에 놓여 있는데, 특히 대수는 기하와 더불어 수학을 대표한다고 할 수 있다.

NCTM(2000)의 ≪Principles and Standards for school mathematics≫에서 제시된 대수 영역의 Standard에서는 '학생들은 여러 가지 패턴, 관계, 함수를 이해할 수 있어야 하고, 대수 기호를 사용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석할 수 있어야 한다. 그리고 수학적 모델을 활용하여 양 사이의 관계를 이해하고 표현할 수 있어야 하고, 변화를 다양한 문맥에서 분석할 수 있어야 한다.'라고 강조하며, 현대수학에서 강조되고 있는 대수 교육의 방향을 제시하고 있다. 이러한 규준은 대수 교육이 한 가지 의미가 아닌 다양한 의미로 인식되어 이루어져야 함을 알 수 있게 해준다.

대수의 의미는 여러 학자들에 의해 문제해결을 위한 도구, 구조를 표현하는 도구, 패턴 및 관계를 나타내기 위한 도구로 변화되어 왔다. 이러한 측면 가운데 어느 하나로 대수를 정의하는 것은 어려움이 있었다. 그래서 그 다양한 측면을 묶어 포괄적으로 정의하려는 움직임이 1990년대 전후에 나타나기 시작했다.

그 중에서도 Usiskin(1988)은 학교 대수를 다양한 측면에서 해석하여 문제해결 과정으로서의 대수, 일반화된 산술로서의 대수, 양 사이의 관계를 나타내는 대수, 구조를 표현하는

1) 순천대학교 교육대학원 (mirani35@nate.com)
2) 순천대학교 (ymsong@sunchon.ac.kr)

대수로 구분하여 정의하고 있다.

그러나 우리나라의 수학과 교육과정에서 대수는 수학적 언어의 규칙(수, 문자, 식)에 대한 이해를 바탕으로 하여 주어진 문제 상황을 간단하게 표현할 수 있는 능력을 기르는 방향으로 도입되고 있다. 그리고 많은 연구들이 학생들의 직관적으로 대수의 구조를 파악하고, 체계적이고 논리적으로 대수적 구조를 파악하여 수학적 사고력을 기를 수 있게 하고자 하는 지도 방법에 대한 연구들이다.(2005, 신만식; 2006, 김혜경) 이러한 연구는 지도 방법에 대한 것이 주를 이루고 있으며, 대수 지도의 기초가 되는 교과서 내용을 구체적으로 분석한 연구는 찾아보기 힘들다. 학교 대수에서 문자 기호의 사용과 조작은 산술과 구분되는 분명한 특징으로 지도되어야 하지만, 더 포괄적인 의미의 대수 학습을 위해서는 약간의 부족한 면이 있다고 보인다.

따라서 본 연구에서는 대수의 유형을 분류한 여러 이론 중, Usiskin의 이론을 토대로 수학 교육과정을 대표하는 교과서에 나타난 문항의 대수 개념을 비교 분석하여 보고자 한다. 그리고 우리나라뿐만 아니라 우리나라와 교육과정이 흡사한 일본의 교과서와 교육과정이 앞서있는 미국의 교과서를 함께 비교·분석하여 동서양의 교과서에서 다루고 있는 문항들의 대수 개념을 분석해 보고자 한다. 분석을 통해 우리나라 중학교 수학 교과서는 대수의 의미를 어떻게 서술하고 있는지 알아보고, 한국과 미국 그리고 일본의 수학 교과서에 나타난 대수 개념은 어떠한 차이를 보이는지 알아보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. Usiskin의 대수 정의

현대대수에서 정의 되어지는 대수의 정의에는 다양한 측면이 포함되어 있으며, 이러한 측면 가운데 어느 한 가지로 대수를 정의하는 것은 힘들다. 이 절에서는 대수의 다양한 측면을 포괄하여 정의한 Usiskin의 이론을 제시하고자 한다.

Usiskin(1988)은 학교 대수를 다양한 측면에서 해석하여 일반화된 산술로서의 대수, 문제 해결 과정으로서의 대수, 양 사이의 관계를 나타내는 대수, 구조를 표현하는 대수로 구분하여 정의하고 있다.

첫째, 대수는 일반화를 시켜주는 언어이다. 만일 어떤 것을 한 번만 한다면 아마 대수학은 필요하지 않을 것이다. 그러나 하나의 과정을 여러 번 되풀이하고 있다면 대수학은 매우 다양한 언어를 제공하여 하나로 묘사하게 해줄 것이다. 패턴의 일반화는 공통적인 속성을 갖는 구체적인 낱낱의 경우들을 동시에 고려하는 과정에서 이루어진다. 특히 대수에서는 수들 사이의 관계를 통합적으로 설명하기 위하여 '임의의 수'를 나타내는 변수를 이용하여 일반화가 이루어진다. 예를 들어, 실수에 대한 덧셈의 교환법칙은 모두 실수에 대한 경우를 포괄적으로 표현하기 위하여 임의의 실수를 나타내는 문자 a, b를 사용하여 식 $a+b=b+a$로 일반화되는 것이다. 또 다른 보기를 들면 분수를 곱하는 규칙을 문장으로 쓴 것은 '두 분수를 곱할 때 분자끼리 곱해서 곱의 분자를 얻고 분모끼리 곱해서 분모를 얻는다.'로 표현 되는데 이것을 대수의 언어로 쓰면 '$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$'처럼 간단할 뿐만 아니라 산술처럼 보인다. 패턴을 일반화하는 개념은 대수적 표현을 의미 있게 받아들여 산술을 보다 수월하게 학습할 수

있게 하는 장점을 지니므로 일찍부터 강조되고 있다.

둘째, 대수는 문제해결 과정이다. 예를 들어, "어떤 수를 5배하여 3을 더하면 40이 된다. 처음에 주어진 어떤 수는 얼마인가?"라는 문제를 해결하는 과정에서 우리는 알고자 하는 어떤 수를 문자 x로 놓고 위의 문제를 $5x+3=4$라는 대수식으로 번역한다. 그리고 난 후 이항과 같은 조작을 통해 또는 해가 될 가능성이 있는 몇 가지 수를 대입해 보는 행위를 통해 문자 x에 대한 값이 실제로 얼마인지를 구한다. 위와 같은 문제해결 과정에서 우리가 궁극적으로 얻고자 하는 것은 주어진 조건에 맞는 미지수의 값이다. 이것은 앞에서 설명한 일반화의 개념과는 근본적으로 다른 것이다. 일반화의 과정에서는 수들 사이에 존재하고 있는 관계를 통합적으로 나타내고자 하는 행위가 중요시될 뿐 조건에 맞는 어떤 수를 찾고자하는 행위는 개입되지 않기 때문이다.

셋째, 대수는 양 사이의 관계를 나타내는 언어이다. 이러한 개념이 앞에서 다룬 두 가지 개념과 구분되는 근본적인 차이는 여기서 말하는 대수는 그 값이 어떠한 관계를 유지하면서 변해간다는 점이다.

여러분이 나이가 듦에 따라, 몸무게가 늘어남에 따라 또는 여러 가지 음식을 먹거나 여러 약을 복용할 때 건강상의 여러 측면에 무엇이 일어나는가? 어떤 공장에서 더 많은 옷을 만든다고 하거나 다른 재료를 쓴다면 옷을 한 벌 짓는데 비용은 얼마나 들게 될 것인가? 여러분이 소비 습관을 바꾼다면 생활에 어떤 영향을 끼칠 것인가? 세계의 인구수는 에너지 사용에 어떻게 영향을 끼치는가? 시간이 지남에 따라 나무는 어떻게 자라는가? 섭씨 온도는 화씨 온도와 어떤 관계를 맺고 있는가?

어떤 양에 대해서 무엇이 일어나는가를 알아내려고 할 때 함수를 연구하게 된다. 대수에서 양 사이의 관계의 예로 직사각형의 면적 공식 $A=L\cdot W$ (A =넓이, L=가로의 길이, W=세로의 길이)를 생각해 볼 수 있다. 여기서 문자 A, L, W는 어떠한 관계 속에서 서로 관련을 맺으면서 하나의 값이 변하면 다른 값들의 변화를 수반하고 있다.

넷째, 구조의 맥락에서 보면 변수는 어떤 성질들을 만족하는 임의의 대상을 나타내는 기호에 지나지 않는다. 특히 대수에서 다루어지는 군, 환, 체, 정역, 벡터 공간과 같은 추상구조에서 나타나는 변수는 임의의 대상으로 생각된다. 구조의 맥락에서는 변수가 나타내는 대상에 대한 고려가 무의미하고 변수 위에서의 조작만이 의미를 갖게 된다.

학교수학에서 이러한 개념은 변수를 형식적 조작의 대상으로 다루는 경우에서 찾아볼 수 있다. 그 예는 우리가 자주 다루는 "$3x^2+4ax-132a^2$을 인수분해하라"와 같은 문제에서도 발견할 수 있다. 이 문제는 문제해결 과정의 학습을 위한 것은 아니다. 또한 이 문제에는 일반화해야 할 어떤 패턴이 존재하지 않으므로 일반화하는 도구로 생각되지도 않는다. 이 문제에서 나타나는 것은 임의의 기호에 불과한 것이다. 그렇기 때문에 변수 x, a가 나타내는 대상에 대한 고려는 무의미한 것이 되고 x, a에 대한 조작만이 의미를 갖게 되는 것이다. 이는 우리가 위의 인수분해 문제의 해답 $(3x+22a)(x-6a)$을 검산하는 경우에서도 마찬가지이다. 우리는 문제에서 주어진 다항식과 인수분해 된 해답에 있는 x, a에 여러 가지 값들을 대입해 보면서 검산을 하는 것이 아니라 인수분해 한 식에 있는 인수들끼리 다시 곱함으로써 문제에 있는 처음의 다항식을 얻는 방법을 택하고 있는 것이다.

우리는 학생들이 대수를 공부할 때 일반적으로 대수 문항이 나타내는 것을 마음속에 품기를 원하면서도, 때로는 학생들이 그 대상을 생각하지 않고 변수에 대한 조작만을 행하길 바라는 경우가 종종 있다. 예를 들어, $2\sin^2 x-1=\sin^4 x-\cos^4 x$과 같은 식을 유도해내는 문

제에서 우리는 학생들이 특정한 수에 대한 사인값, 코사인값, 또는 사인함수나 코사인함수를 생각하지 않기를 바라며 단지 삼각함수의 성질을 이용하여 좌변의 식에서 우변의 식을 유도하기만을 바랄 뿐이다.

대수 정의의 이해는 대수의 성공적인 학습뿐만 아니라 수많은 수학적 아이디어를 의미 있게 경험할 수 있는 길을 제공한다. 그러나 위에서 살펴본 바와 같이 대수 정의는 매우 다양해서 학생들이 겪는 학습의 주된 어려움은 대수의 의미에 대한 이해 그 자체에서부터 발생할 수 있다. 따라서 대수의 성공적인 학습을 위한 토대가 되어야 할 대수 정의가 그에 대한 개념적 이해의 결여로 인해 오히려 학생들이 대수를 학습하는데 큰 장애가 될 가능성도 있는 것이다. 특히 '새수학'의 형식주의적인 지도방식을 따르면서 알고리즘적 사고와 계산 패턴의 인식을 강조하고 있는 현재의 학교수학에서는 수학 교재의 대부분의 내용이 '해답 찾기'를 강조함으로써 문제풀이 과정의 학습이나 일반화의 학습만이 부각되는 경향이 있다. 이러한 학습상황에서 학생들은 대수의 다양한 의미를 인식하지 못하게 된다. 학교수학은 다양한 의미를 가지는 대수가 수학에서 여러 가지 양상으로 나타나고 있다는 사실을 간과하고 있는 것이다(김남희, 1997).

2. 한국, 미국, 일본의 교육과정 비교

교과서를 분석하기에 앞서 교과서 내용을 구성하는데 기본 틀이 되는 수학과 교육과정 중 '문자와 식' 영역의 교육목표를 살펴봄으로써 수학 교과서의 대수 영역을 분석하는데 기초 자료로 삼고자 한다.

1) 한국의 대수 교육 목표

<표 Ⅱ-1> 한국의 대수 교육 목표[3)]

교육 목표	교육 내용
간단한 대수식을 해결 할 수 있다.	· 식의 값을 구할 수 있다. · 일차방정식과 일차부등식을 풀 수 있다. · 미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있다. · 이차방정식과 그 해를 이해하고, 이차방정식을 풀 수 있다. · 연립일차부등식과 그 해를 이해하고, 연립일차부등식을 풀 수 있다.
양사이의 관계를 이해하여 실생활의 여러 가지 문제를 조직, 표현, 해결할 수 있다.	· 문자를 사용해서 식을 간결하게 나타낼 수 있다. · 일차방정식 또는 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있다. · 일차부등식 또는 연립일차부등식을 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
대수적 성질과 대수식의 구조를 이해할 수 있다.	· 등식과 부등식의 성질을 이해한다. · (단항식)×(다항식), (다항식)÷(단항식)과 같은 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다. · 일차식의 계산을 할 수 있다.

3) 교육인적 자원부(2001). 중학교 교육 과정 해설(Ⅲ), 대한 교과서 주식회사

	· 지수법칙을 이해한다. · 간단한 등식을 변형할 수 있다. · 인수분해의 뜻을 알고, 인수분해를 할 수 있다. · 다항식의 곱셈 원리를 이해하여 곱셈 공식을 유도하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 미국의 NCTM의 대수 규준

<표 Ⅱ-2> 미국 NCTM의 대수 규준(9-12학년)[4]

규 준	교육 내용
패턴, 관계, 함수를 이해할 수 있다.	· 양함수와 재귀적으로 정의된 함수를 활용하여 패턴을 일반화할 수 있다. · 관계와 함수를 이해하고, 함수의 다양한 표현 방법을 선택하고 유연하게 상호 번역하며 이용할 수 있다. · 변화율, 절편, 근, 점근선, 국소적 행동과 전체적 변화를 탐구함으로써 일변수함수를 이해할 수 있다. · 좀 더 복잡한 식의 연산에는 공학도구를 이용하여 함수의 결합과 합성, 역함수와 같은 변환을 이해하고 수행할 수 있어야 한다. · 지수함수, 다항함수, 유리함수, 로그함수, 주기함수 등 다양한 함수족의 성질을 이해하고 비교할 수 있다. · 2변수 함수의 표현을 해석할 수 있다.
대수 기호를 이용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석할 수 있다.	· 식, 방정식, 부등식, 관계의 동치 형식의 의미를 이해할 수 있다. · 방정식, 부등식, 연립방정식의 동치 형식을 쓰고, 간단한 경우는 암산 또는 지필로, 모든 경우에 공학도구를 이용하여 능숙하게 해결할 수 있다. · 기호 대수를 활용하여 수학적 관계를 표현하고 설명 할 수 있다. · 재귀방정식, 매개변수 방정식을 포함한 다양한 기호 표현을 활용하여 함수와 관계를 나타낼 수 있다. · 기호조작(공학 도구에서의 조작을 포함) 결과의 의미, 유용성, 타당성을 판단할 수 있다.
수학적 모델을 활용하여 양 사이의 관계를 표현하고 이해 할 수 있다.	· 한 상황에서 핵심적인 양적 관계를 확인하고 그 관계의 모델이 될 수 있는 함수 또는 함수족을 결정할 수 있다. · 반복적이고 귀납적인 형식을 포함한 기호 표현을 활용하여 다양한 맥락에서 나타나는 관계를 표현할 수 있다. · 모델링 상황에 대해 타당한 결론을 도출할 수 있다.
다양한 맥락에서 변화를 분석할 수 있다.	· 그래프 자료와 수치자료에서 변화율의 근사값을 구하고 이를 해석할 수 있다.

4) NCTM(2007), 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남규, 방정숙 옮김. Principles and Standards for School Mathematics (학교수학을 위한 원리와 규준)

3) 일본의 대수 교육 목표

<표 Ⅱ-2> 일본의 대수 교육 목표5)

교육 목표	교육 내용
여러 가지 방정식을 풀고 이것을 활용할 수 있다	· 등식의 성질을 발견하고 방정식을 그것에 기초하여 푸는 것을 아는 것 · 간단한 일원일차방정식을 풀 수 있고 그것을 이용할 수 있을 것 · 간단한 연립이원일차방정식을 풀 수 있고 그것을 이용할 수 있을 것 · 간단한 이차방정식을 풀 수 있고 이것을 이용할 수 있을 것
문자식을 이해하고 수량의 관계와 법칙을 발견하여 이것을 문자를 사용하여 식으로 표현하여 활용할 수 있다.	· 문자를 사용하는 의미를 이해하는 것 · 방정식과 그 속의 문자와 해의 의미를 이해하는 것 · 이원일차방정식과 그의 해의 의미를 이해하는 것 · 수량 및 수량의 관계를 파악하기 위하여 문자식을 이용할 수 있는 것을 이해할 것 · 연립이원일차방정식과 그의 해의 의미를 이해할 수 있을 것 · 이차방정식의 필요성을 알고 그의 해의 의미를 이해할 수 있을 것
문자를 사용한 간단한 다항식에 대하여 목적에 맞게 변형할 수 있다.	· 간단한 식의 덧셈, 뺄셈 및 단항식의 곱셈, 나눗셈의 계산을 할 수 있을 것 · 목적에 맞게 간단한 식을 변형할 수 있을 것 · 단항식과 다항식의 곱셈 및 다항식을 단항식으로 나누는 나눗셈을 할 수 있을 것 · 간단한 일차식의 곱셈을 할 수 있고 다음 공식을 이용하여 간단한 식의 전개와 인수분해를 할 수 있을 것

세 나라의 '문자와 식' 영역에 대한 대수 교육 내용과 교육 목표는 대수의 다양한 의미가 함께 교육되어야 함을 알 수 있게 해준다. 이러한 교육 목표를 바탕으로 세 나라의 교과서는 대수의 정의가 어떠한 비율로 서술되어 있는지 분석해 보고 교육과정에서 제시한 교육 내용과 관련되는지 알아보고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

한국의 대상 교재는 제 7차 교육과정에 따라 현재 발행되어 있는 여러 종의 중학교 수학 교과서 중 (주)중앙교육진흥연구소와 (주)금성출판사의 수학 교과서 7-가, 8-가, 9-가의 대수 영역인 '문자와 식' 영역을 연구대상으로 하였다. 그리고 미국의 경우에는 McDougal Littell 출판사의 수학 교과서 Algebra 1의 Chapter 3, 6, 8, 10을 선택하였다. 그리고 일본의 경우에는 學校圖書株式會社 출판사의 중학교1, 2학년 수학교과서의 대수영역을 선택하였다.

5) 김응환, 이석훈(1999). 일본의 중학교 수학과 신교육과정 소개와 학습량 30%감축에 대한 논의 한국학교수학회논문집 제 2권 제1호 1999 pp. 5-13.

2. 연구 방법 및 절차

이 연구의 중심 내용인 교과서 분석을 위해 관련 교수 및 동료 연구자의 조언을 구했으며, 연구의 순서는 다음과 같은 단계로 진행하였다.

첫째, 한국, 미국 그리고 일본의 대수 영역의 교육과정을 살펴본다.

둘째, 세 나라의 교과서 '문자와 식' 영역에 있는 각 문항들은 Usiskin이 정의 한 대수의 개념 중에서 어디에 해당하는지 분석 한다.

셋째, 분석한 내용을 종합해서 한국, 미국, 일본의 수학 교과서에 나타난 대수 개념의 유형을 각 나라의 교육과정과 연관지어 비교 분석한다.

Ⅳ. 연구 분석

이 절에서는 한국과 미국 그리고 일본의 수학 교과서 '문자와 식' 영역에 나타난 대수 문항을 대수를 정의한 여러 이론 중 Usiskin(1988)의 정의 -일반화된 산술로서의 대수, 문제해결 과정으로서의 대수, 양 사이의 관계를 나타내는 대수, 구조를 표현하는 대수-를 기준으로 분석해 보기로 한다. 먼저 각 문항에 대한 분석을 통해 교과서에 수록된 문항은 대수의 정의 중 어떤 의미를 담고 있는지 문항 하나하나를 보고 서술 하였다. 또한 이렇게 분석한 문항들을 종합하여 한국, 미국, 일본의 수학 교과서의 대수 영역은 앞서 제시한 각 나라의 교육과정을 어떻게 고려하고 있는지 알아보고자 한다.

1. Usiskin의 정의에 따른 교과서 분석

1) 문제해결 과정으로서의 대수

Usiskin에 의한 대수 정의를 토대로 교과서에 제시된 문항 중에서 문제해결과정으로서의 대수에 해당하는 문항의 예는 다음과 같다.

문제 2 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $a=105$일 때, $a^2-10a+25$의 값

(2) $x=1+\sqrt{3}$일 때, x^2-2x-3의 값

<그림 Ⅳ-1> 중학교 9-가 p.70 (한국 : 중앙)

次の方程式を解きなさい。

(1) $x+4=10$ (2) $x+7=-2$

(3) $x-6=3$ (4) $x-2=-8$

<그림 Ⅳ-2> 중학교 수학1 p.75(일본)

<그림 Ⅳ-1>의 문항은 9-가 단계에 있는 식의 값을 구하는 문제로 이러한 문항은 주어진 식의 미지수에 조건에 제시된 값을 대입하거나 식의 조작을 통해 식의 값을 구하는 문제이다. <그림 Ⅳ-2>는 일본 교과서에 제시된 일차방정식의 해를 구하는 문제이다. 일차방정식의 해를 구하는 것은 미지수 x에 적당한 수를 대입해서 등식을 참이 되게 하는 값을 찾거나 등식의 성질, 이항, 동류항 정리와 같은 식의 조작을 통해서 방정식의 해를 구하는 문제이다. 이와 같이 미지수에 적당한 값을 대입하거나 식을 조작하는 과정을 통해 조건에 맞는 값을 구하는 문제는 문제해결 과정으로서의 대수라 할 수 있다.

2) 구조를 표현하는 대수

Usiskin에 의한 대수 정의를 토대로 교과서에 제시된 문항 중에서 구조를 표현하는 대수에 해당하는 문항의 예는 다음과 같다.

문제 4 다음 식을 전개하여라.

(1) $(4a+3)(4a-3)$ (2) $(2x-1)(2x+1)$

(3) $\left(a+\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{2}{3}\right)$ (4) $\left(\frac{1}{4}-x\right)\left(\frac{1}{4}+x\right)$

(5) $\left(\frac{3}{5}a+2b\right)\left(\frac{3}{5}a-2b\right)$ (6) $\left(-\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y\right)$

<그림 Ⅳ-3>중학교 9-가 p.50 (한국 : 중앙)

次の計算をしなさい。

(1) $3(x+5y)$ (2) $2(5x-2y+1)$

(3) $-4(-2a+b)$ (4) $-(3a+4b-5)$

<그림 Ⅳ-4>중학교 수학2 p.15 (일본)

<그림 Ⅳ-3>은 9-가 단계에 있는 식의 계산 단원의 문항이고, <그림 Ⅳ-4>는 일본 교과서 수학 2에 있는 식의 계산 문제로 괄호를 풀기위해 식을 전개하고 동류항 정리를 이용하여 식을 간단히 하는 문제이다. 이러한 문제는 주어진 식의 미지수 값을 구하고자 하는 것이 아니라 문자를 사용한 식의 구조를 알기 위해 식을 변형하거나 정리하는 형태의 문제이다. 이러한 유형의 문항을 대수식을 이해하기 위한 구조를 표현하는 대수라 할 수 있다.

3) 양 사이의 관계를 나타내는 대수

Usiskin에 의한 대수 정의를 토대로 교과서에 제시된 문항 중에서 양 사이의 관계를 나타내는 대수에 해당하는 문항의 예는 다음과 같다.

문제 4 $a<b$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써 넣어라.

(1) $2a+3 \ \square \ 2b+3$ (2) $2a-3 \ \square \ 2b-3$

(3) $-2a+5 \ \square \ -2b+5$ (4) $-2a-5 \ \square \ -2b-5$

(5) $\frac{a}{5}-1 \ \square \ \frac{b}{5}-1$ (6) $-\frac{a}{4}+8 \ \square \ -\frac{b}{4}+8$

<그림 Ⅳ-5>중학교 8-가 p.101 (한국:중앙)

<그림 Ⅳ-5>은 8-가 단계에 있는 부등식 단원의 문제로 부등식의 성질을 이용하여 양변에 같은 값을 더하고, 빼고, 곱하고, 나누었을 때 양 변에 주어진 식의 대소를 비교하는 형태의 문제이다. 이러한 문제는 연산되어지는 값에 따라 식의 변화를 알고 양변에 주어진 식의 대소를 비교하는 것으로 양 사이의 관계를 나타내는 대수라 할 수 있다.

4) 일반화된 산술로서의 대수

Usiskin에 의한 대수 정의를 토대로 교과서에 제시된 문항 중에서 일반화된 산술로서의 대수에 해당하는 문항의 예는 다음과 같다.

지수법칙 [3]

$a \neq 0$이고, m, n이 자연수일 때,

❶ $m>n$이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$

❷ $m=n$이면 $a^m \div a^n = 1$

❸ $m<n$이면 $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

<그림 Ⅳ-6> 중학교 8-가 p.51(한국 : 중앙)

<그림 Ⅳ-6>은 8-가 단계에 있는 지수법칙을 정리한 내용으로 각각의 자연수에 대해서 하나하나 반복적으로 제시하며 설명해야 하는 내용을 임의의 미지수를 사용해서 모든 자연수에 대해 성립하는 대수식으로 일반화하여 나타내었다. 이와 같이, 같은 계산이 되풀이 되는 것을 하나의 대수식으로 표현되어지는 문항을 일반화된 산술로서의 대수라 할 수 있다.

5) 혼합 유형

Usiskin에 의한 대수 정의를 토대로 교과서에 제시된 문항 중에서 단독 유형으로 제시된 문항이 아니고 네 영역이 혼합되어진 문항으로 다음과 같은 예를 볼 수 있다.

문제 2 민재는 학교를 출발하여 우체국에 들러 소포를 부치고 집까지 모두 1500m를 가는 데 20분이 걸렸다. 학교에서 우체국까지는 분속 200m로 뛰었고, 우체국에서 집까지는 분속 50m로 걸었다고 할 때, 학교에서 우체국까지의 거리와 우체국에서 집까지의 거리를 각각 구하여라. (단, 소포를 부치는 데 걸린 시간은 5분이다.)

<그림 Ⅳ-7>중학교 8-가 p.93 (한국:중앙)

문제 2 다음을 문자를 사용하여 식으로 나타내어라.

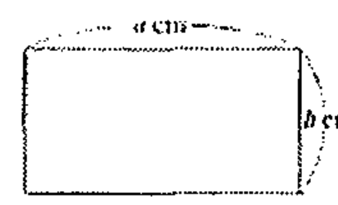
(1) 한 봉지에 700원 하는 과자 x봉지와 한 병에 500원 하는 음료수 y병의 값

(2) 한 장에 x원 하는 카드 4장과 한 송이에 y원 하는 꽃 8송이를 사고 3000원을 냈을 때의 거스름돈

문제 3 가로와 세로의 길이가 각각 $a$cm, $b$cm인 직사각형이 있다. 다음을 문자를 사용한 식으로 나타내어라.

(1) 직사각형의 둘레의 길이

(2) 직사각형의 넓이



<그림 Ⅳ-8>중학교 7-가, p.95 (한국:금성)

중학교 수학에서 학생들이 처음으로 배우게 되는 문자의 사용에서는 초등학교 수학의 '문제 푸는 방법'에서 다루어 보았던 문장제 문제를 학습하게 되고 문자와 식 단원의 시작에서 주어진 문장을 문자를 사용하여 수식화 하는 것을 학습한다. <그림 Ⅳ-7>에서는 주어진 값들 사이의 관계를 통해서 일반화 된 식을 유도하고 이를 해결하여 거리를 구하는 문제이다. 또한 <그림 Ⅳ-8>의 [문제 2] (1)은 과자 한 봉지의 가격과 봉지 수 사이의 관계와 음료수 한 병의 가격과 병의 개수 사이의 관계를 알고 이것을 수식으로 일반화하여 표현할 수 있어야 한다. [문제 3]에서는 직사각형의 변의 길이와 둘레사이의 관계, 변의 길이와 넓이와의 관계를 알고, 이것을 수식화 하는 문제이므로 이러한 유형의 문제는 양 사이의 관계를 표현하는 대수와 일반화된 산술로서의 대수로 해석할 수 있으므로, 이와 같이 두 가지 이상으로 정의된 문항은 혼합 유형으로 분류하였다.

2. 한국, 미국, 일본의 수학교과서에 나타난 대수 개념 분석

1) 한국의 수학 교과서에 나타난 대수 개념의 유형 분석

한국의 중학교 수학 교과서의 '문자와 식' 영역에는 앞 절에서 제시한 Usiskin의 정의가 어떠한 비율로 분포되어 있는지 분석하고, 중학교 7-가, 8-가, 9-가로 단계가 높아질수록 대수의 개념이 어떻게 분포되어지는지 분석해 보았다.

<표 Ⅳ-1> 한국 교과서 단계별 대수 개념 비교 6) (단위 : 문항 수(백분율))

대수의 정의	단계 / 출판사	7-가	8-가	9-가
문제	중앙	94 (28.6)	175 (33.1)	162 (39.0)
	금성	104 (38.8)	210 (41.5)	167 (42.5)
구조	중앙	152 (46.2)	236 (44.6)	166 (40.0)
	금성	118 (44.0)	213 (42.1)	160 (40.7)
양	중앙	10 (3.0)	47 (8.9)	5 (1.2)
	금성	6 (2.2)	29 (5.7)	4 (1.0)
일반화	중앙	19 (5.8)	16 (3.0)	15 (3.6)
	금성	12 (4.5)	11 (2.2)	15 (3.8)
혼합	중앙	54 (16.4)	55 (10.4)	67 (16.2)
	금성	28 (10.5)	43 (8.5)	47 (12.0)
총 문항	중앙	329 (100)	529 (100)	415 (100)
	금성	268 (100)	509 (100)	393 (100)

두 출판사의 총 문항수를 비교해보면 중앙교육진흥연구소의 교과서에 제시된 문항수가 금성출판사의 문항수보다 많게 나타나지만, 대수 정의에 대한 각각의 백분율을 비교해 보면 그 값이 대동소이하게 나타난다는 것을 알 수 있다. 전체 문항 수에 대한 대수의 정의의 비율은 문제해결과정으로서의 대수와 구조를 표현하는 대수가 각각 약 30%, 40%이상의 비율을 차지하고 있다. 그 외에 혼합유형이 약 15%이고, 다른 정의는 10%미만의 비율을 차지하고 있다. 이것은 우리나라의 수학과에서 다루어야 할 6가지 영역 중에서 '문자와 식' 영역으로 한정하여 분석하였기 때문으로 생각된다. 대수 영역은 '수와 연산', '규칙성과 함수' 영역까지 포함해서 생각할 수 있는데, 일반화된 산술로서의 대수는 '수와 연산' 영역의 연산의 성질에서 많이 살펴볼 수 있고, 양 사이의 관계를 표현하는 대수는 '규칙성과 함수' 영역에서 두 변수 x, y사이의 관계에서 나타나므로 본 연구에서는 비율이 낮게 나타나는 것으로 여겨진다.

각 정의에 대한 백분율 값을 비교해 보면 두 출판사 모두 문제해결 과정으로서의 대수가 약 30%이상으로 높은 비율을 차지하고 있으며 단계가 올라 갈수록 비율이 증가하고 있다.

6) 표에 제시된 문제, 구조, 양, 일반화, 혼합은 다음과 같은 내용이다.
문제-문제 해결 과정으로서의 대수/ 구조-구조를 표현하는 대수/ 양-양 사이의 관계를 표현하는 대수 / 일반화- 일반화된 산술로서의 대수/ 혼합- 혼합유형.

역사적으로 대수의 정의는 algebra라는 말의 기원에서도 알 수 있듯이 방정식을 푸는 방법으로 보았다. 또한 최근의 대수교육 연구에서도 학교대수의 중심에 놓여 있는 것이 문제해결이므로 방정식의 풀이와 같은 문제해결과정으로서의 대수의 비율이 높게 나타난다는 것을 알 수 있다. 이러한 분포는 단순히 해를 구하는 형태의 문항이 많지만 실생활 문제를 해결하기 위한 기초가 되므로 강조되고 있는 것이고, 우리나라 수학과 교육과정에서도 5차 이후에 문제해결력이 강조되어지는 것과 일맥상통 한다.

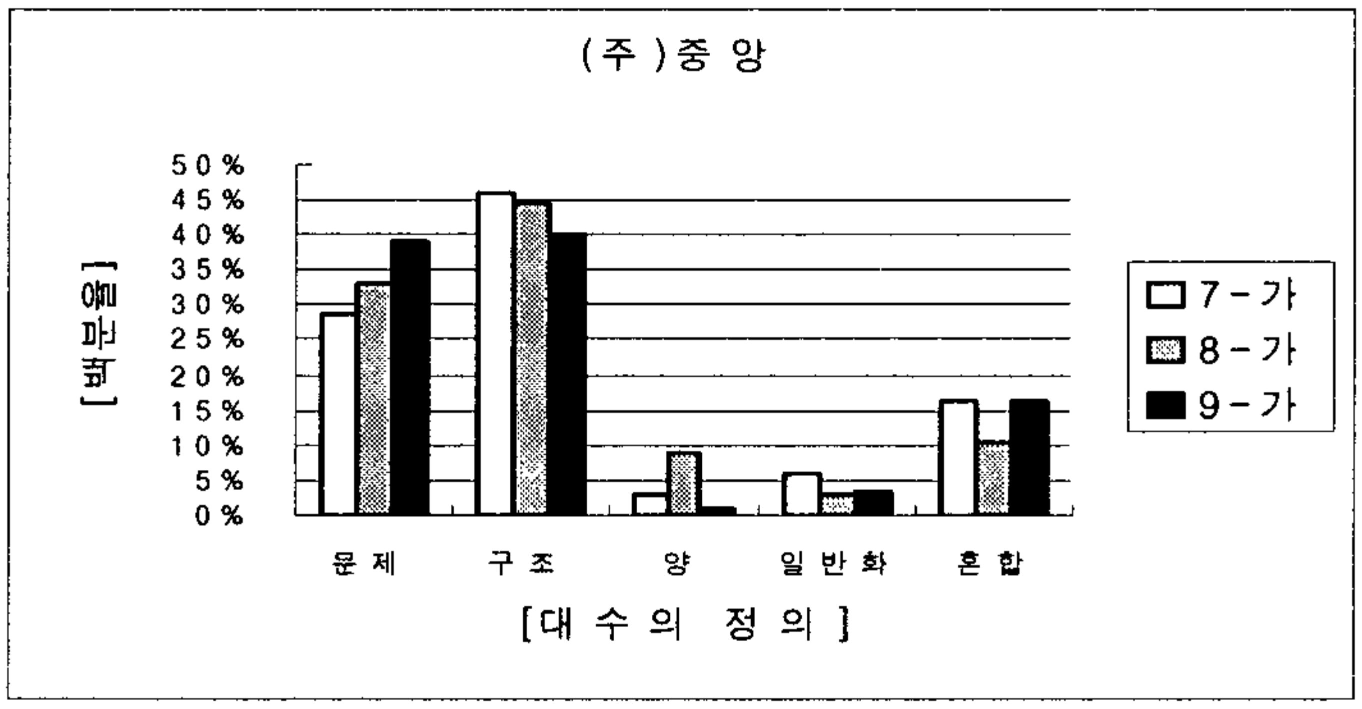
구조를 표현하는 대수는 약 40%이상으로 가장 높은 비율을 차지하고 있으며 단계가 올라갈수록 조금씩 비율이 낮아지고 있음을 알 수 있다. 이것은 1960년대의 새수학운동의 영향으로 대수적 구조가 강조되고 도입되었으며, 오늘날의 학교대수에서도 구조적 관점이 중요하게 다루어져 오고 있기 때문이다. 우리나라 중학교 대수 교육 목표에서도 수학에서 문자를 사용하는 식의 취급은 수학의 기초로 대단히 중요하다고 강조하는 것과 연관 되어 진다. 수학을 배우면서 처음 문자를 사용하게 되는 7-가 단계의 학생들이 수학의 기초인 문자를 사용하는 식을 잘 다룰 수 있도록 해야 한다는 것이다. 특히 식의 변형에서 전개와 인수분해는 수학의 다른 영역의 학습에서도 항상 이용되므로 식의 다양한 취급을 통하여 기능을 숙달하고 학습 결손이 없도록 하여야 한다. 이를 위해 문자를 사용한 식을 간단히 조작할 수 있도록 하는 구조를 표현하는 대수가 높은 비율을 차지하고 있는 것이다.

또한 학년이 올라 갈수록 구조를 표현하는 대수의 비율이 낮아지고 있음을 <그림 Ⅳ-9>의 그래프를 통해 확인할 수 있는데, 이것은 수학 교과 특성 중 학습 내용의 순서가 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지게 하는 계통성과 연관되어 진다. 즉 교과 내용이 단계가 올라가면서 전 단계에서 학습한 내용에 연관되는 새로운 내용만 추가하여 학습하면 되기 때문에 그 비율이 조금씩 줄어든다고 볼 수 있다. 비율이 줄어들고 있기는 하지만 전체 비율에서 40%이상으로 대수의 의미 중 가장 높은 비율을 차지하고 있다.

양 사이의 관계를 나타내는 대수는 단계별로 약 2.5%, 8%, 1%의 비율을 차지하고 있으며, 8-가에서 다른 단계의 약 4배의 비율을 차지하고 있다. 이것은 8-가에 부등식 단원이 포함되어 있기 때문이다. 그리고 양 사이의 관계를 나타내는 대수는 '양 사이의 관계를 이해하여 실생활의 여러 가지 문제를 조직, 표현, 해결할 수 있도록 해 준다.'라는 교육 목표로 구현되어 이러한 목표를 달성하기 위한 문항은 주로 문장제 문제에서 살펴볼 수 있다. 문장제 문제를 해결하는 과정에서 주어진 값들에 대한 양 사이의 관계를 이해하고 이를 이용하여 식을 세우게 되므로 양 사이의 관계를 나타내는 대수는 혼합유형에 많이 포함되어 서술되어 지는 것이다.

일반화된 산술로서의 대수는 주로 대수식의 성질을 표현할 때나 문장제 문제를 수식으로 표현할 때 나타나고 있다. 일반화는 문장제 문제를 해결하기 위해 기호를 사용하여 일반적인 문제를 해결하는 방법으로 정의되어지는 16세기 이후의 대수 정의에서 나타나기 시작했다. 그리고 문장제 문제에서 구하고자 하는 값을 미지수로 정하고 수와 문자를 동일한 맥락에서 사용하여 식을 세우는 것을 일반화된 산술로서의 대수로 보았다. 일반화된 산술로서의 대수를 학습하기 위한 대수 교육 목표에서는 '지수법칙을 이해할 수 있다', '등식의 성질을 이해 할 수 있다', '일차방정식을 이해할 수 있다'와 같은 내용을 다루고 있다. 학생들에게 이러한 성질이나 법칙들을 이해시키기 위해서 교과서에서 많은 문제들을 다루고 있다. 이러한 문제를 해결해 봄으로써 여러 가지 문제에서 규칙적인 것을 발견해 보고 일반화 되어진 식을 이해하는 것이다. 그렇기 때문에 일반화된 산술로서의 대수 문항의 비율은 낮게 나타나고 이를 이해하기 위해 제시되어지는 구조를 표현하는 대수나 문제해결 과정으로서의 대

수의 문항이 높은 비율을 차지하는 것이다. 또한 일반화된 문항을 이해하기 위해서는 수와 문자를 동일한 것으로 이해해야하고 혼합유형에서 다른 유형과 함께 나타나기 때문에 학생들이 사고하기에 어려움이 있는 정의라는 생각이 든다. 하지만 대수를 학습하면서 일상생활에서 일어나는 이런 규칙적인 상황을 해결하기 위해 수식화 하고 형식화 하여 해결할 수 있는 능력을 기르는 목적을 달성하기 위해서는 조금 더 강조되어져야 할 부분이라 생각된다.

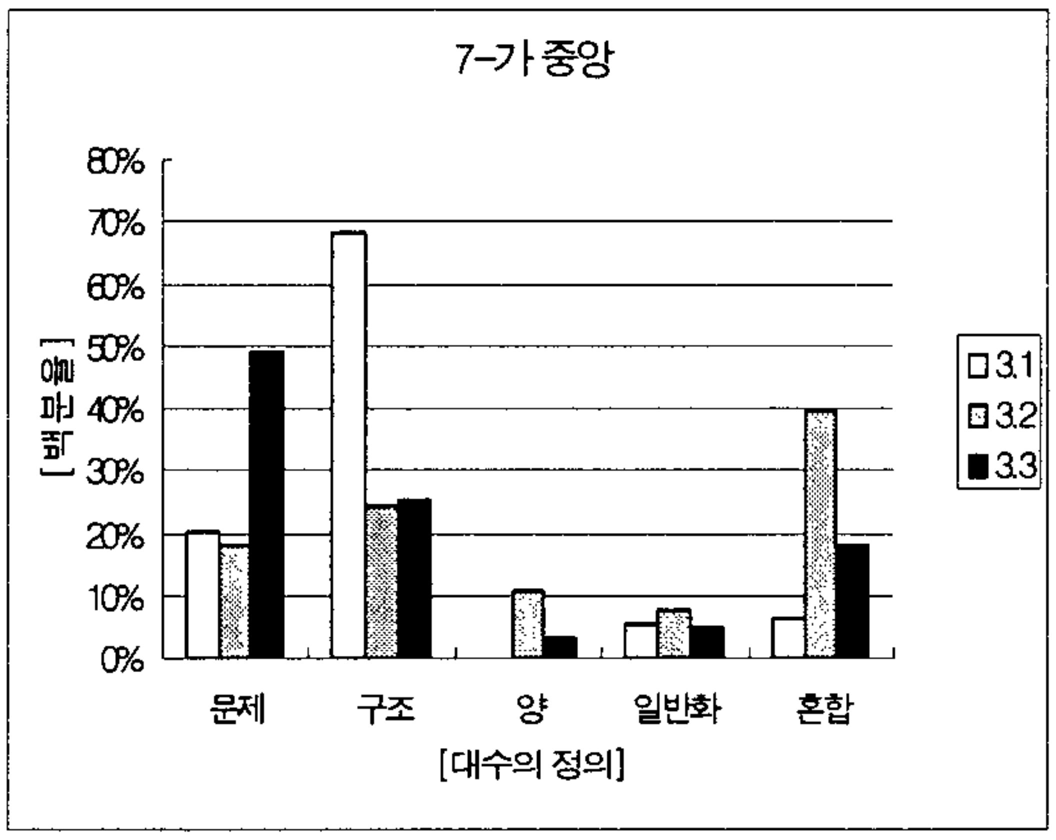


<그림 Ⅳ-9> 단계별 대수 개념의 분포(중앙)

다음으로 한국 교과서는 단원별로 대수를 어떻게 서술하고 있는지 살펴보고자 한다.

정의 / 단원	문제	구조	양	일반화	혼합
문자와 식	33 (20.3)	111 (68.1)	0 (0)	9 (5.5)	10 (6.1)
등식	12 (18.2)	16 (24.2)	7 (10.6)	5 (7.6)	26 (39.4)
일차방정식	49 (49)	25 (25)	3 (3)	5 (5)	18 (18)
합계	94	152	10	19	54
백분율(%)	28.6	46.2	3.4	5.8	16.4
총 문항수	329				

<표 Ⅳ-2> 단원별 대수 개념 비교(중앙 7-가)



<그림 Ⅳ-10> 단원별 대수 개념의 분포 그래프

단원별 대수 개념의 분포는 구조를 표현하는 대수와 문제해결과정으로서의 대수가 전체적으로 높은 비율을 차지하고 있다. 이러한 분포를 바탕으로 교과서를 단원별로 세분화하여 분석해 보면, 첫 단원에서는 구조를 표현하는 대수가 각각 68.1%이고 문제해결 과정으로서의 대수가 33%이다. 다음 단원에서는 구조를 표현하는 대수가 25%이고 문제해결 과정으로서의 대수가 49%의 비율을 차지하고 있다. 이러한 비율의 변화는 문자와 식 영역의 단원의

구성을 보면 알 수 있는데, 「문자와 식」과 「등식」단원에는 문자의 사용, 식의 값, 일차식의 계산이라는 세 개의 소단원으로 구성되어 있다. 이와 같은 내용은 대수 교육목표에서 '일차식을 계산 할 수 있다', '간단한 등식을 변형할 수 있다', '문자식에서 곱셈과 나눗셈을 생략할 수 있다'등의 목표를 제시하며 구조를 표현하는 대수를 강조하고 있다. 이러한 목표를 달성하기 위해서 교과서에서는 곱셈과 나눗셈의 생략, 괄호 전개, 동류항 정리 등의 문항을 다루면서 대수식의 구조를 학습하게 된다. 이와 같이 새로운 대수식의 구조를 학습시킴으로써 문자식의 구조를 알고, 문자를 사용하는 식에서 문자와 식의 조작을 용이하게 할 수 있도록 하기 위해 단원의 시작에서 구조를 표현하는 대수 문항의 비율이 높게 나타난다.

「일차방정식」단원에서는 일차방정식과 그 해, 등식의 성질, 일차방정식의 풀이, 일차방정식의 활용이라는 소단원으로 구성되어 있다. 이 단원에서는 문제해결 과정으로서의 대수가 54.2%로 다른 유형에 비해 높은 비율을 차지한다. 이것은 대수 교육목표에서 '식의 값을 구할 수 있다', '일차방정식을 풀 수 있다'등을 목표로 제시하며 문제 해결 과정으로서의 대수를 강조하고 있기 때문이다. 이러한 문제 해결 과정으로서의 대수는 대부분 단순한 방정식의 해를 구하는 문제들이 주를 이루고 있다. 대수의 역사와 교육과정에서 문제해결력이 강조되고 있지만, 단순한 방정식의 풀이 같은 유형의 문제를 기계적으로 학습하게 하는 것은 학생들의 창의적인 생각을 저하시키는 교육이라 생각된다.

혼합유형은 동기유발을 위한 실생활 문제인 탐구 문제와 일차방정식의 활용 단원에서 많은 비중을 차지하고 있다. 혼합유형은 수학적 구조의 학습, 양사이의 관계, 문제풀이, 일반화 학습 등을 포함하고 있기 때문에 비율은 16.4%이지만 실생활 문제를 수학적으로 표현하고 이것을 해결하는데 유용한 문항들이다. 이러한 문항들은 '문자를 사용해서 식을 간결하게 나타낼 수 있다', '일차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있다' 등과 같은 교육목표로 학습하고 있다. 이러한 목표는 수학과 대수 교육과정에서 문자와 식 영역의 학습을 통해 학생들이 일상생활에서 일어나는 현상을 일반화하고 수식화하여 형식화의 능력을 기를 수 있도록 하고자 한다.

그리고 양 사이의 관계를 나타내는 대수와 일반화된 산술로서의 대수는 단독적인 유형보다 혼합 문항에서 다른 유형과 함께 다루어지고 있다. 그러므로 혼합유형은 대부분의 단순한 수학적 구조나 문제 풀이가 학습된 후에 제시된다는 것을 알 수 있다.

이와 같은 분포를 통해서 우리나라 수학 교과서의 문자와 식 영역은 대수의 정의가 단원별로 강조하는 것이 차이가 있다는 것을 알 수 있다.

2) 미국 수학 교과서에 나타난 대수 개념의 유형 분석

미국의 McDougal Littell 출판사의 Algebra 1 교과서 내용 중 우리나라의 문자와 식 영역에 해당하는 단원을 선정하여 분석하였다. 총 10개의 Chapter로 구성된 교과서에서 문자와 식 영역에 해당하는 4개의 Chapter를 선정하여 본문 내용과 연습문제에 있는 문항을 모두 분석하였으며, 연습문제 이후 Quiz문항은 제외하고 분석하였다.

미국 교과서는 한 단원의 문항 수가 600문항 이상으로 문항수가 매우 많다. 미국의 교과서에는 우리나라와 달리 모든 학생이 반드시 학습해야 할 핵심적인 내용이 실려 있는 것이 아니라, 추후에 적당하게 취사선택되리라는 전제하에 학습 가능한 수학 내용이 총망라되어 있기 때문이다. 또한 문항 구성에서 Exercise(연습문제)의 문항수가 Example과 Check point(예제+문제)의 문항수의 약 3배이다. 이것은 미국의 수학 교육에서는 교사와 함께 하는 수업도 중요하지만 학생 스스로 문제를 해결할 수 있도록 하는 자기 주도적 학습이 강조됨

을 알 수 있다. 또한 역사적으로 미국의 교육과정에서 1980년대에 'Problem Solving'을 강조하면서 교과서에서 많은 문제를 다룰 수 있도록 교과서가 구성되어 진 것으로 생각된다.

<표 Ⅳ-3> 미국 교과서 대수 개념 비교 (단위 : 문항 수)

단원 \ 정의		문제	구조	양	일반화	혼합
Solving Linear Equations	예제/문제	59	14	1	4	39
	연습문제	315	88	6	17	116
Solving and Graphing Linear Inequalities	예제/문제	77	0	8	19	28
	연습문제	226	40	37	28	110
Exponents and Exponential Function	예제/문제	30	56	0	10	49
	연습문제	196	177	19	16	185
Polynomials and factoring	예제/문제	30	144	0	13	12
	연습문제	252	314	0	20	65
총 문항 수		**1185**	**833**	**71**	**127**	**604**
백분율		**40.3**	**28.4**	**2.4**	**4.3**	**20.6**

각 대수 정의 분포를 살펴보면 문제해결과정으로서의 대수가 40.3%, 구조를 표현하는 대수가 28.4%, 양 사이의 관계를 표현하는 대수2.4%, 일반화된 산술로서의 대수는 4.3% 그리고 혼합유형이 20.6%로 분포되어 있다. 이러한 분포에서 알 수 있듯이 미국의 수학 교과서에서 대수의 정의 중 문제해결 과정으로서의 대수와 구조를 표현하는 대수를 강조되고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 분포는 미국의 수학과 대수 규준에서 '식, 방정식, 부등식, 관계의 동치 형식의 의미를 이해 할 수 있다', '방정식, 부등식, 연립방정식의 동치 형식을 쓰고, 간단한 경우는 암산 또는 지필로, 모든 경우에 공학 도구를 이용하여 능숙하게 해결할 수 있다', '기호 대수를 활용하여 수학적 관계를 표현하고 설명 할 수 있다'와 같은 교육 내용을 달성하기 위해서 문제해결이나 구조의 표현이 강조되어 지고 있는 것이다.

양 사이의 관계를 나타내는 대수의 비율은 가장 낮게 나타나고 있다. 이것은 본 연구에서 대수의 영역을 우리나라의 문자와 식 영역에 해당하는 내용을 선정하여 분석을 하였기 때문이다. 양 사이의 관계는 함수영역에서 두 변수 사이의 관계에서 많이 살펴 볼 수 있기 때문에 그 비율이 낮게 나타나는 것으로 생각된다. 또한 문장제 문제를 해결할 때 주어진 값들 사이의 관계를 이해하기 위해 양사이의 관계를 알아야 하지만 혼합유형에 포함되어 나타나기 때문에 단독 유형의 비율이 낮게 나타난다는 것을 알 수 있다.

일반화된 산술로서의 대수는 문자와 식 영역 내에서 등식의 성질이나 지수 법칙과 같은 내용으로 일반화 하여 표현되어 있으나 이러한 문항은 모든 식이나 수에 대한 내용을 하나의 식으로 일반화 하여 표현하였기 때문에 비율이 낮은 것이다. 그에 반해서 일반화된 식을 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 하기 위해 많은 문제를 다루기 때문에 문제해결이나 문자식을 이해하기 위한 구조를 표현하는 대수의 비율이 높게 나타나는 것이다.

3) 일본 수학 교과서에 나타난 대수 개념의 유형 분석

일본 學校圖書株式會社의 중학교 수학1, 수학2 교과서의 '문자와 식 영역'에 해당하는 단

원을 분석한 내용은 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 일본 교과서 대수 개념 비교 (단위 : 문항 수(백분율))

단원 \ 정의	문제	구조	양	일반화	혼합
문자식	14 (14.3)	46 (46.9)	4 (4.1)	6 (6.1)	28 (28.6)
식의 계산	5 (4.0)	104 (83.9)	0 (0)	2 (1.6)	13 (10.5)
방정식	74 (86.0)	0 (0)	1 (1.2)	4 (4.7)	7 (8.1)
일차방정식의 활용	22 (48.9)	0 (0)	2 (4.4)	0 (0)	21 (46.7)
합계	115	150	7	12	69
백분율	32.6	42.5	2.0	3.4	19.5

전체적으로 일본 교과서 문자와 식 영역에서 강조되어지는 대수의 의미는 문제해결 과정으로서의 대수와 구조를 표현하는 대수가 각각 32.6%, 42.5%이고, 혼합유형도 19.5%의 비율로 전체의 1/5를 차지하고 있다. 이러한 결과는 우리나라의 교육과정과 교과내용이 흡사한 일본 교과서의 대수 영역을 문자와 식으로 한정해서 보았기 때문이다. 양 사이의 관계를 표현하는 대수는 수와 식 영역, 일반화된 산술로서의 대수는 규칙성과 함수 영역에서 많이 나타나므로 비율이 매우 낮은 것으로 생각된다.

양 사이의 관계와 산술의 일반화의 비율은 5%미만으로 매우 낮다. 대수 교육 목표에서도 양 사이 관계와 산술의 일반화를 위한 교육 목표는 '수량의 관계와 법칙을 발견하여 이것을 문자를 사용하여 식으로 표현하여 활용할 수 있다'와 같이 제시되어 있다. '문자와 식' 영역의 교육 목표에서도 알 수 있듯이 양 사이 관계나 산술의 일반화는 문장제 문제에서 많이 다루어지고 있으며 대수 개념에서는 단독 유형보다는 혼합유형으로 많이 제시되고 있다.

단원별로 대수 개념을 살펴보면 강조하는 내용이 확연히 차이가 난다는 것을 알 수 있다. 단원의 시작에서 구조의 학습이 46.9%, 83.9%로 평균 60%이상이며, 혼합유형도 28.6%로 높은 비율을 차지하고 있다. 일본의 대수 교육 목표에서는 '간단한 식의 덧셈, 뺄셈 및 단항식의 곱셈, 나눗셈의 계산을 할 수 있을 것', '목적에 맞게 간단한 식을 변형할 수 있을 것'과 같은 구조를 표현하는 대수를 강조하고 있다. 또한 '문자를 사용하는 의미를 이해하는 것', '수량 및 수량의 관계를 파악하기 위하여 문자식을 이용할 수 있는 것을 이해할 것' 등을 교육 목표로 하였다. 이러한 목표를 달성하기 위해 단원의 시작에서 구조를 표현하는 대수와 함께 혼합유형을 강조하여 대수식의 이용을 이해할 수 있도록 편성되어있다.

구조의 학습 이후 문제 해결 과정으로서의 대수가 86.0%, 48.9%로 높은 비율을 차지하고 있다. '문자와 식' 영역의 교육과정에는 '등식의 성질을 발견하고 방정식을 그것에 기초하여 푸는 것을 아는 것', '간단한 일원일차방정식을 풀 수 있고 그것을 이용할 수 있을 것', '간단한 연립이원일차방정식을 풀 수 있고 그것을 이용할 수 있을 것', '간단한 이차방정식을 풀 수 있고 이것을 이용할 수 있을 것'과 같은 목표를 제시하며 문제해결 과정으로서의 대수를 강조하고 있다. 그리고 교육 목표에서는 문제해결력과 함께 실생활 문제도 해결 할 수 있게 하기 위한 목표로 '이를 이용할 수 있을 것'이라는 것도 함께 제시 하고 있다.

이와 같은 분포를 통해서 일본의 수학 교과서의 '문자와 식'영역에서는 문제해결로서의 대수와 구조를 표현하는 대수가 강조된다는 것을 알 수 있다. 또한 단원별로 강조하는 유형이 확연하게 차이가 난다는 것을 알 수 있다.

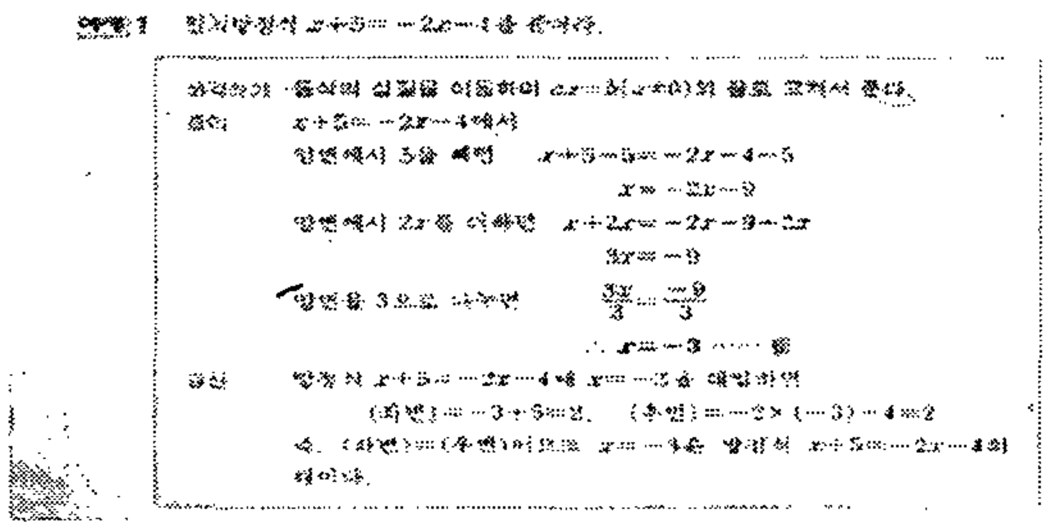
4) 한국, 미국, 일본 수학교과서에 나타난 대수 개념의 유형 비교

앞에서 수학 교과서 문자와 식 영역에 수록된 문항을 각 나라별로 분석하여 서술하였다. 이 절에서는 한국의 중앙교육진흥연구소와 미국 McDougal Littell 출판사의 Algebra 1과 일본 學校圖書株式會社의 대수 영역을 분석한 내용을 종합해서 서술하였다. 첫째로 세 나라의 교과서에 수록된 문항 중 Usiskin 정의를 토대로 대수의 영역에 해당하는 문항을 선정하여 살펴보았다. 두 번째로 전체적인 문항의 비율을 표와 그래프로 제시하여 세 나라의 교과서에 수록된 문항들은 대수의 정의를 어떻게 서술하고 있는지 비교해 보았다.

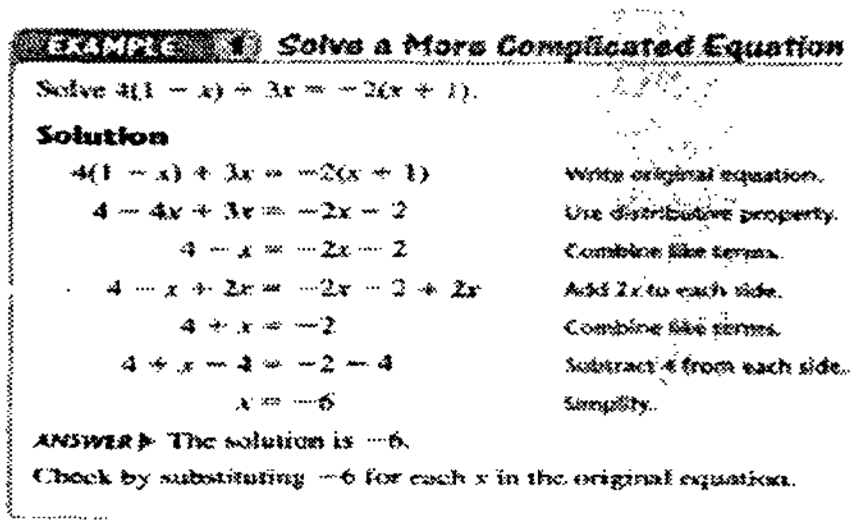
(1) Usiskin의 대수 정의에 따른 교재 구성 비교

Usiskin의 대수 정의에 따라 세 나라의 교과서에 제시된 문항 중 각 영역에 해당하는 문항을 선정하여 분석하였다.

① 문제해결 과정으로의 대수



<그림 Ⅳ-11>한국 중학교 7-가(중앙, p.128)



EXAMPLE 4 Solve a More Complicated Equation

Solve $4(1 - x) + 3x = -2(x + 1)$.

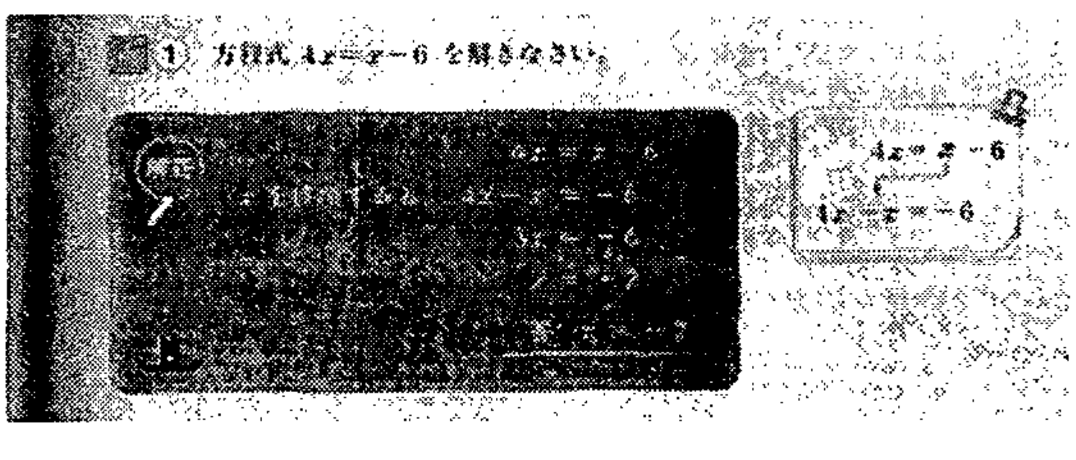
Solution

$4(1 - x) + 3x = -2(x + 1)$	Write original equation.
$4 - 4x + 3x = -2x - 2$	Use distributive property.
$4 - x = -2x - 2$	Combine like terms.
$4 - x + 2x = -2x - 2 + 2x$	Add $2x$ to each side.
$4 + x = -2$	Combine like terms.
$4 + x - 4 = -2 - 4$	Subtract 4 from each side.
$x = -6$	Simplify.

ANSWER ▶ The solution is -6.

Check by substituting -6 for each x in the original equation.

<그림 Ⅳ-12>미국 Algebra1 (p.157)



<그림 Ⅳ-13>일본 중학교 수학1(p. 77)

문제를 제시 할 때, 세 나라 모두 '방정식을 풀어라'라는 간단한 형태로 문제가 제시되어 있다. 문제 제시 방법에서 동일한 세 문항의 문제 해결 과정을 살펴보면 다음과 같다.

<그림 Ⅳ-11>의 예제는 한국 교과서 7-가 단계의 '일차방정식' 단원의 문항으로 등식의 성질과 이항이라는 개념을 학습한 후에 제시된 문항이다. 이 문항을 해결하기 위한 과정은 '생각하기→풀이→검산'으로 제시되어 있다. 생각하기에서는 '등식의 성질을 이용하여 $ax=b(a\neq 0)$의 꼴로 고쳐서 푼다.'고 제시하며, 문제 해결을 위한 전체적인 방법을 제시하고 있다. 풀이 단계에서는 양변에 미지수를 포함한 항을 좌변, 상수항을 우변으로 모으는 과정을 제시하고, 일차항의 계수를 1로 만들기 위해서 등식의 성질을 이용하고 있다. 항을 소

거하는 순서는 먼저 양변에 5를 빼서 좌변에 있는 상수항을 소거 했으며, 양변에 $2x$를 더하여 우변의 일차항을 소거했다. 그리고 양변을 3으로 나누어 일차항의 계수를 1로 만들었고 $x=-3$이라는 해를 구하였다. 검산 단계에서는 풀이를 통해 얻은 해가 맞는지 알아보기 위해 주어진 식의 양변에 $x=-3$을 대입해서 (좌변)=(우변)이 성립하는지 확인하여 정확한 해를 구했는지 점검하고 있다.

<그림 Ⅳ-12>의 예제는 미국 교과서의 '복잡한 일차방정식의 풀이' 단원에 제시된 문항이다. 이 문항을 해결하기 위한 과정으로 'Solution→Answer→Check' 가 제시되어 있다. Solution 단계에는 distributive property를 이용해서 괄호를 풀고 'combine like terms'를 해서 식을 간단히 하는 과정이 포함되어 있다. 그 이후에 항을 소거하는 순서는 양변에 $2x$를 더해서 문자를 포함한 항을 먼저 소거 했으며, 'combine like terms'로 동류항을 정리하였다. 그리고 양변에 4를 빼서 상수항을 제거하였으며, 'Simplify'를 통해 식을 간단히 하여 해를 구하고 있다. 문자식을 간단히 하는 과정에서는 동류항 정리라는 말을 사용하지만 상수항을 정리하는 과정에서는 식을 간단히 한다는 용어만을 사용하는 것을 알 수 있었다. 그리고 Answer에서 해는 -6이라고 정확히 말해 주고 있다. 방정식을 풀이한 후에 Check 단계에서는 해가 맞는지 준 식에 -6을 대입해서 체크하여 검산하라는 과정이 제시되어 있다.

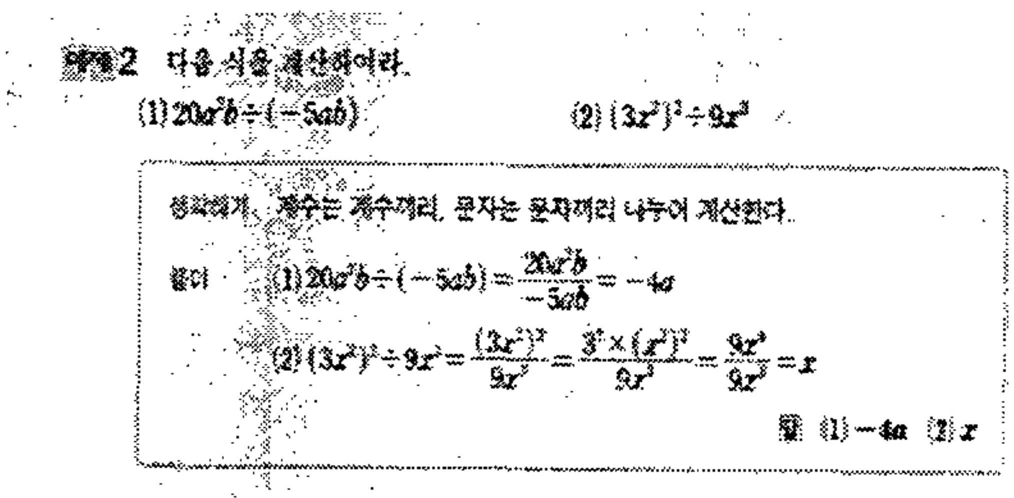
<그림 Ⅳ-13>의 예제는 일본 교과서의 '일차방정식의 풀이' 단원에 제시된 문항으로 등식의 성질과 이항이라는 개념을 학습한 이후에 제시된 문항이다. 문제를 해결하는 과정으로 解答(해답)이 제시되어 있다. 해답 단계에서는 'x를 이항하시오' 라는 풀이방법을 제시하며 방정식의 해를 구하고 있다. 그리고 이항하는 과정을 따로 자세히 보여주어 해를 구하는 과정을 설명하고 있다.

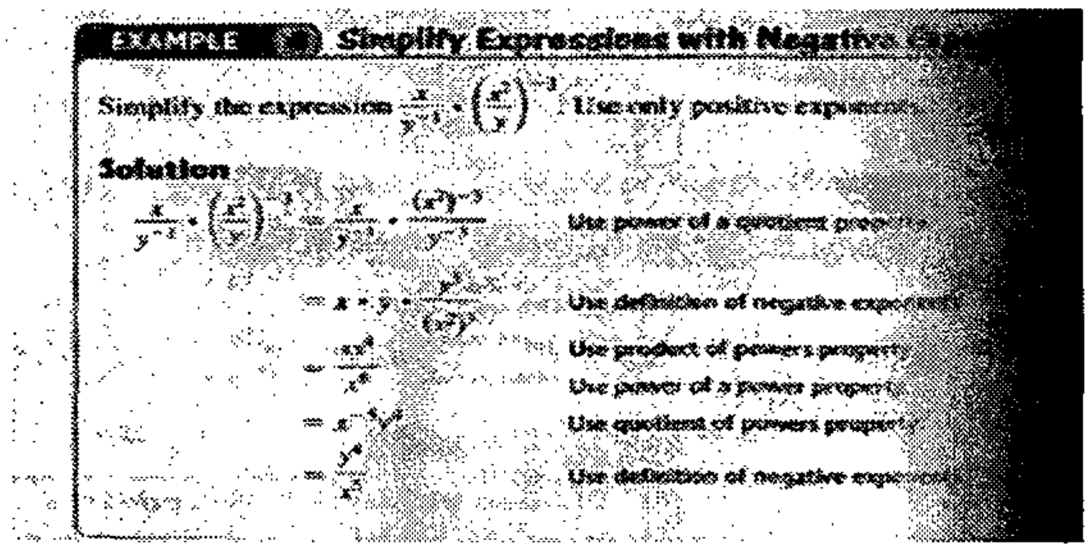
이상에서 한국, 미국, 일본 세 나라의 일차방정식 풀이 문항의 문제 해결 과정을 살펴보았다. 세 나라 모두 '방정식을 풀어라.'라고 간단하게 문제가 제시되었다. 그러나 문제 해결 과정에서는 한국은 생각하기라는 단계가 있어서 전체적으로 어떻게 문제를 해결해야 하는지 알 수 있게 해주었다. 미국과 일본은 생각하기 단계 없이 풀이 단계가 바로 제시되었다. 풀이 단계에서 한국과 미국은 등식의 성질을 이용해서 해를 구한다는공통점이 있었다. 그러나 동류항 정리와 식을 간단히 하는 과정에서는 한국 교과서의 문항에는 설명이 없었지만, 미국 교과서의 문항은 단계별로 설명이 제시되어 있다는 차이점이 있었다. 또한 항을 소거하면서 식을 정리 할 때, 한국은 상수항 정리 후 문자를 포함한 항을 정리하고 미국은 문자를 포함한 항을 먼저 정리하고 상수항을 정리하는 차이가 있었다. 그리고 일본은 이항이라는 개념을 도입 한 후에 풀이단계에서 등식의 성질을 전혀 사용하지 않았고, 단지 이항만을 이용해서 해를 구하고 있어서 가장 큰 차이가 있다는 것을 알 수 있었다.

또한 한국과 미국의 교과서에는 검산 단계를 통해 학생들이 문제를 바르게 해결하였는지 생각할 수 있도록 해주었다. 검산단계는 한국 교과서의 문항이 미국 교과서의 문항보다 자세하게 설명이 되어 있었다.

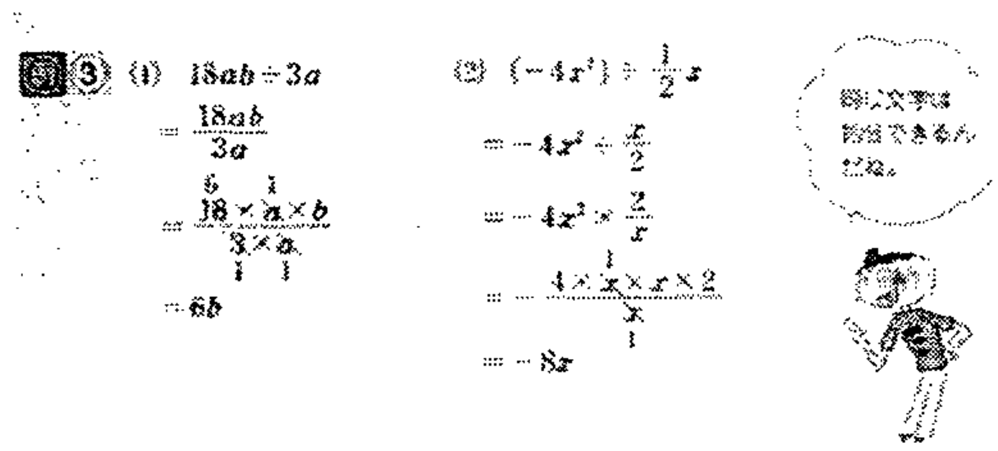
<그림 Ⅳ-14>의 예제는 한국 교과서 8-가의 지수법칙 단원 문항이다. 이 문항은 '다음 식을 간단히 하여라.'는 간단한 형태로 문제가 제시되어 있다. 해결 과정은 '생각하기→풀이'로 제시되어 있으며, 생각하기 단계에서는 '계수는 계수끼리, 문자는 문자끼리 나누어 계산한다.'라고 설명하면서 문제를 해결해 가는 전체 방향을 제시해 주고 있다. 풀이 단계에서는 나눗셈으로 제시된 식을 분수식으로 표현하여 식을 간단히 나타내고 있으며, 풀이 과정은 매우 간단하게 제시되어 있다.

② 구조를 표현하는 대수





<그림 Ⅳ-14>한국 중학교 8-가(중앙, p.56)　　<그림 Ⅳ-15>미국 Algebra1 (p.464)



<그림 Ⅳ-16>일본 중학교 수학2(p.14)

<그림 Ⅳ-15>의 예제는 미국 교과서의 지수법칙 단원의 문항이다. 이 문항은 'Simplify the expression $\frac{x}{y^{-1}} \cdot (\frac{x^2}{y})^{-3}$. Use only positive exponents' 고 문제를 제시하면서 지수법칙을 사용하여 풀이 하도록 문제가 구체적으로 제시되었다. 문제를 해결하는 'Solution' 단계에서는 식을 간단히 하는 각 단계마다 'power of a quotient property', 'definition of negative exponents', 'product of powers property', 'power of power property', 'quotient of powers property', 'definition of negative exponents'라는 설명이 있어서 어떠한 지수 성질이나 정의가 이용되는지 알 수 있게 해준다. 전체적인 풀이가 매우 구체적으로 제시되어 있다.

<그림 Ⅳ-16>의 예제는 일본 교과서의 지수법칙 단원의 문항으로 문제 제시 없이 식을 정리하는 과정만 보여 주고 있다. 하나의 예제에 두 개의 문제가 제시되어 있는데 두 문제 모두 식의 나눗셈을 간단히 정리하는 문제이다. 첫 번째 문제는 나눗셈을 분수식으로 바꾸고 $18ab$와 같이 곱셈이 생략된 식을 $18\times a\times b$로 곱셈을 이용한 식으로 나타내어 수와 문자를 약분하였다. 두 번째 문제는 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 수와 문자를 약분하여 식을 정리하였다.

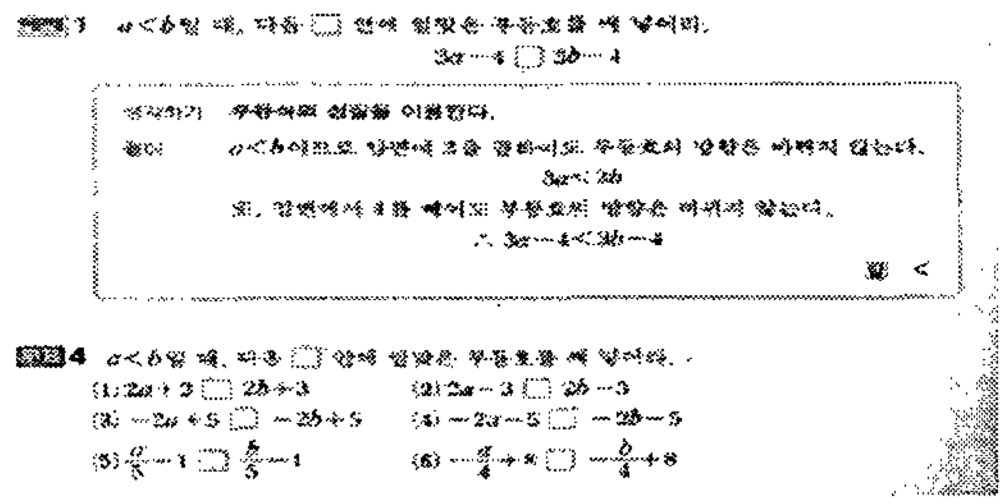
세 나라 모두 같은 형태의 문항이지만 문제를 제시하는 방법에서 미국은 명확한 방법을 요구하였고 한국은 식을 간단히 하는 것만 제시되어 있으며 일본은 문제의 제시 없이 식을 바로 해결하고 있다.

풀이단계에서 한국과 일본은 식을 간단히 하는 과정만이 제시되고 있다. 반면, 미국의 경우 각 단계가 진행될 때마다 어떤 성질이나 정의가 이용되는지 함께 설명하고 있다. 즉, 지

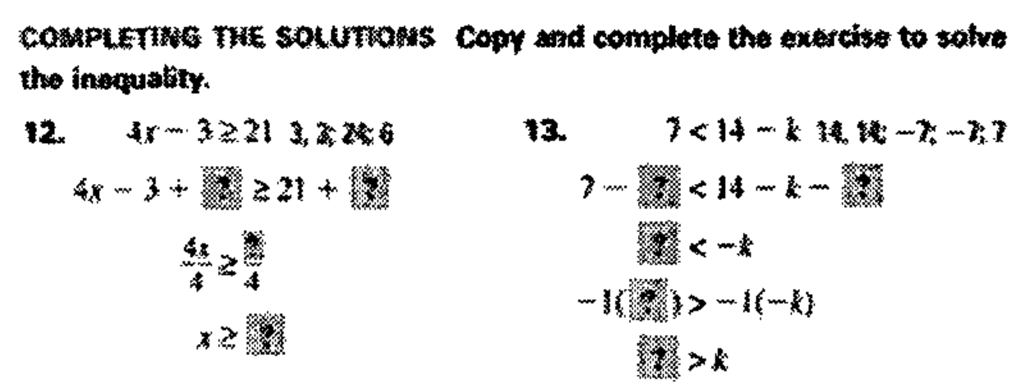
수법칙이라는 일반화된 내용이 문제를 해결하는 과정에서 어떻게 이용되는지 하나하나 설명이 되어 있다.

③ 양 사이의 관계를 나타내는 대수

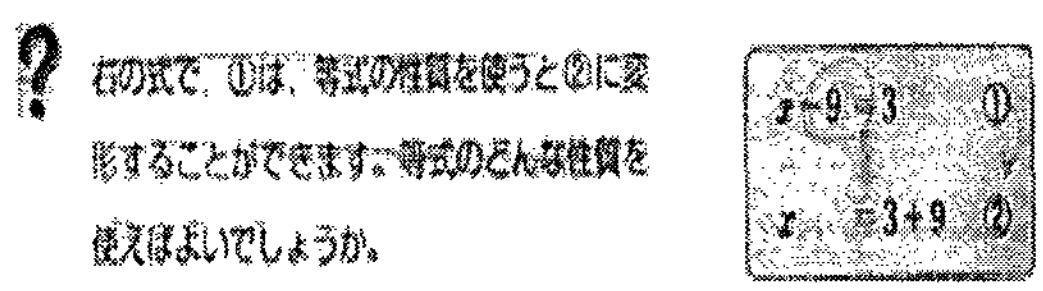
세 나라 교과서의 문항 중 양 사이의 관계 영역에서의 다루는 문항으로 한국과 미국은 부등식의 영역에서 일본은 일차방정식의 풀이에서 문항을 선정하여 살펴보았다. 일본의 경우 본 연구자가 선정한 중학교 1, 2학년의 교과서에는 부등식 단원이 없었기 때문에 부등식을 이용한 양 사이가 없었다. 그래서 양 사이의 관계를 나타내는 대수 영역에 대한 문항의 비교는 다른 형태의 문항으로 선정하여 비교 하였다.



<그림 Ⅳ-17>한국 중학교 8-가(중앙, p.101)



<그림 Ⅳ-18>미국 Algebra1 (p.339)



<그림 Ⅳ-19>일본 중학교 수학1(p.77)

<그림 Ⅳ-17>는 한국의 교과서 8-가 단계에 나오는 문항으로 '$a<b$일 때, 다음 □안에 알맞은 부등호를 써 넣어라.'는 문제이다. 이 문항은 연산된 수에 따라 양변의 값이 어떻게 달라지는지 비교하고 부등호를 결정하는 문항이다. 문제를 해결하는 과정은 '생각하기→풀이' 단계로 제시되어 있다. 생각하기 단계에서는 '부등식의 성질을 이용한다.'라고 제시하며 문제를 해결하는 방법을 알려준다. 풀이 단계에서는 생각하기 단계에서 제시된 부등식의 성질을 이용하여 $a<b$라는 식에서 처음 주어진 부등식을 유도하며 부등호를 결정한다.

<그림 Ⅳ-18>은 미국의 교과서에 나오는 문항으로 부등식의 해를 구하는 과정을 단계적으로 보여 주면서 빈칸을 채우는 문제이다. 이 문제를 해결하기 위해서는 다음 단계에 제시된 식이나 값을 보고 지금의 식에 어떤 수나 식을 빈칸에 채워야 하는지 구하는 문제이다. 빈칸을 채우기 위해서는 부등식의 성질 중 어떠한 것이 이용되었는지 함께 생각하고, 다음 단계의 식과 지금의 식에서 양변의 값에 대해서도 이해하고 있어야 한다.

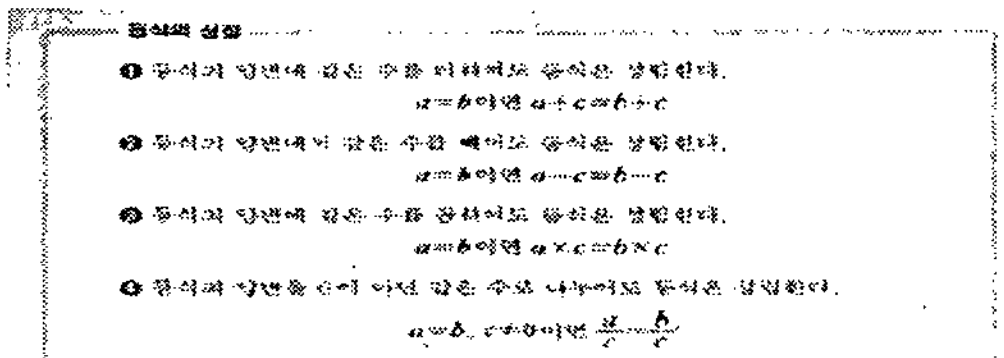
<그림 Ⅳ-19>은 일본 교과서의 문항으로 '오른쪽 식에서 ①은 등식의 성질을 사용하면 ②로 변형할 수 있다. 어떤 등식의 성질을 사용하면 좋을까?'라는 문제이다. 부등식 단원의 문항은 아니지만 이러한 문항을 해결하기 위해서는 각 단계에서 식의 양변을 비교 하여 어

떠한 값을 소거하였는지 생각해야 하면서 문제를 해결해야 한다.

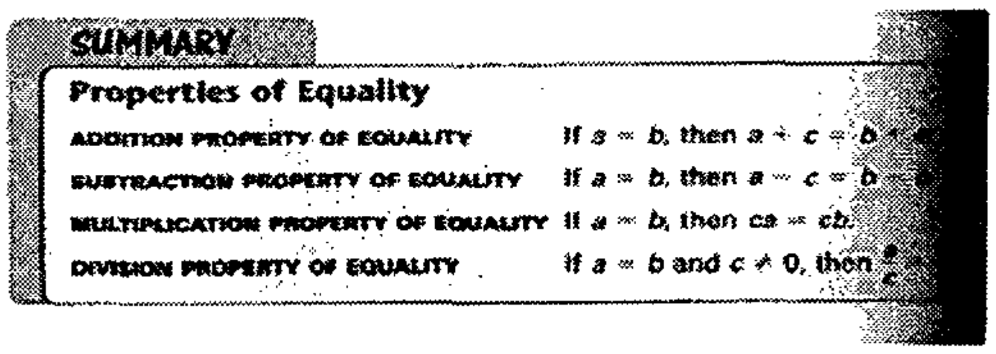
세 나라 교과서 문항 중 양 사이의 관계 영역에 해당하는 문항은 부등식 단원이 일본 교과서에는 없어서 다른 형태의 문항을 비교해 보았다. 한국과 미국은 부등식 단원의 문항으로 비교하였는데 한국은 양변을 비교하여 부등호를 결정하는 문제였고, 미국은 부등식의 성질을 알고 양변에 공통으로 연산되는 값을 구하는 문제였다. 같은 부등식 단원의 문항이었지만 양 사이의 관계 문항은 형태가 다르게 제시되어 있음을 알 수 있었다.

④ 일반화된 산술로서의 대수

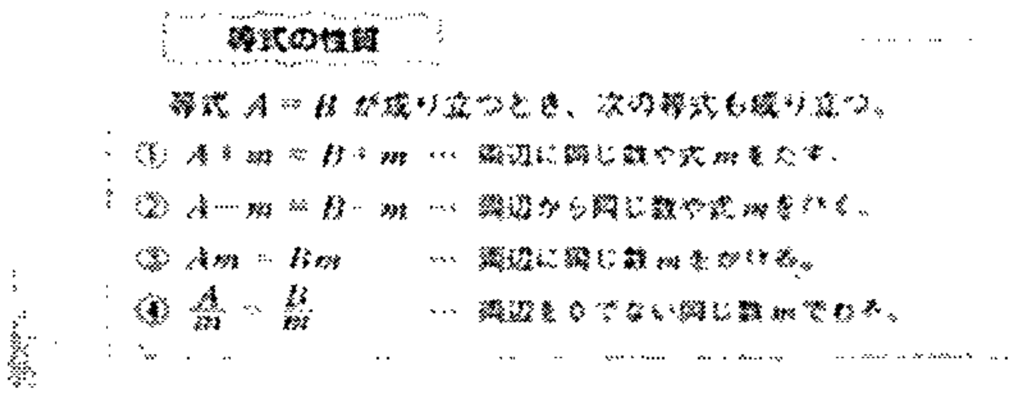
세 나라 교과서의 문항 중 일반화된 산술로서의 대수 영역에서 다루는 문항으로 등식의 성질을 선정하여 살펴보았다.



<그림 Ⅳ-20>한국 중학교 7-가(중앙, p.120)



<그림 Ⅳ-21>미국 Algebra1 (p.140)



<그림 Ⅳ-22>일본 중학교 수학1(p.74)

세 나라의 교과서 문항 모두 등식의 성질을 일반화하여 표현하는 방법으로 문자식과 함께 글로 설명한다는 공통점이 있었다. 그러나 문자의 사용에서 <그림 Ⅳ-22>의 일본 교과서 문항은 $A=B$와 같이 대문자를 이용해서 등식의 성질을 설명했다. 반면 <그림 Ⅳ-20>과 <그림 Ⅳ-21>의 한국과 미국의 교과서 문항은 소문자만을 이용해서 등식의 성질을 설명하고 있다. 대문자의 사용은 식을 표현할 때 숫자만 대신해서 사용한 것이 아니라 문자를 포함한 식까지 일반화해서 표현할 수 있다. 그러나 소문자는 일반적으로 숫자만을 대신해서 사용한 것처럼 생각할 수 있다. 이처럼 같은 개념을 설명하고 있지만 문자의 사용에서 차이를 보인다는 것을 알 수 있다.

(2) 한국, 미국, 일본의 대수 정의 비교

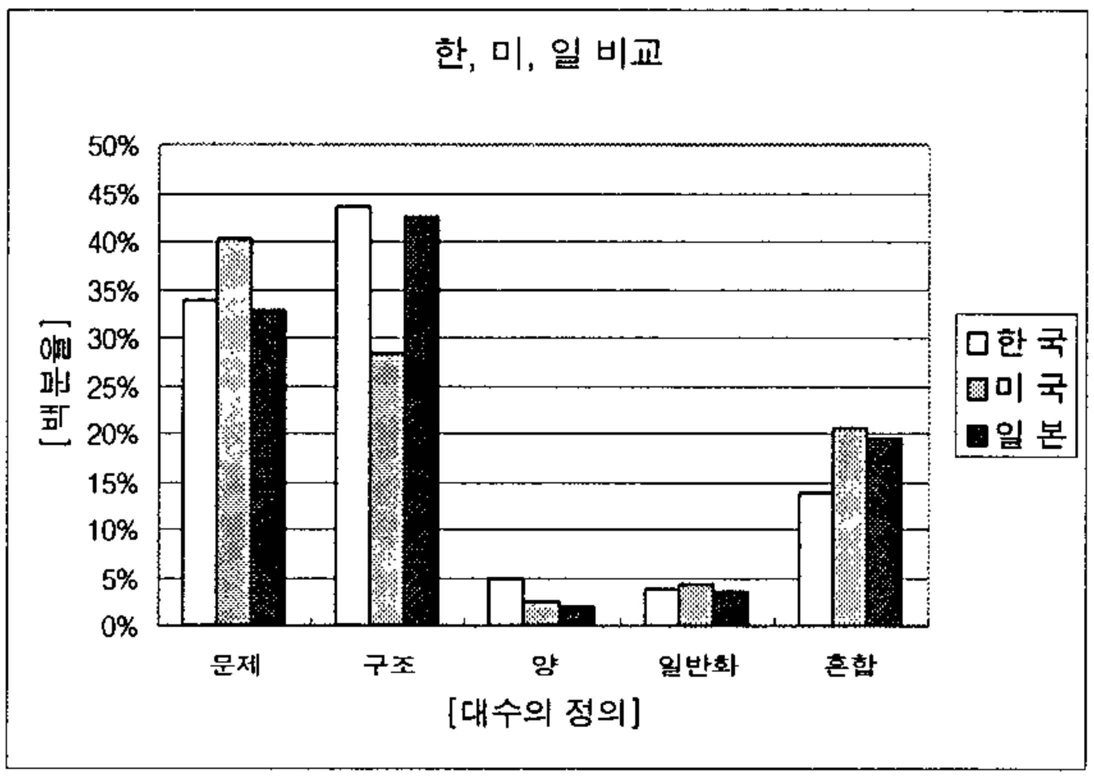
세 나라의 교과서 문자와 식 영역에 해당하는 문항을 분석한 내용을 종합해서 표와 그래프로 제시하면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-5>에서 세 나라의 문항수를 비교해 보면 한국과 일본에 비해서 미국 교과서의

문항수가 많다는 것을 알 수 있다. 이러한 차이는 미국의 경우 반드시 학습해야 할 핵심적인 내용이 실려 있는 것이 아니라 추후에 적당하게 취사선택되리라는 전제 하에 학습 가능한 수학 내용이 총망라되어 서술어 있기 때문이다. 반면, 한국이나 일본은 국가 수준의 단일 교육과정이 존재하여 교과서에 담겨 있는 모든 내용을 학생들이 접할 수 있도록 교육하는 것으로 인식되어 있어서 교과서 문항수가 미국에 비해 적은 것이다. 전체적인 문항수 뿐만 아니라 미국 교과서는 연습문제의 문항수가 본문의 문항수의 약 3배 정도 된다. 취사선택되리라는 전제 하에 교과서가 집필되었지만 연습문제가 많은 것으로 보아 미국의 교육이 자기 주도적 학습을 강조하고 있음을 알 수 있게 해준다.

<표 Ⅳ-5>한국, 미국, 일본의 대수 개념 비교

유형 \ 나라		한국	미 국	일본
문제	문항수	431	1185	115
	백분율	33.8	40.3	32.6
구조	문항수	554	833	150
	백분율	43.5	28.4	42.5
양	문항수	62	71	7
	백분율	4.9	2.4	2.0
일반화	문항수	50	127	12
	백분율	3.9	4.3	3.4
혼합유형	문항수	176	604	69
	백분율	13.8	20.6	19.5



<그림 Ⅳ-23>한, 미, 일 대수 정의 비교 그래프

각각의 대수 정의의 분포를 보면 문제해결 과정으로서의 대수의 백분율은 한국과 일본은 33.8%, 32.6%이고 미국은 40.3%로 차이가 있다. 구조를 표현하는 대수 역시 한국과 일본은 43.5%, 42.5%이고 미국은 28.4%로 전체적인 비율의 차이를 보이고 있다. 이러한 차이에서 알 수 있듯이 한국이나 일본은 중학교에 들어와서 처음 접하게 되는 문자를 사용한 식을 학생들이 이해할 수 있도록 그 구조적인 면을 강조하고 있다. 문자식에서 미지수의 값을 구하는 것도 중요하지만 그전에 식에 대한 이해와 그러한 식의 조작을 용이하게 할 수 있도록 하는 내용이 선행되어야 한다는 것이다. 미국의 교과서에 구조를 표현하는 대수의 비율이 적게 나타난 것은 본 연구에서 선정한 Algebra 1의 단계가 높기 때문인 것으로 생각된다. 미국의 교과서는 1-12학년 내용을 학습한 이후에 더 심화된 내용으로 각 영역에 대한 내용을 학습한다. 그러한 교과서 중의 하나인 Algebra 1은 심화된 교과서이기 때문에 이미 학습한 대수식의 구조에 대한 학습의 비율이 낮게 나타난다고 할 수 있다.

세 나라의 교과서에서 강조되는 대수의 정의에는 약간의 차이가 있지만 세 나라 모두 문제해결 과정으로서의 대수와 구조를 표현하는 대수가 강조 되고 있다. 이것은 역사적으로 새수학운동 이후 대수의 구조가 강조되어지고, 그 이후 'Problem solving'으로 문제해결력을 중심으로 대수를 정의하고자 하기 때문이다. 문제 해결은 방정식의 풀이뿐만 아니라 미지수의 조작을 동시에 강조하고 있기 때문에 대수를 이해하기 위한 첫걸음으로 두 정의가 강조되어 교과서가 기술되어 지는 것이다.

양 사이의 관계를 표현하는 대수와 일반화된 산술로서의 대수 비율은 세 나라 모두 5%미만으로 매우 낮게 나타났다. 이러한 분포는 앞 절에서 제시한 바와 같이 대수 영역을 문자

와 식 영역으로 한정해서 분석하였고, 두 영역은 단독 유형보다는 혼합유형에 많이 포함되어 있기 때문이다.

또한 일반화된 산술로서의 대수의 경우 임의의 수나 식에 대한 내용을 함축적으로 표현한 것이고, 이것을 이해하기 위해 많은 문제를 해결해 보는 것이 필요하기 때문에 비율이 낮은 것이다.

혼합유형은 대수의 네 정의가 포함되어 있는 문항들이고 실생활문제나 타교과와 관련된 문항을 수학적으로 해결하는 문항이 있기 때문에 수학을 공부하는 학생들이 대수의 필요성을 알 수 있게 해준다. 이 유형의 문항은 앞 절에서 제시한 바와 같이 미국의 경우 모든 소단원에 실생활 문제가 함께 수록되어 있어서 현재 배우는 내용이 어디에 사용되는지 바로 인식할 수 있게 되어 있다. 반면. 우리나라의 수학 교과서는 단원의 시작에 탐구활동에서 실생활 문제를 다루고 있지만, 시작 이외의 내용을 제외하고는 마지막 소단원에 활용문제 단원을 따로 두어 활용문제만 한꺼번에 학습할 수 있도록 책이 구성되어 있다. 이것은 일본 교과서에도 비슷하게 나타나는 구조이다. 이러한 구성은 학생들이 쉽게만 생각했던 단순한 형태의 방정식 문제들만 다루던 학생들이 한 단원을 끝내고 새로운 소단원으로 문장제 문제만 접하다 보니 앞에 배운 내용과의 연관성을 알기 쉽지 않고 활용 단원을 어려워하게 되는 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 대수의 유형을 분류한 여러 이론 중 대수의 다양한 의미를 포괄적으로 정의한 Usiskin의 이론을 토대로 한국, 미국 그리고 일본의 교과서에 나타난 문항들의 대수 개념을 비교 분석하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

첫째, 한국의 수학 교과서 '문자와 식' 영역에 제시된 문항들은 국가수준의 교육과정에 의해 집필되어서 대수의 정의가 출판사에 관계없이 대동소이하다.

둘째, 한국의 수학 교과서 '문자와 식' 영역에는 구조를 표현하는 대수와 문제 해결과정으로서의 대수 문항이 집중되어 있어 대수의 다양한 의미가 골고루 서술되어 있지 못하다. 즉, 한국의 대수 교육과정의 문자와 식 영역의 교육 목표에 제시된 '간단한 대수식의 해결이나 대수식의 구조를 이해한다'는 목표를 달성하기 위한 문항들은 많이 있지만 '양사이의 관계를 이해하여 실생활의 여러 가지 문제를 조직, 표현, 해결할 수 있도록 해 준다.'라는 교육 목표를 위한 문항의 비율이 낮다. 이것은 국민공통기본교육과정의 수학 내용 6가지 영역 중 본 연구자가 대수 영역을 '문자와 식' 영역으로 한정하여 분석하였기 때문이다. 대수 영역은 '수와 연산', '규칙성과 함수' 영역까지 포함해서 생각 할 수 있는데, 일반화는 '수와 연산' 영역의 연산의 성질에서 주로 나타나고, 양 사이 관계는 '규칙성과 함수'영역에서 나타날 것이다.

셋째, 한국의 수학 교과서 각 단원마다 대수의 다양한 개념 중 특정한 개념이 편중되어 서술되어 있다. 문자와 식 영역의 첫 단원에는 구조를 표현하는 대수가 66.7%, 그 다음 단원에서는 문제해결 과정으로서의 대수가 54.2%로 한 단원을 학습함에 있어서 하나의 내용이 매우 강조되어 서술되어 있다. 구조를 표현하는 대수의 학습이 중요하지만 수학이라는 과목이 기호와 알고리즘의 조합으로 제시되어 학생들이 수학을 어렵게 느끼는 요인이 될 수 있다. 그리고 대수식의 구조를 학습한 후에 문제해결이 강조되고 있는데, 학생들의 문제해결력 신장을 위해 문제해결 과정으로서의 대수 역시 중요하지만 이러한 구성은 학생들이 문자

와 식 영역을 단순한 방정식의 풀이로 인식할 수 있다는 문제점이 있다. 이러한 점을 고려하여 교과서 내용에서 대수의 다양한 의미가 고르게 분포되도록 교과서가 집필되어야 할 것이다.

넷째, 한국, 미국, 일본의 수학 교과서에 제시된 문항 중 Usiskin의 대수 개념에 해당하는 문항을 비교한 결과 문제 제시 방법은 동일했다. 그러나 문제 풀이 과정에서 미국 교과서의 문항은 문제해결 단계마다 법칙이나 성질을 사용해서 설명하여, 학생들의 이해를 돕고 있다. 문제해결과정영역에서 다루어지는 문항에서 한국과 미국은 문제를 풀이하는 각 단계에 어떠한 성질이 이용되었는지 하나하나 설명해 주고 검산의 과정을 거치는 공통점이 있었다. 특히, 미국은 그 단원에서 학습한 성질뿐만 아니라 그 외의 정의나 성질 등을 이용해서 풀이 과정을 자세히 설명했다. 구조를 표하는 문항에서도 같은 유형의 문항이었지만 풀이 과정에서 미국은 각 단계에서 사용되는 성질이나 법칙, 정의 등을 이용해서 자세히 설명했다. 이러한 설명은 학생들이 문제 풀이를 이해하는데 도움이 될 수 있다. 또한 법칙이나 성질들을 암기 하는 것에 그치지 않고, 문제에 적용 시키며 이해 할 수 있게 된다.

다섯째, 한국, 미국, 일본의 수학 교과서 모두 구조를 표현하는 대수와 문제해결과정으로서의 대수의 비율이 가장 높게 나타나고 있다. 특히 한국과 일본은 구조를 표현하는 대수가 약 40%로 가장 높은 비율을 차지하고 있으며, 미국은 문제 해결 과정으로서의 대수가 약 40%로 가장 높다. 이것은 본 연구에서 분석한 Algebra 1 교과서가 한국과 일본의 중학교 내용과 비슷하지만 미국 교과서 Algebra 1은 1-12단계의 내용을 배운 후에 더 심화해서 학습하는 내용이기 때문에 대수식의 구조에 대한 내용은 비율이 더 낮은 것이다.

여섯째, 미국의 수학 교과서는 한국과 일본의 교과서와 달리 문항 수가 많았으며, 특히 연습문제의 문항수가 본문의 문항수의 약 3배였다. 이러한 사실은 미국의 교육에서 자기 주도적 학습이 강조됨을 알 수 있다. 문항 수의 차이는 교육과정에서 미국은 국가 수준에서의 단일 교육과정이 없기 때문에 미국의 교과서는 추후에 취사선택 될 것이라는 전제 하에 모든 내용이 총망라되어 집필되었기 때문이다. 반면 한국과 일본은 국가 수준의 단일 교육과정을 기준으로 교과서가 집필되어 있기 때문에 교과 내용의 완전학습을 위해 문항수가 적게 나타난다고 할 수 있다. 특히, 한국과 일본의 교과서는 연습문제 보다 본문의 문항수가 더 많은 것에 반해서 미국 교과서는 연습문제가 본문의 문항수의 약 3배를 차지한다. 이렇게 연습 문항이 많게 나타나는 것은 미국의 교육은 학교 수업도 중요하지만 학생 스스로 해결하도록 하는 자기 주도적 학습이 강조되고 있음을 알 수 있게 해준다.

이러한 점을 고려하여 교육과정이 앞서 있는 나라의 교과서 구성을 참고하여 대수의 정의가 각 단원에서도 고르게 분포될 수 있도록 해야 할 것이다. 또한 각각의 대수 문항에 대해 관련된 실생활 문제를 다루어 봄으로써 수학을 배우는 학생들에게 수학의 실용성을 느낄 수 있도록 해야 할 것이며, 이러한 문항을 학습함으로서 대수의 다양한 의미를 인식할 수 있도록 해야 할 것이다.

이상의 결과를 통해 세 나라의 수학 교과서의 문자와 식 영역에는 대수의 정의가 어떻게 서술되어 있는지 알 수 있었다. 그 결과 구조를 표현하는 대수와 문제해결 과정으로서의 대수에 치우쳐져 교과서가 집필되어 있는 것을 알 수 있었다. 본 연구에서 분석한 내용이 문자와 식 영역임을 고려하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 대수의 영역을 수와 연산, 규칙성과 함수 영역까지 확대해서 분석해 보고 교과서의 문항에 담겨있는 대수의 정의를 더 명확히 알아 볼 필요가 있을 것이다.

둘째, 대수의 정의에 대한 분석을 바탕으로 교사는 학생들을 지도 할 때 교과서 문항들의

대수 정의가 잘 드러나도록 지도해야 할 것이다. 그러기 위해서 교사는 교과서에 있는 문항들이 어떠한 의미를 가지고 서술되어 있는지 인식한 상태에서 교육이 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

강행고 외 9인 공저 (2007). 중학교 7-가 (주)중앙교육진흥연구소.

강행고 외 8인 공저 (2007). 중학교 8-가 (주)중앙교육진흥연구소행.

강행고 외 8인 공저 (2007). 중학교 9-가 (주)중앙교육진흥연구소행.

교육인적 자원부 (2001). 중학교 교육 과정 해설(Ⅲ) 대한 교과서 주식회사.

김남희 (1997). 변수개념의 교수학적 분석 및 학습-지도방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김성준 (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김혜경 (2006). 제 7차 수학과 교육과정에서의 대수적 구조에 대한 지도 방안 연구. 단국대 교육대학원.

노정학, 양춘우, 정환옥 (2003). 한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교 연구-중학교 대수 영역을 중심으로-.한국수학교육학회지 시리즈 A 42(3) pp. 275-294.

신만식 (2005). 중학교수학에서 문자와 식 단원의 학습지도에 관한 연구. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.

양승갑 외 6인 공저 (2007). 중학교 7-가 (주)금성출판사.

양승갑 외 6인 공저 (2007). 중학교 8-가 (주)금성출판사.

양승갑 외 6인 공저 (2007). 중학교 9-가 (주)금성출판사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

이희성 (1998). 한국 중국 러시아의 중학교 수학 교과서의 대수 문제 유형 분석. 한국 교원대학교 대학원 석사학위 논문.

著作者 一松 信, 岡田褘 ほか29名 (平成 17年). 中學校 數學1 學校圖書株式會社.

著作者 一松 信, 岡田褘 ほか29名 (平成 17年). 中學校 數學2 學校圖書株式會社.

Larson, Boswell, Kanold, Stiff (2001). Algebra 1. McDougal Littell Inc.

NCTM . 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 옮김 (2007). Principles and Standards for School Mathematics. (학교수학을 위한 원리와 규준).

Usiskin, Z (1999). Why is Algebra important to learn. (Teachers, this one's for your students!), Algebraic thinking, grades K-12 (Page 22-30). NCTM.

The Analysis of Algebra Conception in Mathematics Textbooks of Korea, America and Japan

Lim, Mi-Ran[7) · Song, Yeong-Moo[8)

Abstract

This paper is based on theory of Usiskin who defined inclusively the various concepts of algebra among many theories classifying a type of the algebra. For this purpose, we examined the curriculum of the algebra of Korea, America and Japan, then analyzed where the problems in "Letter and Formula" of the textbooks fall under Usiskin's concepts of algebra.

Key Words : Means to solve certain problems, Structure, Study of Relationships, Generalized arithmetic

7) Sunchon National University, Graduate School (mirani35@nate.com)
8) Sunchon National University (ymsong@sunchon.ac.kr)