한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 1, 69-96, March 2008

중등기하에서 Freudenthal의 수학화 활동을 위한 학습자료 개발과 적용

최종철[1] · 김홍철[2]

본 논문은 현행 중등수학에서 기하교육의 문제점을 인식하고 Freudenthal의 학습이론에 토대를 둔 수학화 활동에 적합한 학습자료의 개발 및 교수-학습활동에 따른 수학화 과정을 분석하는데 그 목적이 있다. 이를 위해 중학교 수학 8-나 단계 기하영역을 중심으로 Freudenthal의 학습 이론과 관련된 활동 중심의 학습자료와 van Hiele의 학습 단계 이론을 토대로 교수-학습 모형을 개발하여 수업에 적용한 후 수학화 활동의 효과를 분석한다.

주요용어 : 중등기하, 수학화 활동, 학습 수준 이론, 교수-학습 모형

Ⅰ. 서 론

수학교육을 위협하고 있는 근본적인 문제점은 수학의 형식성과 논리적 엄밀성에 집착하려는 경향이 강하고 학생의 교육 참여의 기회가 극히 제한되어 학습지도가 변수에 특별한 수치를 대입하는 형태의 연습문제 해결 위주로 이루어지고 있다는 점이다. 연습문제는 검사자료가 되고 결국 교육의 목표가 된다. 이러한 수동적인 연습문제 풀이방식의 학습을 탈피하고 실증적이고 생동감 있게 목표에 부합되는 수학의 학습을 구현하려면 사고활동으로서의 수학을 보다 구조주의적 입장에서 지도하는 문제를 고려할 수 있다. 학생들의 직관, 통찰, 이해, 사고의 원천을 열어 점진적인 형식화가 이루어지도록 함으로써 현실 상황을 수학적 수단으로 조직화할 수 있는 응용 가능한 수학의 학습이 이루어지도록 교수 학습 방법을 체계화하여야 한다.

Freudenthal(1991)은 수학을 내용과 형식의 상호작용의 조직화와 발견의 활동으로 간주하고, 실제적인 문제 상황으로부터 출발하여 점진적 수학화 과정을 거쳐 구성된 실제적인 지식으로 수학이 재구성되어야 한다고 주장하였다. 이에 따라, 수학교육에 있어 기성의 수학적 지식을 단순하게 전달하는 수동적인 방식을 탈피하고, 창조적인 활동에 의한 수학화 과정을 통해 학생들이 수학의 유용성을 체험할 수 있도록 할 것을 주장하고, 수학의 유용성을 중시하는 만인을 위한 수학교육을 통해 대중의 수학적 안목을 높이고자 하였다. 즉, 그는 수학을

1) 장호중학교 (ccc5810@hanmail.net)
2) 강릉대학교 (hongchul@kangnung.ac.kr)

만들어진 수학적 활동의 결과로 보는 기성수학과 만들어지고 있는 수학화 활동으로 보는 실행수학으로 구분 짓고 활동으로서의 수학을 강조하였다. 또한 수학을 인간의 활동으로서 교사의 적절한 안내를 통해 학습자가 재발명해 나가야 한다고 보고, 수학의 내적 · 외적 상황이나 문제와 관련지어 수학을 창안하는 수학화를 학생들에게 경험시킬 필요가 있다고 주장하였다(정영옥, 1997; 우정호, 2000; 신은옥, 2006). 수학적 개념을 도입하기에 앞서 그 개념에 내재된 물리적 · 정신적 · 사회적 현상을 제시하고 이를 조직하는 경험을 통해 자연스럽게 개념을 형성시키도록 유도해야 한다는 것이다. 이러한 교육을 실천에 옮긴 것이 1970년대부터 네덜란드에서부터 연구되어 온 현실적인 수학교육(Realistic Mathematics Education, RME) 이론으로서, 우리나라에서는 1990년대 이후 RME에 관심을 보이기 시작하면서 여러 연구가 진행되고 있으나 단순한 동기유발이나 흥미유발 수준의 자료개발에 그치고 있고 양적 연구에 편중되어 있으며, 심층적인 자료개발과 같은 질적 연구는 부족한 실정이다.

현대사회에 있어서 수학의 응용 영역은 지속적으로 확장되고 있다. 특히, 기하교육은 수학뿐만 아니라 자연과학과 공학에 기하학적 방법과 사고가 충만해있고 기하학적 아이디어는 수학의 여러 영역과 실생활의 문제를 표현하고 해결하는데 유용하기 때문에 강조되지 않을 수 없다. 그러나 현행 우리나라 기하교육은 학생들의 사고력을 증진시키기보다 학생들의 수준에 비해 지나치게 엄밀한 논증기하를 가르치는데 편중되어 있어, 학생들은 그 증명과정을 이해하는 것조차 어려움을 겪고 있는 실정이다(이금주, 2007). 기하교육은 평면이나 공간에서의 기하학적 도형의 기본적인 사실에 대한 이해 이상으로, 연역적 추론 방법에 대한 이해와 나아가 창조적으로 사고하고 스스로 생각하도록 하는 능력의 신장에 초점을 두어야 할 것이다. 연역적 추론을 지도하는데 있어 기하만큼 효과적인 영역은 없다고 할 수 있으며, 대수와 달리 다양한 해결 방법이 존재하는 기하문제는 사고력을 신장시키는 좋은 소재가 될 수 있다. 대표적인 기하영역의 학습지도 이론은 van Hiele 부부의 학습 수준 이론으로서 1957년 Utrecht 대학에 제출한 박사논문에 처음 소개되었다. 1950년대 네덜란드의 초임교사였던 van Hiele 부부는 자신들이 지도하는 학생들이 기하 학습에 곤란을 겪고 있는 원인이 교사와 학생들 사이의 사고 수준의 차이에서 비롯된다는 것을 밝혀내고, 이를 극복하기 위한 방안으로 기하학적 사고 수준과 학습단계를 정립하고, 구성적 활동 및 재발견 과정으로 이루어진 단계별 학습과정을 통해 사고의 수준을 높여 나갈 것을 제안하였다. 이는 Freudenthal의 이론을 기하 학습 수준으로 구체화 한 것으로서 수학화를 학습하는 방법적 기초 이론으로 제시되었다.

본 논문에서는 중학교 기하영역을 중심으로 학교수학에서의 현행 기하교육의 문제점을 인식하고 그 해결방안으로 중학교 수학 8-나 단계 기하영역을 중심으로 교육과정의 분석을 통해 Freudenthal의 학습 이론과 관련된 탐구활동 중심의 학습자료를 개발하고, van Hiele의 기하 학습 수준 이론을 토대로 교수-학습 모형을 설정하여 수업에 적용한 후 수학화 활동의 효과를 분석한다.

II. 연구의 방법 및 절차

1. 연구방법

본 논문에서는 단순 문제풀이식의 수동적인 학습 방법을 탈피하여 학생들의 참여를 강조

하는 수학의 활동성과 안내된 재발명을 통해 교육에 있어서의 수학의 실용적 가치를 증진시켜야 한다는 Freudenthal의 수학화 과정 이론과 van Hiele의 수준별·단계별 교수 지도과정을 반영하여 중학교 기하영역의 지도에서 학생들의 학습 수준을 제고하기 위한 학습자료를 구안하고, 단계별로 학습활동을 수행하기 위한 세부적인 기획과 내용을 다루고자 한다. 이 연구에서는 중학교 2, 3학년 학생들을 대상으로 Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 기하영역의 학습자료를 개발하고, van Hiele의 기하 학습지도 이론을 활용한 교수-학습 활동을 실시하여 나타난 특징과 효과를 분석하고자 한다. 이를 위해 중학교 2학년 수학교과의 기하영역에서 문헌연구 및 교육과정을 분석하고 이를 토대로 수학화 활동을 수행하기 위한 학습자료를 개발하였다. 다음으로 van Hiele의 기하 학습지도 이론을 활용한 교수-학습 모형의 계발과 소규모 학급의 실정에 맞추어 보충・심화 학습 시간을 이용해 학습자료 및 탐구학습 활동지를 투입하여 수업을 진행한 질적 사례연구와 학생들의 반응을 관찰함으로서 수학화 과정의 효과를 분석하였다.

본 연구에서는 수학화 활동을 통해 학습 효과를 증진하고자 하는데 따른 교육과정의 기하영역의 고찰, 삼각형의 오심을 토대로 한 다양한 학습자료의 기안과 실험과정, 학습기획안 및 관찰일지 작성 등 세부 실행과정 등을 체계적이고도 구체적으로 기술하고, 연구의 효과 및 후속연구를 위한 제안점을 제시하고자 한다. 특히 삼각형의 오심을 토대로 한 학습자료의 기안은 지레의 원리, 생활 속에서의 사례 발굴, 실험, GSP를 이용한 작도 및 증명 등 다양한 방법으로 구성되었으며, 학습내용의 편성은 학습 수준 이론에 따라 질의안내단계로부터 탐구단계, 통합단계 등 단계별로 학습수준을 고양할 수 있도록 기안되었다. 또한 이러한 실험에 대한 학생들의 흥미도 및 학습태도의 변화를 알아보기 위해 관찰일지를 작성하여 학습지도방안의 개선자료로 활용하였다.

2. 연구절차

본 연구는 아래와 같이 문헌연구 및 교육과정 분석, Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 기하단원의 학습자료 개발, van Hiele의 지도이론에 근거한 교수-학습 모형 계발, 수학화 교수-학습 활동 실시 및 수학화 과정의 분석으로 추진하였다.

가. 문헌연구 및 교육과정 분석

Freudenthal의 수학화 활동에 적합한 자료의 개발을 위해 관련 전문 서적 및 논문을 분석하여 이론적 배경을 고찰한 후 연구의 방향을 정하고, 수학과 7차 교육과정의 기하영역을 분석하여 수학화 활동목표에 적합한 단원을 설정하였다.

나. Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 기하단원의 학습자료 개발

교수-학습 활동은 처음부터 형식적인 수학을 제시하지 않고 현실적인 문맥에서 출발하여 학생들로 하여금 수학적인 내용의 추출, 즉 수학적 개념, 구조, 아이디어를 재발명하도록 함으로써 수학의 필요성을 인식하고 점진적으로 형식화해 나가는 방향으로 이루어질 수 있도록 자료의 개발을 체계화하였다. 아울러 학교기하의 중요한 측면 중의 하나인 직관기하를 충분히 경험할 수 있는 기회를 제공하고, 다양한 활동을 통해 기본개념의 학습과 교사의 적절한 안내를 통해 직관적이고도 창의적인 방법으로 문제를 해결하고 탐구의 기회를 제공하는, 즉 수평적 수학화와 수직적 수학화를 경험할 수 있도록 자료를 개발하고자 하였다.

다. van Hiele의 지도 이론에 근거한 교수-학습 활동 모형 개발

van Hiele의 학습 수준 이론에 의하면 각 수준의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적절한 지도 때문에 지연될 수도 있으며, 앞의 수준의 사고에서 내재적이었던 것이 그 다음 수준에서 의식화 되어 명확히 인식하게 된다(우정호, 2000). 각 수준의 수학적 사고는 그 전 수준의 수학적 사고의 내적 질서를 대상으로 하여 연구하는 것이다. 또한 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 그를 연결하는 관계망을 갖고 있고, 수준의 이행은 언어의 확장과 관계되며, 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없는 현상이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있어, 사고 수준의 비약은 지도과정에서 다음과 같은 다섯 단계를 거쳐 이루어질 수 있으므로 이에 준하여 교수-학습 활동 모형을 개발하여 수업에 활용하였다.

1) 질의안내단계(제 1단계)

자료를 제시받고 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 한다. 초기단계로서 교사와 학습자들이 어떤 수준의 지도를 위해 학습목표를 이야기하고 대화를 통해 새로운 개념을 소개한다. 학습자들이 각 수준에 도달하기 위해 주어진 과제에 대해 관찰하고 질문하고 수준에 알맞은 용어가 소개된다. 예를 들면, 정사각형은 무엇인가?, 평행사변형은 무엇인가?, 그들은 어떻게 같은가?, … , 등등이다. 이런 활동을 통해 교사는 본 과제에 대해 과거에 배운 예비지식이 무엇인가를 확인하게 되고 학습자는 앞으로 어떻게 공부하는지 방향을 얻을 수 있다.

2) 제한된 탐구단계(제 2단계)

제시된 자료를 통해 탐구주제를 연구하면서 그 진행방향을 감지하고 탐구주제의 구조를 점진적으로 파악하는 단계로 학습자들은 짧고 신중하게 계열화된 활동을 통해 새로운 개념의 특징에 익숙해진다. 예를 들면, 모눈종이에 대각선이 같은 여러 크기의 마름모를 그리게 한다든지, 네 개의 각이 같은 마름모를 그리게 하는 활동을 들 수 있다.

3) 명확화 단계(제 3단계)

발표 및 표현 활동을 통해 발견된 관계를 명확히 하며 전문적인 용어를 학습하는 단계로서 관찰된 자기의 과정을 토론하고 교사의 역할을 최소화한 상태에서 학습자들은 그들의 개념화와 어휘를 정리한다. 예를 들면, 모눈종이를 마름모에 활용함에 있어 학습자의 활동을 통해 어떤 도형과 그 도형이 가지는 성질을 토론하고 정리한다.

4) 자유로운 탐구단계(제 4단계)

여러 가지 다양한 해결방법을 찾아봄으로써 탐구분야의 구조에 정통하게 되는 단계로 명확화 단계에서 보다 심층적인 과제를 제시함으로서 학습자들은 문제 해결적 성질을 갖는 보다 복잡한 과제에 도전하게 되고, 관계에 대한 깊은 조사과정으로 들어간다.

5) 통합단계(제 5단계)

학습자들 스스로 자기가 경험한 4단계를 종합하는 단계이다. 즉, 탐구활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 상승과 비약의 일보 전에 이르게 된다. 예를 들면 마름모의 성질이 학습자들에 의하여 종합된다. 5단계가 끝나면 다음 수준을 학습할 준비가 되어

있다. 학습자들은 그들의 관찰을 재검토하고 요약하며, 새로운 개념과 관련성을 종합한다. 교사는 학습자들에게 이전의 활동을 반성하게 하고 관찰을 명료화시킴으로써 학습자들을 돕는다.

라. 수학화 교수-학습 활동 실시

탐구수업은 학생들 자신의 구성 활동 뿐 아니라 상호작용, 즉 서로 토론하고, 참여하고, 타협하고, 협동함으로써 자신을 반성함은 물론 수준의 향상을 이룰 수 있으므로 교사는 설명 위주의 수업이 아닌 조력자로서의 역할을 담당할 때 효율적인 수학화 활동이 이루어질 수 있다. 따라서 이러한 상호작용을 원활히 하고 수학화 활동이 효과적으로 일어날 수 있도록 하기 위하여 이질 그룹으로 편성된 협동학습 형태의 탐구학습 중심으로 실시한다.

마. 수학화 과정의 분석

수업 전반에 걸쳐서 De Lange & Verhage(1987)의 4가지 단계에 따라 아래 [표 1]과 같은 수학화 과정의 분석 틀을 설정하고, 교사의 관찰자료와 학생의 면담자료를 토대로 내용을 종합하여 분석을 시행하였다.

[표 1] 수학화 과정의 분석 틀

구 분	내 용
수학화 과정의 단계	① 현실 세계에서 수학적 개념을 발견하고 있는가?
	② 학생들 간의 상호작용, 학생들과 교사와의 상호작용에 의해 수학적 개념의 추출 및 반성이 이루어지고 있는가?
	③ 수학적 개념의 원리와 이해를 통해 학습내용의 정리나 결과의 예상이 추상화되고 있는가?
	④ 창조적 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강조하고 현실에의 응용이 이루어지고 있는가?
수학학습에 대한 흥미 및 태도	· 학습에 대한 흥미는 향상되는가?
	· 학습활동에 적극적으로 참여하는가?

III. 연구의 실행

본 연구에서는 중학교 수학 8-나 단계에서 삼각형의 성질과 도형의 닮음 2개 단원을 중심으로 Freudenthal의 수학화 학습이론에 기초한 학습자료를 개발하였다. 개발과정은 7차 교육과정의 전 단계에 걸쳐 교과서의 기하영역에 대한 내용체계의 분석과 각종 문헌연구 및 인터넷 사이트를 통해 수집한 자료를 바탕으로 전문가의 자문을 거쳐 자료를 개발하고, 교수-학습 활동 모형의 구안과 수업활동을 통하여 수학화 과정을 분석하였다.

1. 선행연구 고찰 및 본 연구의 특성

본 연구를 효과적으로 실행하기 위해 아래 [표 2]와 같이 선행연구를 통해 연구 실태를

조사 분석한 후 Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 기하영역의 수학화 활동자료를 개발하고자 하였다. 자료개발은 현실에서 수학을 찾는 수평적 수학화에 국한하지 아니하고, 좀 더 깊이 있는 수직적 수학화의 계발에 주안점을 두었다. 특히 Freudenthal의 수학화 학습이론을 접목하고 van Hiele의 기하 수준 학습이론을 활용한 탐구학습 모형을 계발하여 수업지도에 적용함으로써 학생들의 탐구능력, 사고력 및 문제해결력을 신장시키고, 이러한 체계화된 교육기회와 경험을 통해 수학과에서 지도목표로 하고 있는 학생들의 '수학적 힘'을 기르고자 하였다.

[표 2] 선행연구 고찰

연도	연구자	주제	시사점
2005	박정혜	Freudenthal의 수학화 학습이론에 근거한 기하단원의 학습자료 개발 및 적용에 관한 사례연구 -7단계를 중심으로-	중학교 1학년 과정의 기하영역에 해당하는 수학화 학습자료 개발과 적용에 대한 사례연구로 본 연구자와 단계는 다르지만 같은 기하영역의 수학화 자료 개발로 수직적인 수학화 자료보다는 주로 수평적 수학화 자료의 개발과 현실적인 수학교육을 위주로 한 동기유발 효과에 초점을 두어 학습효과를 높였으며, 자료의 적용효과를 분석하기 위해 다양한 관찰 자료를 이용함.
2005	장은진	van Hiele 이론을 적용한 기하영역 지도방안 고찰	van Hiele의 학습지도 이론에 입각한 학습-지도 방안에 대한 고찰과 적용에 대한 연구로, 기하영역에서의 구체적인 활동 자료의 활용과 토론학습을 적용하여 학습의 효과를 높이고자 함.
2006	신은옥	Freudenthal의 수학화 교수-학습 이론	Freudenthal의 수학화 교수-학습 이론 및 귀납적 수업모형, 발견적 수업모형 및 기하수준 수업모형 등 수학과 탐구학습 모형에 대한 이론적 연구.
2006	송근정	삼각형의 오심의 성질 확장 -영재학습자료 개발-	영재학습자료의 개발을 위하여 삼각형의 오심의 성질을 분석하고 오심과의 위치관계를 분석, 하나의 중심을 고정하였을 때 다른 중심들의 좌표에 대한 연구 등을 대상으로 수학적 사고력의 향상을 위한 자료의 개발이 이루어짐.
2007	이금주	Van Hiele 이론에 기초한 교과서 분석과 효과적인 기하학습에 관한 연구	중학교 교과서 기하영역을 van Hiele의 수준이론에 따라 조사 분석하고 교수-학습 5단계에 따른 수업지도안 예시.

2. 중학교 기하영역의 학습자료 개발

1) 학습자료의 개발 방향과 특징

학습자료는 처음부터 형식적인 수학을 제시하지 않고 현실적인 문맥에 토대를 두어 수학적인 개념과 구조 및 아이디어를 재발명하도록 함으로써 수학의 필요성을 인지하게 하고 점진적으로 형식화해 나가고자 하는 점과 수학의 유용성을 체험하게 하려는 데 개발의 초점을 두었으며, 수평적 수학화와 수직적 수학화 활동이 적절하게 이루어지도록 교사의 안내된 재발명 방법과 국소적 조직화 활동 등을 통하여 형식적 수학의 의미를 더욱 잘 이해하게 하려는 데 목표를 두었다. 이를 위한 이론적 토대로서 Freudenthal의 수학화 학습이론과 van Hiele의 학습 수준이론을 참조하여 수학화 학습자료의 개발 방향을 다음과 같이 설정하였다.

(1) 학교기하의 중요한 측면 중 하나인 직관기하를 충분히 경험할 기회를 제공하도록 한다. 학생 주변의 다양한 상황을 바탕으로 학습자료를 구성함으로서 학생들이 스스로 학습내용을 재발명할 기회를 제공하도록 한다.

(2) 다양한 활동의 경험을 통해 기본 개념을 학습하도록 한다. 현행 교육과정에서처럼 학습 초기에 완성된 지식체계로서의 형식적인 기성수학의 개념을 학생들에게 직접 제시하는 것이 아니라 다양한 활동을 통해 이러한 기본개념을 창조적으로 학습할 수 있는 기회를 제공하도록 한다.

(3) 교사의 안내 하에 학생들이 수학적 내용을 학습할 수 있도록 한다. 교사의 적절한 안내 하에 수학자들이 수학을 발명했던 방법을 학생들이 되밟아 봄으로써 직관적이고 창의적인 방법으로 문제를 해결하는 탐구활동의 기회를 제공하도록 한다.

(4) 수학이 다른 여러 분야와 관련됨을 인식할 수 있도록 한다. 다양한 상황을 제시함으로써 수학의 발달이 다른 여러 학문 분야 및 실생활과 밀접하게 관련됨을 인식하게 하고 수학의 유용성과 흥미를 느낄 수 있도록 한다.

(5) 주변의 다양한 상황에서 수학적인 내용을 이끌어 내고 이를 형식화시켜서 점진적인 수준의 상승이 이루어질 수 있도록 한다. 학생 스스로 자신의 활동을 의식하고 반성하게 함으로서 전 수준의 활동이 다음 수준으로의 상승을 위한 기반을 제공할 수 있도록 한다.

2) 수학화 학습자료의 개발

탐구학습을 수행하기 위한 학습자료와 학습내용은 [표 3]과 같다.

[표 3] 수학화 학습자료

자료 번호	관련 학습 단원(소)	학습 내용	수학화 종류 수준별 구분
1	삼각형의	· 선분의 수직이등분선의 성질	· 국소적 조직화

	외심	-선분의 수직이등분선 위의 한 점에서 선분의 양 끝점까지의 거리는 같다. · 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다. · 삼각형의 외심의 성질 -삼각형의 외심에서 각 꼭지점까지의 거리는 같다.	· 기본학습
2	삼각형의 내심	· 각의 이등분선의 성질 -각의 이등분선 위의 점에서 두 변에 이르는 거리는 같다. · 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다. · 삼각형의 내심의 성질 -삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.	· 국소적 조직화 · 기본학습
3	삼각형의 오심	· 삼각형의 오심 작도 -외심, 내심, 수심, 방심, 무게중심 · 오심의 위치관계(오일러선) -삼각형의 외심, 수심, 무게중심은 일직선 위에 있다.	· 추론 · 일반화 · 심화학습
4	삼각형의 무게중심	· 중선의 개념 · 삼각형의 무게중심의 작도 · 삼각형의 무게중심의 성질	· 일반화 · 정의하기 · 기본학습
5	삼각형의 무게중심	· 사각형의 무게중심의 의미 · 사각형의 무게중심의 작도와 원리 · GSP를 활용한 오각형, 육각형,…, n각형의 무게중심의 작도 · 다양한 평면도형의 무게중심 찾기 · 입체도형의 무게중심	· 규칙과 패턴 찾기 · 추론 및 유추 · 일반화 · 수직적 수학화 · 심화학습

3. 기하영역의 교수-학습 활동 모형

van Hiele의 교수 지도 단계는 Burner의 발견학습과 유사하나 발견학습 자체보다는 교사가 방향을 제시해주는 인도된 발견(guided discovery)[3]과 더 유사하다고 할 수 있다. 실제로 초 · 중등학교에서 교사의 인도를 받지 않는 활동은 관리가 어렵고 비생산적인 경우가 많아 학습효과를 기대할 수 없는 경우가 많이 있다. van Hiele의 지도 단계는 기존의 주입과

3) 인도된 발견: 발견학습의 변용으로서, 학생들에게 주어진 대답이 어려운 질문, 당혹스러운 상황, 흥미로운 문제들이 주어지고 이런 문제들을 어떻게 해결하는지 설명하는 대신 교사는 알맞은 자료를 제공하고, 학생들 스스로 관찰하고 가설을 세우고 해답을 검증하도록 격려한다. 이때 교사는 가장 적절한 시점을 포착하여 피드백을 제공해주어야 한다. 가장 적절한 시점이란 학생들이 피드백을 받아서 지금까지의 접근법을 수정하거나, 또는 제대로 방향을 잡아서 나아가고 있다는 격려로 피드백을 받아들일 수 있는 시점이다.

증명 중심의 강의식 교수 지도 단계와는 달리 토론을 중심으로 구성되어 있으며, 이는 나 혼자만이 아닌 타인의 생각과 사고를 접할 기회를 통해 학습활동에 있어서 수학적 의사소통의 향상과 창의적 사고력을 신장시킬 수 있다. 따라서 기하학습을 van Hiele의 이론에 맞추어 지도할 경우 소그룹 학습이 효과적일 것이다. 현장 수업에서 이질적인 소그룹활동을 통해 지도하면 각각의 소그룹 내에서 학습자들의 활발한 상호 의견교환으로 사고의 다양성과 유연성 등 사고력과 창의력을 기를 수 있고, 먼저 이해한 과진아가 잘 이해하지 못한 부진아들의 학습에 도움을 주어 소그룹 내에서 자연스럽게 피드백 과정이 이루어질 수 있으며, 구체적인 활동으로부터 시작하는 수업은 수학에 대한 거부감, 또는 좌절감이나 압박감을 감소시켜서 학생들로 하여금 학습을 좀 더 쉽게 받아들이게 하는 효과가 있다. 또한 van Hiele의 교수 지도 단계는 각 단계마다 미흡한 경우 피드백이 가능함을 전제로 하고 있어, 각 단계에서 적절한 시점을 포착하여 피드백을 제공해 주어야 한다.

아래의 [표 4]는 개발자료를 학습활동에 적용하기 위해 van Hiele의 이론에 맞추어 기하 영역에서의 교수-학습 활동 모형을 정립한 것이다.

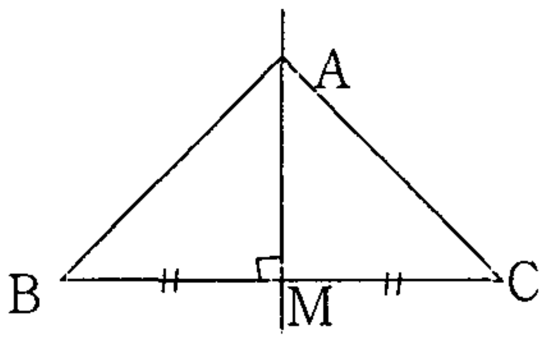
[표 4] 기하영역의 교수-학습 활동 모형

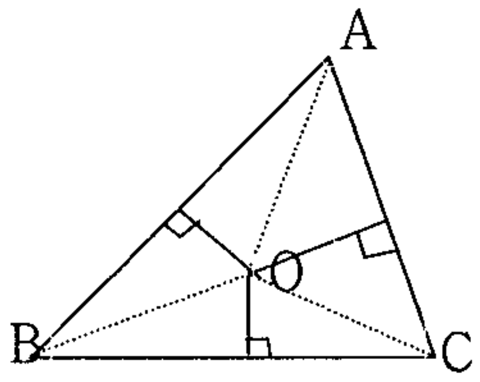
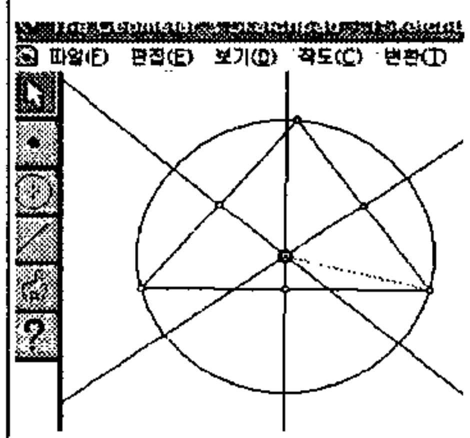
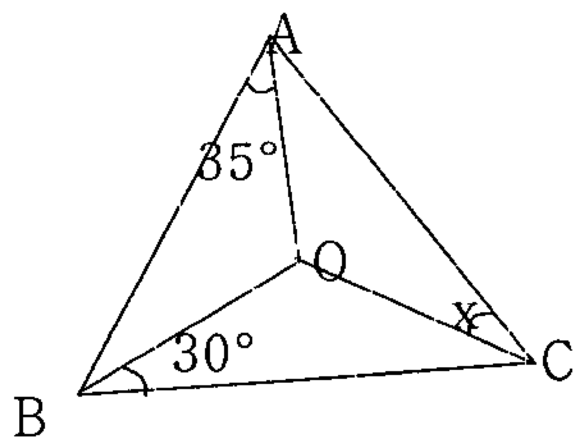
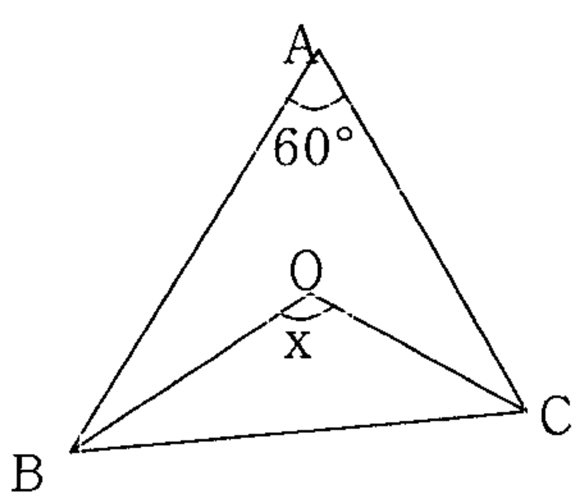
<table>
<tr><td>학습단원</td><td colspan="2">대단원
중단원
소단원</td><td>차시</td><td>1/소 단원시수</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="4">학습목표 제시</td></tr>
<tr><td rowspan="2">단계</td><td rowspan="2">학습내용</td><td colspan="2">교수-학습활동</td><td rowspan="2">지도상 유의점</td></tr>
<tr><td>교사</td><td>학생</td></tr>
<tr><td>질의안내 단계</td><td>· 전시학습 확인
· 학습목표 확인
· 동기유발 및 기본개념</td><td>· 전시주요내용 확인
· 학습목표의 명세화
· 동기 유발 및 기본개념 설명</td><td>· 소그룹 편성
· 주의 집중
· 경청 및 응답</td><td>· 유의점 및 준비물</td></tr>
<tr><td>제한된 탐구단계</td><td>· 학습목표에 적합한 안내된 탐구활동</td><td>· 학습목표에 적합한 활동 자료 제시
· 수학적 개념 및 원리를 찾을 수 있도록 안내</td><td>· 수학적 개념과 원리를 찾는 탐구 및 토론활동</td><td>· 탐구활동 시 유의점</td></tr>
<tr><td>명확화 단계</td><td>· 전 단계 활동 경험의 능동적 토론 및 정리</td><td>· 토론활동 지원</td><td>· 토론 및 정리
· 발표활동</td><td>· 교사의 개입 최소화</td></tr>
<tr><td>자유로운 탐구단계</td><td>· 좀 더 복잡하고 깊은 사고력을 요하는 과제 제시</td><td>· 학습자 스스로 새로운 관련성을 발견하도록 지도</td><td>· 관련성을 발견하는 토론활동
· 피드백</td><td>· 새로운 관련성을 찾도록 지도</td></tr>
<tr><td>통합단계</td><td>· 학습경험의 재정리 및 반성
· 과제 제시
· 차시 예고</td><td>· 질의응답
· 과제 제시 및 차시 예고</td><td>· 반성적 사고활동
· 피드백</td><td></td></tr>
</table>

4. 개발 자료의 교수-학습 활동

1) 자료1(삼각형의 외심)

학습단원	Ⅱ. 삼각형의 성질 2. 삼각형의 외심과 내심 2-1 삼각형의 외심	차시	1/3 (기본)
학습목표	삼각형의 외심의 뜻을 알고 이를 구할 수 있다.		

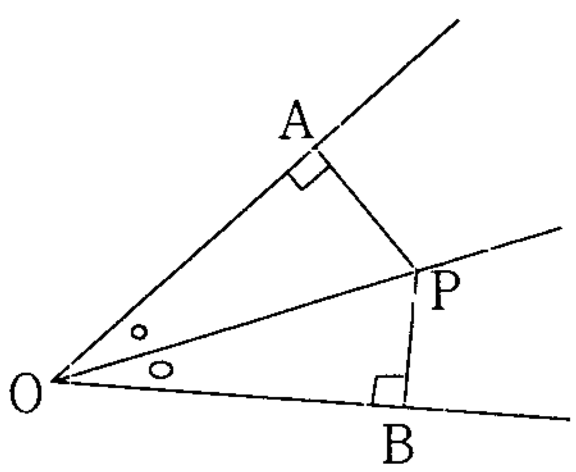
단계	학습내용	교수-학습활동		지도상 유의점
		교사	학생	
질의안내 단계	· 이등변삼각형의 성질 · 학습목표 · 동기유발 -삼각형 모양으로 떨어져 있는 3개 동의 아파트에서 같은 거리에 있는 곳에 놀이터를 만들려고 한다. 어디에 만들면 좋을까?	· 전시 확인 질문 · 학습목표 설명 · 외접원 설명	· 발표 · 경청	
제한된 탐구단계	· 선분의 수직이등분선의 한 점에서 선분의 양 끝 점까지의 거리가 같다. · 위 내용을 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명(국소적 조직화)  $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\angle AMO=\angle BMO=90°$, $\overline{OM}$ 은 공통이므로 $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ $\therefore\ \overline{OA}=\overline{OB}$ · 삼각형의 세변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다. (증명)	· 탐구활동 안내 ①종이를 반으로 접는다. ②수직선 위의 한 점을 찍는다. ③컴퍼스로 양 끝점까지 거리를 재어 본다. · 증명방법 안내	· 탐구활동 · 조별 증명 활동 $\overline{OA}=\overline{OB}$ $\overline{OA}=\overline{OC}$ 이므로 $\overline{OB}=\overline{OC}$ 이다. 즉 점O는 선분 BC의 수직이등분선위에 있다. ∴삼각형의 세변의	· 준비물 -종이 -컴퍼스 학생스스로 국소적 조직화를 통해 증명이 이루어지도록 유도

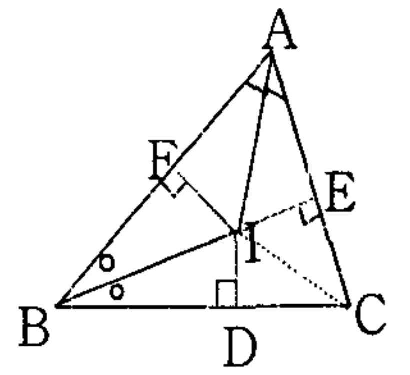
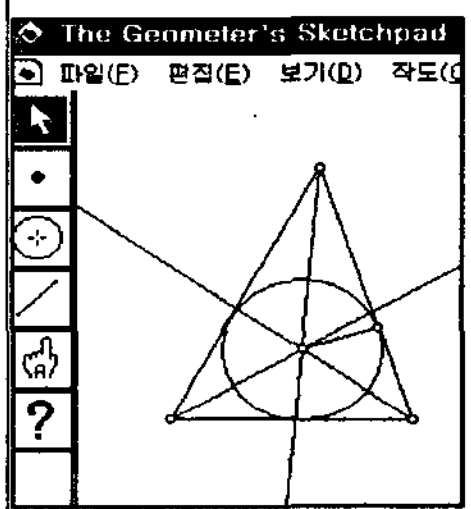
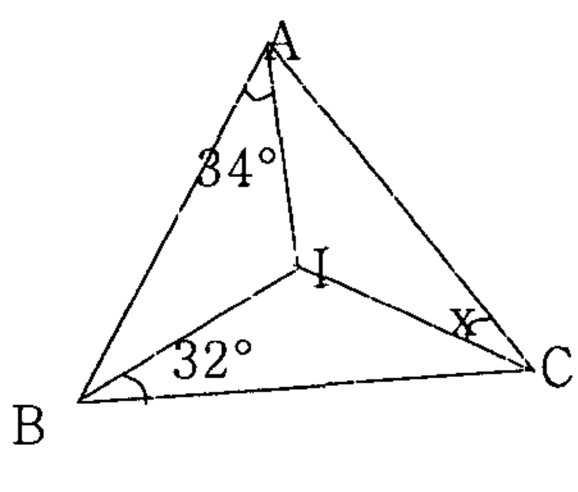
	 먼저 변 AB와 AC의 수직이등분선의 교점을 O라고하면 (조별 증명 유도)		수직이등분은 한 점에서 만난다.	
명확화 단계	· 삼각형의 외심(외접원의 중심) -삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점 -외심을 중심으로 세 꼭지점을 지나는 원이 외접원이다. -외접원은 삼각형에 외접한다. · 삼각형의 외심의 성질 -삼각형의 세변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다. -외심에서 삼각형의 세 꼭지점에 이르는 거리는 같다. (외접원의 반지름)	· 정리 · GSP 활용 외접원 작도시범 	· 정리 · GSP 활용 외심의 작도 및 외접원을 그린다.	
자유로운 탐구단계	· 문제 풀이 -점 O가 삼각형의 외심일 때 ∠x 의 크기를 구하여라.  	· 문제 제시	· 문제 풀이	

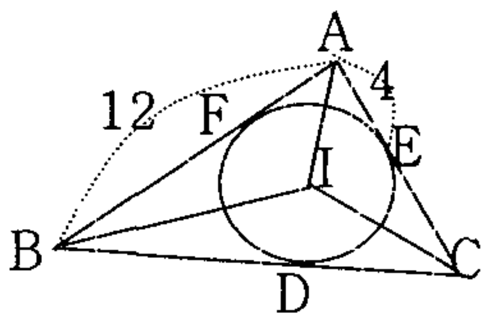
통합단계	· 아래와 같이 아파트 3동이 있다. 놀이터는 3동에서 같은 거리에 있는 곳에 만들려고 한다. 놀이터의 위치로 알맞은 지점을 찾아보아라. Ⓐ Ⓑ Ⓒ · 본시 정리 · 삼각형의 내심 및 성질 예고	· 문제 제시 · 외심 성질 정리 · 차시 예고	· 문제 풀이	

2) 자료2(삼각형의 내심)

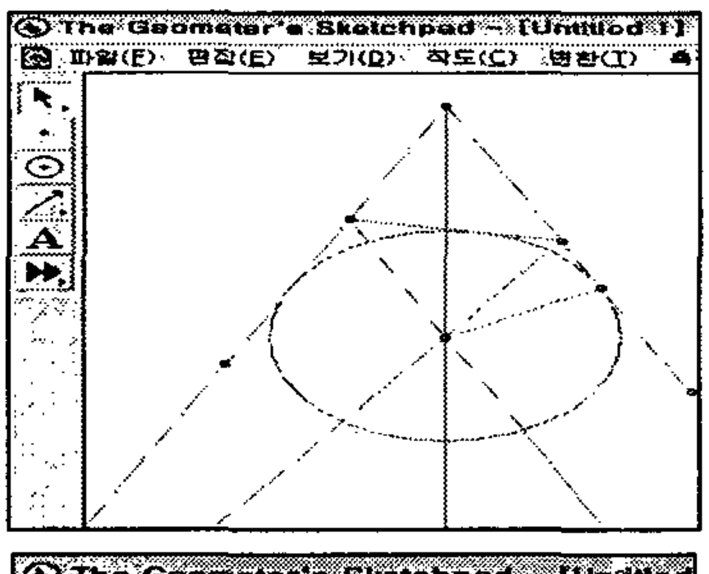
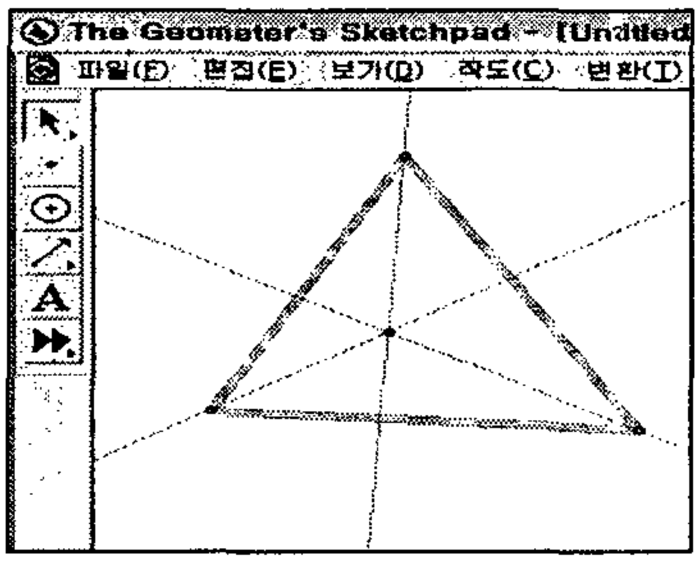
학습단원	II. 삼각형의 성질 2. 삼각형의 외심과 내심 2-2 삼각형의 내심	차시	2/3 (기본)
학습목표	삼각형의 내심의 뜻을 알고 이를 구할 수 있다.		

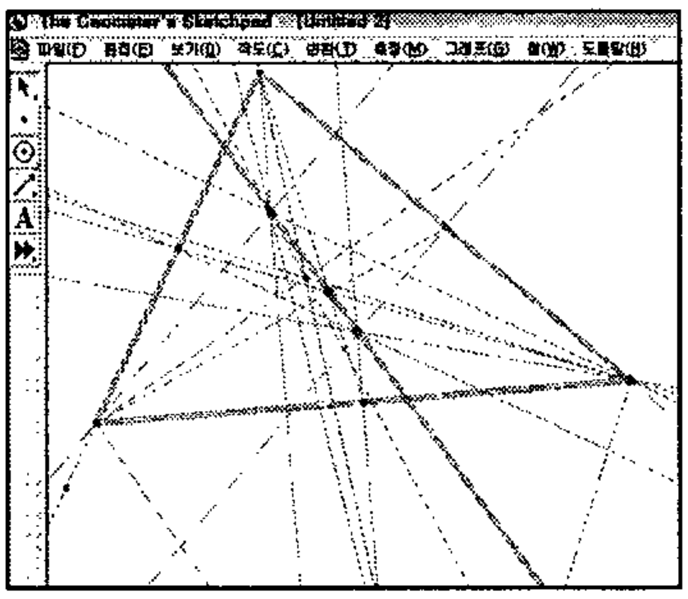
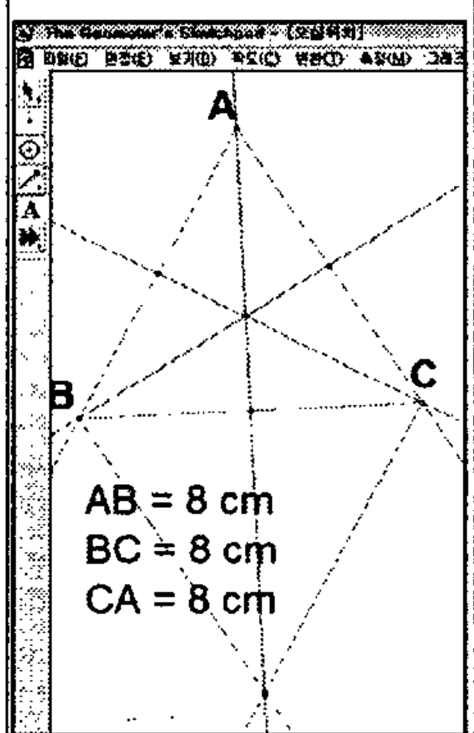
단계	학습내용	교수-학습활동		지도상 유의점
		교사	학생	
질의안내 단계	· 삼각형의 외심의 성질 · 학습목표 · 동기유발 -그림과 같은 세모모양의 시계가 있다. 바늘의 중심을 어디에 잡으면 좋을까? 	· 전시 확인 질문 · 학습목표 설명 · 동기유발 · 내접원 설명	· 발표 · 경청	
제한된 탐구단계	· 각의 이등분선 위의 한 점에서 각의 두 변까지의 거리는 같다 (국소적 조직화) · 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명(국소적 조직화) 	· 탐구활동 안내 ① 투명종이에 각 O를 그린다. ② 각의 두변을 겹치게 접어 이등분선을 찾는다. ③ 각의 이등분선 위의 한 점에서 두 변에 내린 수선의 길이를 컴퍼스로 재본다.	· 탐구활동 · 조별 증명활동	· 준비물 -종이 -컴퍼스

	$\angle AOP=\angle BOP$, $\angle OPA=\angle OPB$ $\overline{OP}$ 는 공통이므로 $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ $\therefore\ \overline{PA}=\overline{PB}$ · 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다. (학생 활동으로 증명 유도) ∴ 삼각형의 세 각의 이등분은 한 점에서 만난다.	④ 위의 활동에서 추측할 수 있는 사실을 질문한다. · 증명방법 안내 먼저 각 A와 각 B 의 이등분선의 교점을 D라고하면  (증명 유도)	$\overline{IE}=\overline{IF}$, $\overline{ID}=\overline{IF}$ 이므로 $\overline{ID}=\overline{IE}$ 이다. 즉 점 D는 $\angle C$ 의 이등분선 위에 있다.	학생스스로 국소적 조직화를 통해 증명이 이루어지도록 유도
명확화 단계	· 삼각형의 내심(내접원의 중심) -삼각형의 세 각의 이등분선의 교점 -내심을 중심으로 세 변에 접하는 원이 내접원이다. · 삼각형의 내심의 성질 -삼각형의 세 각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다. -내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 같다. (내접원의 반지름)	· 정리 · GSP 활용 외접원 작도  	· 정리 · GSP 활용 외심과 외접원의 작도	
자유로운 탐구단계	· 문제 풀이 -점 I 는 삼각형의 내심일 때 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.  -점 I는 $\triangle ABC$의 내심이고	· 문제 제시	· 문제 풀이	

	$\overline{AE}=4$, $\overline{AB}=12$ 일 때 $\overline{BD}$ 의 길이를 구하라. 			
통합단계	· 삼각형 모양의 나무판에 꼭 맞는 원 모양의 시계 판을 만들려고 한다. 중심을 찾는 방법을 말해보자.	· 문제 제시	· 문제 풀이	

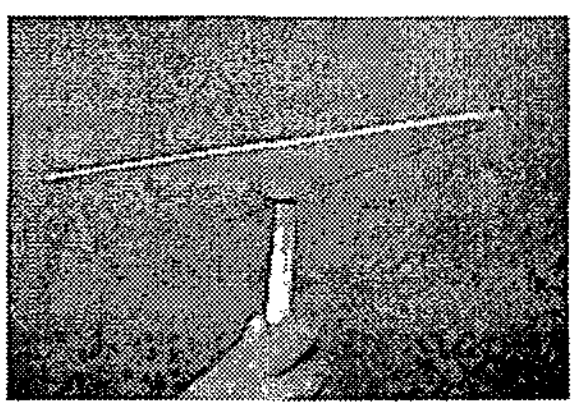
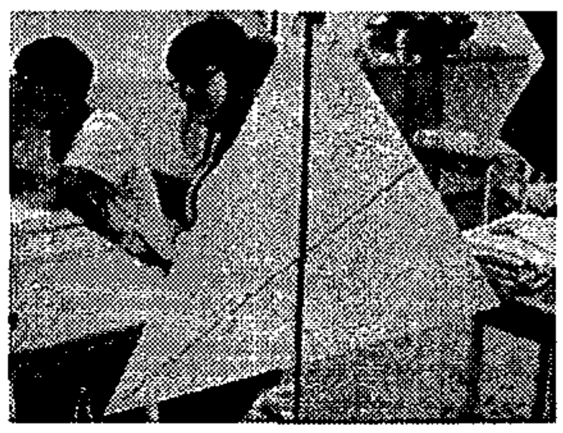
3) 자료3(삼각형의 오심의 위치관계)

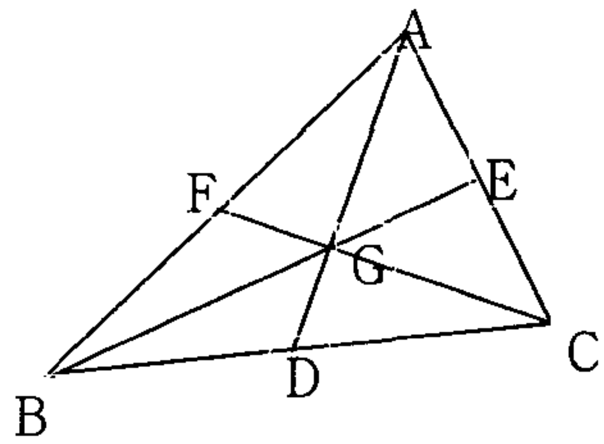
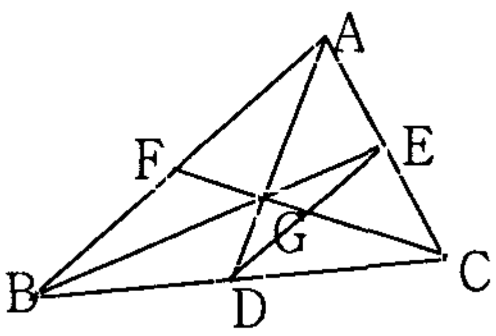
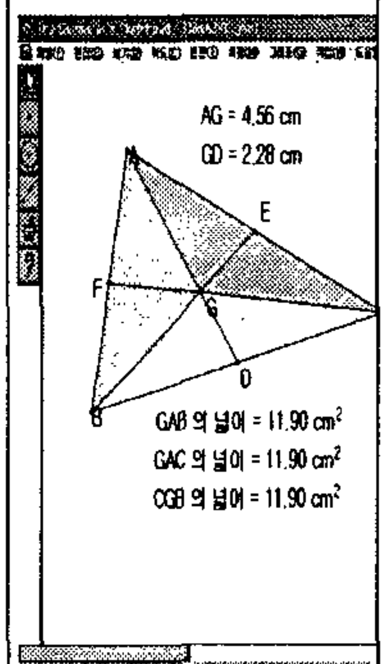
학습단원	Ⅱ. 삼각형의 성질 2. 삼각형의 외심과 내심 2-3 삼각형의 오심의 위치관계	차시	3/3 (심화)	
학습목표	삼각형의 오심을 알고 이들 사이의 관계를 안다.			
단계	학습내용	교수-학습활동		지도상 유의점
		교사	학생	
질의안내 단계	· 삼각형의 외심, 내심의 성질 · 학습목표 · 삼각형의 오심 -수심, 방심, 무게중심 정의  	· 전시 확인 질문 · 학습목표 설명 · 방심의 정의 및 작도법 설명 · 수심의 정의 및 작도법 설명 · 무게중심의 정의 및 작도법 설명	· 발표 · 경청 · 용어 정리	GSP활용 설명 무게중심은 차후에 다룰 것이므로 간단한 작도법 설명

제한된 탐구단계	· 평면에서 두 점을 지나는 직선의 개수는? · GSP를 이용해 삼각형의 오심을 작도하고 오심 중 두 점을 연결하는 직선을 그어본다.  · 위의 작도 결과로 알 수 있는 것은?	· 질문 · 작도 안내 · 질문	· 발표 · 조별 작도활동 · 발표	
명확화단계	· 삼각형의 오일러선 -삼각형의 외심, 수심, 무게중심은 항상 일직선 위에 있다. -이 직선을 오일러선이라고 한다.	· 정리 -오일러선 설명	· 정리	
자유로운 탐구단계	· 삼각형의 모양과 크기를 변화시켜가면서 위의 사실이 성립하는지 확인해보고, 결과를 일반화 시킬 수 있는지 판단 · 정삼각형의 경우는 오심의 위치가 어떠한지 판단 · 이등변삼각형의 경우는 오심의 위치가 어떠한지 판단	· 문제 제시	· 탐구활동 	GSP활용하여 직관적인 이해를 하도록 유도

통합단계	· 본시 정리 -각 탐구단계별 반성, 정리 · 차시 예고	· 질문 · 차시 예고	· 발표	

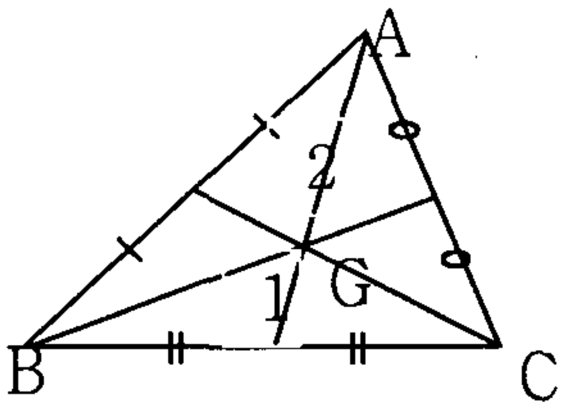
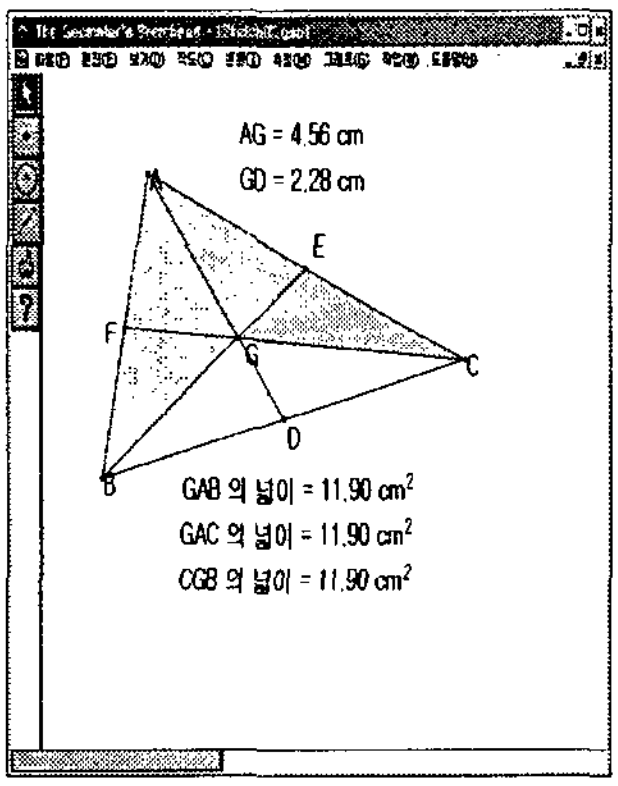
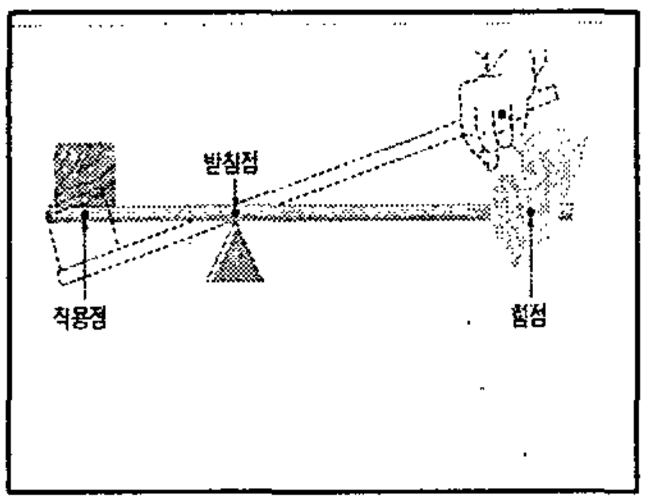
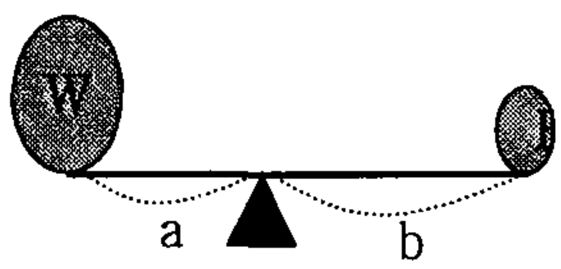
4) 자료4(삼각형의 무게중심)

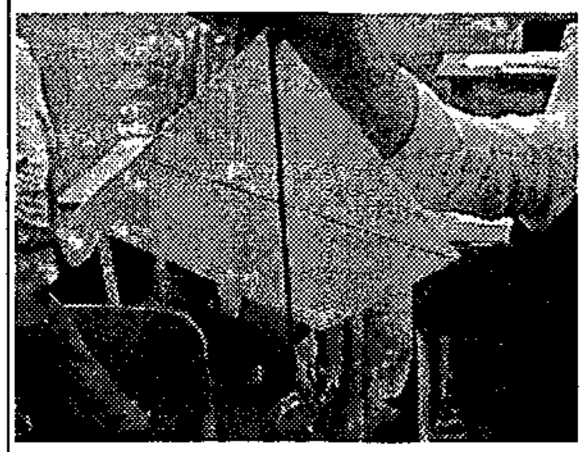
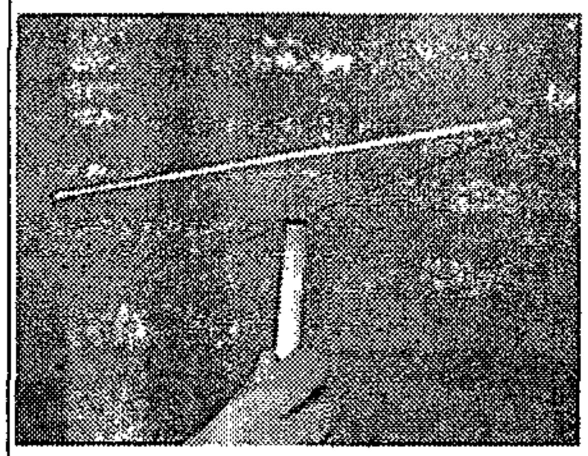
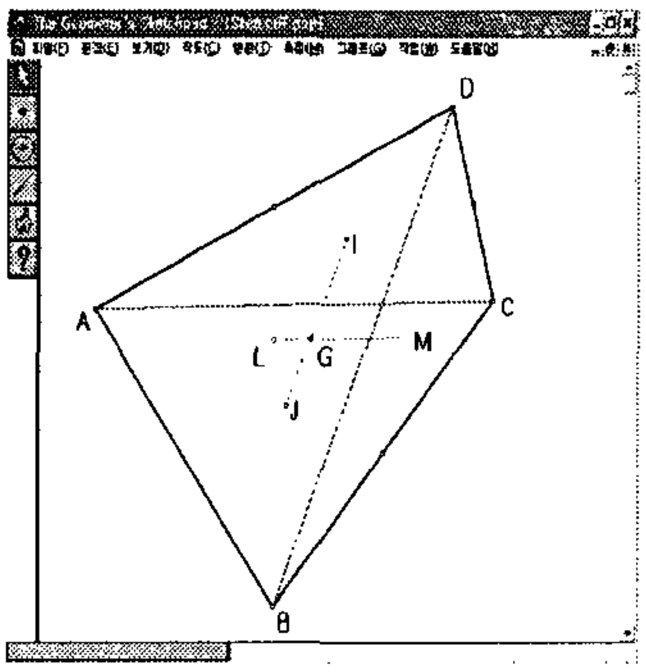
학습단원	Ⅲ. 도형의 닮음 2. 닮음의 응용 -삼각형의 무게중심	차시	1/ 3	
학습목표	삼각형의 무게중심의 의미를 알고 작도할 수 있다. 삼각형의 무게중심의 성질을 안다.			
단계	학습내용	교수-학습활동		지도상 유의점
		교사	학생	
질의안내 단계	· 전시확인 · 학습목표 확인 · 무게중심에 대한 의미 	· 중점연결정리 설명 · 학습목표 설명 · 무게중심 의미 설명 · 막대의 무게중심 (평형점)	· 그룹 편성 · 주의 집중 · 경청 및 응답	질문과 짧은 대화로 확인 준비: 막대
제한된 탐구단계	· 두꺼운 종이로 만든 삼각형의 세 꼭지점에 번갈아 추를 단 실을 매어 늘어뜨려 만나는 점을 관찰한다. · 실이 대변의 어디를 지나는지 관찰하고 실의 교차점을 찾아낸다. · 실이 만나는 점에 송곳을 찍고 삼각형을 들어 올려본다. 	· 한 꼭지점에서 왼쪽과 같은 시범을 보여준다.  · 평면도형의 경우 넓이와 무게를 동일시함을 설명 · 중선 설명	· 왼쪽과 같은 실험을 조별로 실시 · 삼각형이 평형을 유지하는지 확인	· 예각, 직각, 둔각 등 여러 가지 모양의 삼각형 준비
명확화 단계	· 중선이란 · 삼각형의 무게중심 · 무게중심의 역할	· 그룹별로 위 단계의 활동에 대해 세 중선 의 교점을 무엇이라 하면	· 그룹별로 정리 및 발표	· 스스로 무게중심의 의미와 역할을

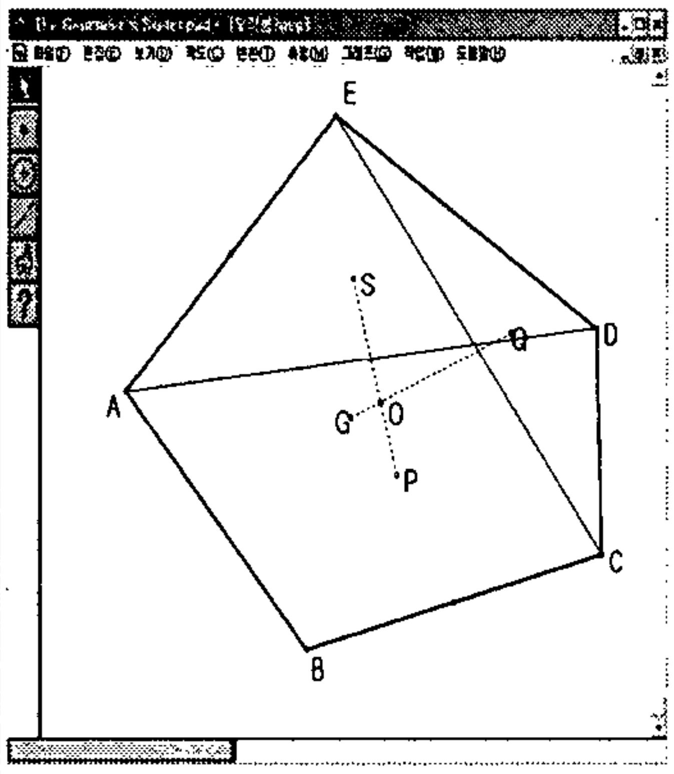
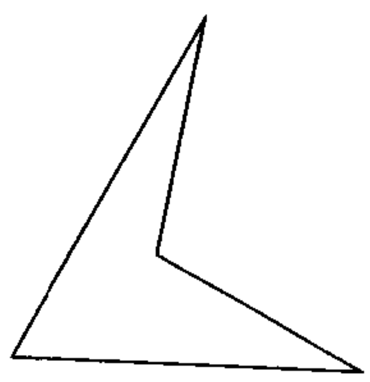
	· 무게중심 작도방법	좋을까? · GSP를 이용하여 작도하는 방법 설명	· 자와 컴퍼스로 무게중심 작도	이해하게 한다.
자유로운 탐구단계	[1] 중선의 길이의비 -무게중심은 꼭지점으로부터 중선을 2:1로 나눈다. [2] 무게중심의 성질 -세 중선에 의해 생기는 삼각형의 넓이는 각각 같다. $\triangle AFG=\triangle BFG=\cdots$ $=\triangle AEG$ 	· GSP를 준비하여 학생들의 탐구활동을 돕는다. · 탐구활동 결과를 증명할 수 있도록 안내 [1]  중점연결정리에 의해 $\overline{AB}//\overline{DE}$, $\overline{DE}=\square\overline{AB}$ $\triangle ABG$ □ $\triangle DEG$ ∴ $\overline{AG}:\overline{GD}$ =□:□ [2] $\triangle ABD=\triangle ACD$ 이고 $\triangle GBD=$□로 $\triangle ABG=\triangle ACG$ 마찬가지로 $\triangle ABG=\triangle BCG$ ∴ □=□=□ 또 $\triangle AGF=\frac{1}{2}\triangle ABG$ $\triangle AGE=\frac{1}{2}\triangle ACG$ ∴□=□ 마찬가지로 $\triangle AFG=\triangle BFG=\cdots$ $=\triangle AEG$	· GSP 활용 꼭지점으로부터 중선의 길이의 비를 알아본다. · GSP 활용 각 삼각형의 넓이 비교  · 교사의 안내에 따라 왼쪽 성질 증명	
통합단계	· 위의 4단계를 반성 조망 · 과제제시 -지레의 원리 조사 · 차시 예고 -다각형의 무게중심	· 반성을 위한 질의응답 -무게중심이란? -무게중심의 성질? -삼각형이 아닌 사각형 오각형 등 다각형의 무게중심은 어떻게 찾을까? -지레의 원리?	· 질의응답	수직적 수학화를 위한 차시 예고

5) 자료5(다각형의 무게중심)

학습단원	Ⅲ. 도형의 닮음 2. 닮음의 응용 -다각형의 무게중심	차시	2-3/ 3
학습목표	삼각형의 무게중심과 지레의 원리를 이용하여 다각형의 무게중심의 의미를 알고 작도할 수 있다.		

단계	학습내용	교수-학습활동		지도상 유의점
		교사	학생	
질의안내 단계	· 전시확인   · 학습목표 확인 · 과제 확인  	· 삼각형의 무게중심? · 삼각형의 무게중심 성질은? · 학습목표 설명 · 지레의 원리?  b×F = a×W가 성립 (이때 평형을 이룬다) · 무게중심의 정의 [물리] 물체나 질점계에서 각 부분이나 각 질점에 작용하는 중력의 합력의 작용점, 질량의 중심과 일치한다. [수학] 어떤 도형의 각 부분이 같은 질량을 가졌다고 가정할 때 질량의 중심과 일치하는 점. -선분의 경우는 양 끝 점의 중점(이등분점) -삼각형에서는 세 중선의 교점 즉, 무게중심이라 하면 어떤 도형이나 물체에 대하여 각 부분의 질량이 한 곳으로 모이는 곳이므로 이곳에 막대와 같은 물체를 이용하여 세우게 되면, 도형이나 물체가 균형을	· 그룹 편성 · 주의집중 · 경청 및 응답 · 과제 발표 · 경청 및 정리	질문과 짧은 대화로 확인

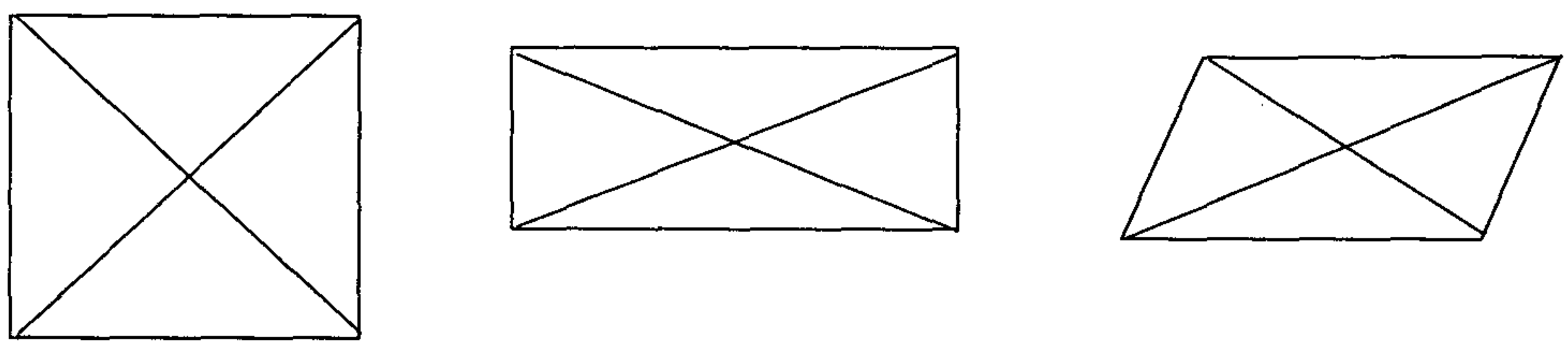
	· 무게중심의 일반적인 정의 설명	이루고 서 있게 되는 점을 말한다.		
제한된 탐구단계	· 두꺼운 종이로 만든 사각형의 두 꼭지점에 번갈아 추를 단 실을 매어 늘어뜨려 만나는 점을 관찰한다. · 두 실이 만나는 점에 송곳을 찍고 사각형을 들어 올려 평형이 되는지 확인해 본다. · 지레의 원리와 삼각형의 무게중심을 활용하여 사각형의 무게중심을 찾는다. ☞ [활동자료1] 제시	· 한 꼭지점에서 왼쪽과 같은 시범을 보여준다.  	· 조별로 왼쪽과 같은 실험 실시 · 사각형이 평형을 유지하는지 확인한다. · 교사의 안내에 따라 방법을 찾아나간다.	· 여러 가지 모양의 사각형 준비
명확화 단계	· 사각형의 무게중심의 작도방법  사각형ABCD에서 △ADC, △ABC, △ABD, △BCD의 무게중심 I, J, L, M을 작도하면 선분 IJ와 LM의 교점이 사각형의 무게중심이다.	· GSP를 이용하여 작도하는 방법에 대한 질문.	· GSP를 활용하여 사각형의 무게중심 작도방법을 찾아 조별로 발표하고 작도.	
자유로운 탐구단계	· 오각형의 무게중심을 찾는 방법을 모색한다.	· 사각형의 무게중심의 작도방법을 적용하여 오각형의 무게중심을 작도하는 방법에 대한	· 조별로 토론을 통하여 정리하여 발표한다.	

		· 질문	· 오각형의 무게중심은 사각형 ABCD의 무게중심 P와 삼각형 ADE의 무게중심 S를 잇는 선분 위에 있고, 또 사각형 ABCE의 무게중심 G와 삼각형 CDE의 무게중심 Q를 잇는 선분위에 있으므로 선분 GQ와 선분 PS의 교점 O가 오각형의 무게중심이다.	사각형의 무게중심의 작도방법을 이용하여 직관적으로 이해하게 한다.
통합단계	· 6각형, 7각형 및 n각형의 무게중심을 작도하는 방법 · 다각형이 아닌 타원, 부채꼴, 여러 가지 평면도형의 무게중심을 찾는 방법에 대해 생각하게 한다. · 볼록다각형이 아닌 오목다각형의 경우엔 무게중심의 위치가 어떻게 될 것인지 추측하게 한다. · 입체도형의 무게중심에 대해서 알아본다. (피라미드의 무게중심)	· 위의 과정을 확장하여 생각하게 한다. · 질문 · 오목다각형의 예시  · [활동자료2] 제시	· 조별 발표 · 실을 활용한 방법으로 모든 물체의 무게중심을 찾을 수 있음을 조별로 발표	입체도형의 무게중심은 평면도형의 무게중심과 같은 방법으로 직관적인 이해가 가도록 설명

	· 차시 예고	· 차시 예고		

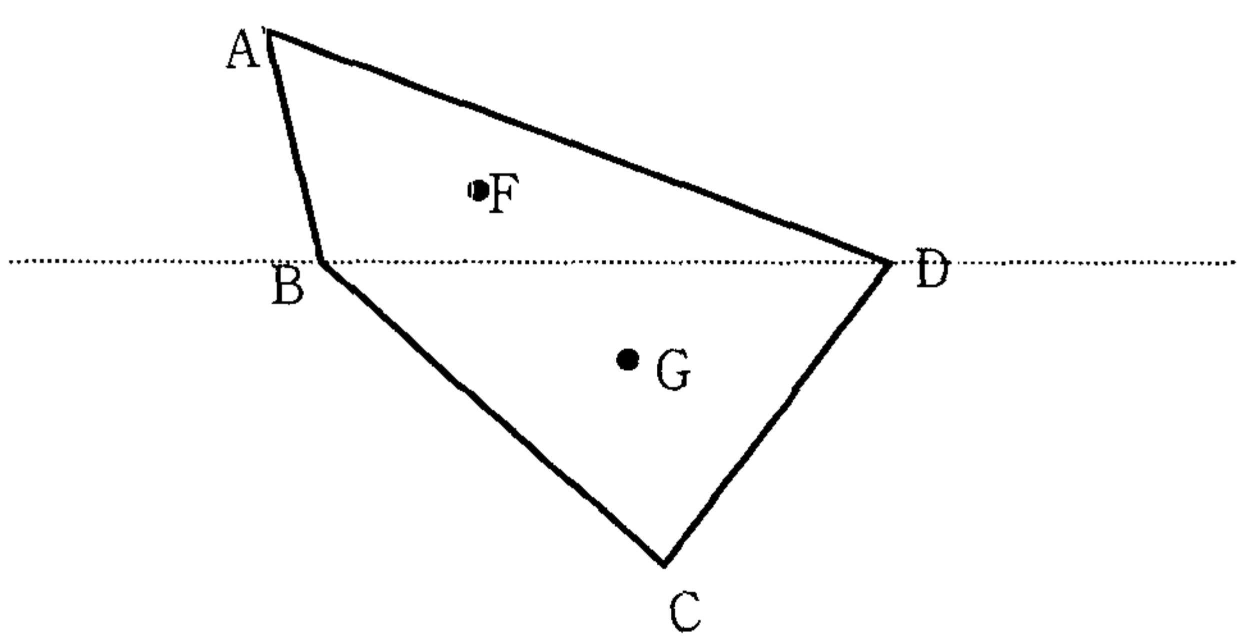
[활동자료1]

[활동1] 정사각형, 직사각형, 평행사변형 및 마름모와 같은 대칭성이 있는 도형의 무게중심은 어디일까?

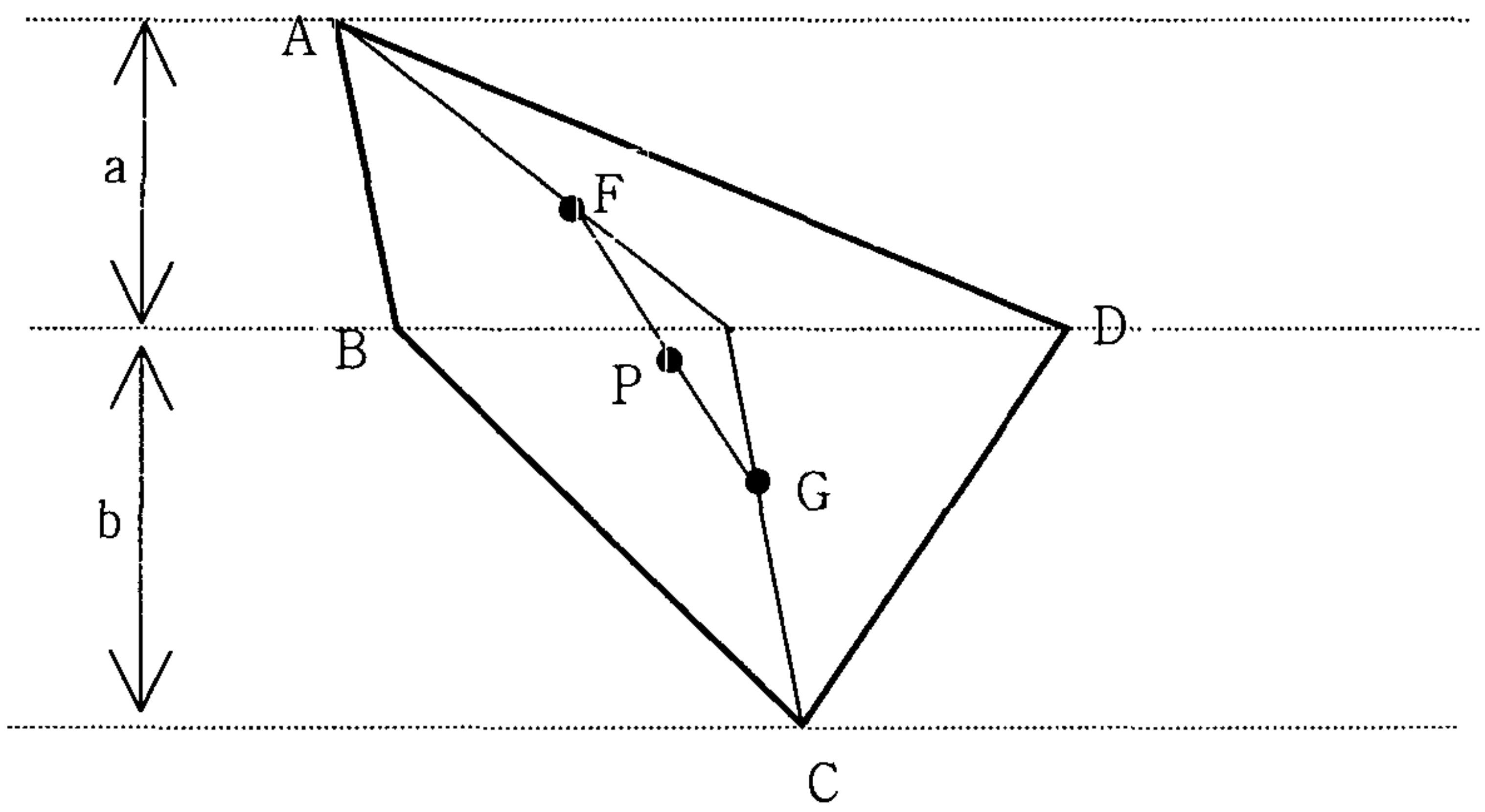


[활동2] 대칭성이 없는 일반적인 사각형에 대한 무게중심을 찾아본다.

① 두 삼각형 ABD와 BCD의 무게중심 F, G을 작도하여 찍어놓고 아래 그림과 같이 변 BD를 맞대어 놓은 사각형 ABCD의 무게중심을 찾아보자.



② 위에서 사각형의 무게중심을 찾은 원리를 설명해보자.
그림과 같이 두 삼각형의 높이를 a, b 라 하고 아래의 비를 구해보자.
$\triangle ABD : \triangle BCD$ =□ : □ 이므로 지레의 원리를 이용하여 두 무게중심 F와 G를 한 선분을 □ : □으로 나누는 점 P가 사각형 ABCD 의 무게중심이 됨을 알 수 있다.

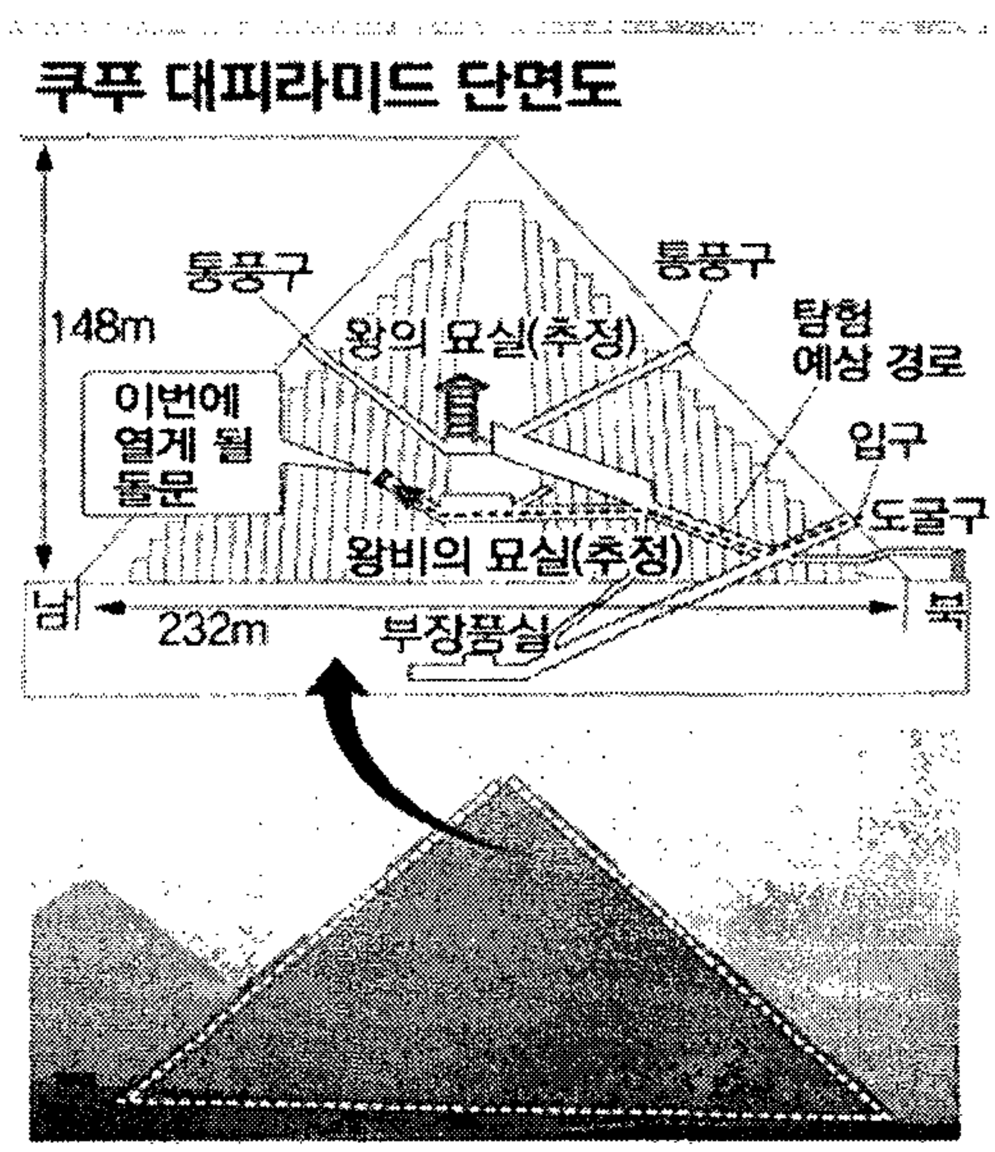


[활동자료2]

□ 건축 속의 과학(피라미드의 무게중심)4)

고대 건축물은 기하 형태와 숫자를 통해 우주의 비밀을 지상에서 표현해 냈다. 이집트의 피라미드는 네 개의 정삼각형이 모여서 이루어지는 사각뿔 형태로 구성됐다. 이 사각뿔의 밑변과 경사면이 이루는 각도는 52도, 이렇게 만들어지는 피라미드의 무게중심에는 우주의 에너지가 모이는 것으로 알려져 있다. 피라미드의 무게 중심에 녹슨 면도날을 놓으면 녹이 지워진다. 초자연적인 신통력을 이용하는 치료 가운데에는 피라미드의 무게중심에 환자를 놓아 우주의 에너지를 이용하려는 방법도 있다.

이집트 피라미드의 경우에도 파라오의 미라가 놓이는 무덤은 정확히 무게중심 지점과 일치했다. 미라가 피라미드의 무게 중심에 놓임으로써 우주의 에너지를 흡수할 수 있었던 것도 중요한 이유 가운데 하나였다. 그러나 이집트인들도 처음부터 미라를 피라미드의 무게중심에 위치시켰던 것은 아니었다. 고왕국 제4조의 쿠푸왕(기원전 2570년경)의 피라미드는 비로소 완전한 정삼각형으로 구성되는 사각뿔 형태를 갖추었다. 그리고 미라가 피라미드의 무게중심에 매장된 것도 이때였다.



[그림 1] 피라미드 단면도

4) http://www.dongascience.com

IV. 수학화 과정의 분석

제3장의 연구방법 및 절차에서 제시한 바와 같이 이 연구에서는 Freudenthal의 수학화 학습 이론을 접목한 기하단원의 학습자료 개발과 교수-학습 과정을 거쳐 나타난 수학화 과정의 효과와 특징을 분석하기 위해 2007년 1학기 강원도 삼척에 소재한 OO중학교 학생을 대상으로 6차시의 수행 학습활동을 진행하였다. 수학화 과정의 분석을 위해 학습자료에 기초한 탐구학습 활동지를 기초와 심화단계로 제작 배포하여 학생들의 학습단계의 적응과 발달 과정을 관찰함은 물론, [표 1]의 수학화 과정의 분석 틀에 맞춘 교수-학습활동 관찰일지를 학생별로 작성하고 학습의 흥미와 참여도 등을 분석하였다.

1) 현실에서의 수학적 개념의 발견

삼각형의 외심에 관한 [학습자료1]과 같이 아파트 3동으로부터 같은 거리에 건립할 놀이터의 위치를 찾는 문제에서 세 지역으로부터 같은 거리에 있는 지점을 그림으로 나타내고, 그것이 최종적으로 삼각형의 외심이 됨을 알 수 있었다. 또한 내심의 경우에도 유사한 현실의 문제에서 수학적 개념을 발견하는 학생이 많았다. 아울러, 별도의 탐구학습 활동지를 통해 쓰레기 매립장의 적합한 위치 선정에 관한 응용문제에 학습 경험을 쉽게 활용할 수 있게 되었고, 가위와 병따개가 지레의 원리를 이용하고 있음을 이해하고 물체를 들어 올리는 크레인의 경우에도 무게중심을 맞출 필요가 있음을 알아내는 등 어느 정도의 수평적 수학화가 이루어지고 있음을 알 수 있었다.

2) 상호작용에 의한 수학적 개념의 추출 및 반성

[학습자료3]과 같이 '삼각형의 세변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다' 는 명제의 증명은 기존의 교과서적인 삼각형의 합동을 이용한 전통적인 논증 방법을 거치지 않고도 교사와의 상호작용으로 국소적 조직화 활동(수직이등분선위의 한 점에서 선분의 양 끝점까지의 거리가 같음을 먼저 증명)을 통하여 학생들이 쉽게 이해하고 증명을 이끌어낼 수 있었다. 또 삼각형의 내심의 경우에도 외심과 마찬가지 방법으로 국소적 조직화 활동이 이루어졌으며, 사각형의 무게중심을 작도하기 위해 지레의 원리를 조사하게 하고 삼각형의 무게중심을 활용하여 사각형의 무게중심을 찾는 방법을 추론할 수 있게 하여 상호작용에 의한 수학적 개념의 추출 및 반성이 활발히 이루어지고 있었다. 또한 GSP를 활용한 학습에서도 조별로 2-3명의 학생들이 작도활동에 참여함으로써 서로 부분적으로 토론활동이 활발히 이루어져 자연스럽게 수학적 개념의 추출 및 반성활동이 이루어졌다.

3) 수학적 개념의 원리와 이해를 통한 학습내용의 정리, 결과의 예상 및 추상화

[학습자료1]과 활동지를 통해 삼각형의 외심의 작도방법과 외심의 성질을 발표하게 하였으며, [학습자료3]과 별도의 탐구활동 학습지를 통하여 삼각형의 오심 중 수심, 무게중심, 외심이 항상 일직선상에 있음을 쉽게 예상하고 있었고, 정삼각형의 경우엔 탐구활동을 통해 4개의 중심이 일치함을 알아내고, 이등변삼각형의 경우에도 마찬가지로 5개의 중심이 일직선위에 있음을 알 수 있었다. 또한 [학습자료4]와 [학습자료5] 및 별도의 탐구활동지를 통해 삼각형의 무게중심과 지레의 원리를 이용하여 일반적인 사각형의 무게중심을 작도하고 원리를 정리할 수 있게 되어 수직적 수학화가 활발하게 일어나고 있음이 관찰되었다.

4) 창조적 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강조하고 현실에의 응용이 이루어지고 있는가?

교사의 안내된 탐구활동을 통해 명확화 된 수학적 개념과 성질을 이용하여 새로운 응용문제에도 대부분의 학생들이 쉽게 문제해결을 하였으며, 현실에의 응용이 어떻게 되는지 충분히 학습이 이루어졌다. 또한 별도의 지도 없이도 사각형의 무게중심의 작도방법을 스스로 찾아내는 학생이 일부 있었으며, 나머지 학생들도 교사의 안내와 설명에 따라 GSP의 작도방법을 이해하고 작도를 성공적으로 수행할 수 있었다. 오각형과 육각형이상의 다각형의 경우와 오목다각형의 경우에도 사각형의 무게중심을 찾는 방법을 활용하여 작도 방법을 찾는 학생이 일부 있어 창조적 개념을 새로운 문제에 적용하거나 현실문제의 해결에 응용하는 응용적 수학화가 이루어지고 있음이 관찰되었다.

5) 수학에 대한 흥미와 태도 분석

교수-학습 활동 중에 학생들과의 질의응답이나 학습활동에서의 흥미와 참여도를 교사의 관찰활동 등을 통하여 보면, 학생들은 [표 5]와 [표 6]에서와 같이 GSP라는 새로운 탐구적 소프트웨어의 활용을 통한 탐구활동을 대단히 흥미로워 했다. 또한 교과서에 나오지 않는 국소적 조직화 활동과 개발된 수학화 학습자료의 활용 및 교사의 안내된 재발명 방법에 따른 학습 활동지를 통하여 어려움이 없이 비교적 많은 학생이 쉽게 학습목표에 도달하여 수학에 대한 흥미가 평소의 학습시간에 비해 월등히 높고, 학습에 대한 참여도도 매우 높게 나타나고 있었다.

[표 5] 교수-학습 활동 관찰일지-1

<table>
<tr><td colspan="3">교수-학습 활동 관찰일지
성명: (이○○)</td></tr>
<tr><td>학습주제</td><td colspan="2">다각형의 무게중심(심화학습)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">수학교과에 대한 특성</td><td>학습 흥미도</td><td>새로운 것에 대한 학습에 대단히 흥미를 가지고 있음</td></tr>
<tr><td>학습 참여도</td><td>탐구활동에 주도적으로 참여함</td></tr>
<tr><td>성취도 평가</td><td colspan="2">매우 높음</td></tr>
<tr><td colspan="3">수학화 과정 관찰 내용</td></tr>
<tr><td>분석틀</td><td colspan="2">관찰 내용</td></tr>
<tr><td>① 현실 세계에서 수학적 개념을 발견하고 있는가?</td><td colspan="2">지레의 원리에 대한 내용을 이해하고 활용하고 있으며 물체의 평형점을 이루는 무게중심을 잘 이해하고 있어 수평적 수학화가 잘 이루어지고 있음.</td></tr>
</table>

② 학생들 간의 상호작용, 학생들과 교사와의 상호작용에 의해 수학적 개념의 추출 및 반성이 이루어지고 있는가?	삼각형과 사각형의 무게중심에 대한 탐구활동에서 추를 매단 실에 의해 다각형의 무게(넓이)가 이등분 되며, 2개 이상의 꼭지점에서 추를 매단 실선이 한 점에서 만나는 점에서 들어 올리면 평형이 된다는 개념을 추출하고 이해하며, 상호 작용에서 자연스럽게 반성이 이루어지고 있음.
③ 수학적 개념의 원리와 이해를 통해 학습내용의 정리나 결과의 예상이 추상화되고 있는가?	지레의 원리와 두개의 삼각형의 무게중심을 이용한 사각형의 무게중심을 찾는 방법에서 같은 밑변을 가진 두 삼각형의 넓이의 비는 높이에 비례한다는 내용을 이해하고 있어, 무게중심은 두 삼각형의 무게중심을 연결한 선분을 높이의 비와 반대로 나누고 있음을 예상하고 과정을 논리적으로 설명하고 있다. 또한 GSP를 이용하여 사각형의 무게중심을 작도할 때에는 위 원리를 이용하여 네 삼각형의 무게중심을 찾아 두 무게 중심을 연결한 선분의 교점이 사각형의 무게중심이 됨을 쉽게 이해하고 작도할 수 있어 수직적 수학화가 잘 이루어지고 있음.
④ 창조적 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강조하고 현실에의 응용이 이루어지고 있는가?	사각형의 무게중심을 찾는 방법을 확장하여 오각형 이상의 다각형의 무게중심을 작도하는 방법을 이해하고 있고 작도할 수 있다. 더 나아가 입체도형의 무게중심도 추를 매단 실을 이용하여 무게중심을 찾을 수 있다는 것을 알고 있어 응용적 수학화가 잘 이루어지고 있음.

[표 6] 교수-학습 활동 관찰일지-2

<table>
<tr><td colspan="3">교수-학습 활동 관찰일지
성명: (송○○)</td></tr>
<tr><td>학습주제</td><td colspan="2">삼각형의 오심의 위치관계(오일러선)(심화학습)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">수학교과에 대한 특성</td><td>학습 흥미도</td><td>주로 GSP를 활용한 학습으로 새로운 방식의 작도와 관찰활동에 상당히 흥미를 느끼고 있었음</td></tr>
<tr><td>학습 참여도</td><td>교사의 안내에 따라 적극적으로 참여하였음</td></tr>
<tr><td>성취도 평가</td><td colspan="2">매우 우수하지는 못하지만 학습내용의 80%이상 소화</td></tr>
<tr><td colspan="3">수학화 과정 관찰 내용</td></tr>
<tr><td>분석틀</td><td colspan="2">관찰 내용</td></tr>
<tr><td>① 현실 세계에서 수학적 개념을 발견하고 있는가?</td><td colspan="2">방심이나 수심의 현실과의 관련된 자료의 연계가 다소 미흡하여 현실에서의 수학적 개념을 발견하는 것이 다소 무리가 있음.</td></tr>
<tr><td>② 학생들 간의 상호작용, 학생들과 교사와의 상호작용에 의해 수학적 개념의 추출 및 반성이 이루어지고 있는가?</td><td colspan="2">2-3명의 조별로 GSP를 작도하면서 서로 의논하고, 작도한 결과에 대한 토론활동이 소극적이나마 일어나고 있으며, 새로운 개념의 추출활동은 다소 미흡하지만 교사의 설명에 대한 충분한 이해를 하고 있으며 안내에 충실히 따름.</td></tr>
<tr><td>③ 수학적 개념의 원리와 이해를 통해 학습내용의 정리나 결과의 예상이 추상화되고 있는가?</td><td colspan="2">삼각형의 오심을 작도하여 오심끼리의 관계를 관찰하고 두 점을 연결한 후에 나타나는 결과(외심과 수심을 연결한 직선 위에 무게중심이 있다)에 대해 발표할 수 있었고, 외심, 수심과 무게중심은 일직선위에 항상 존재함을 예측할 수 있었다.</td></tr>
<tr><td>④ 창조적 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강조하고 현실에의 응용이 이루어지고 있는가?</td><td colspan="2">GSP를 활용하여 특별한 삼각형의 경우, 즉 정삼각형의 경우 방심을 제외한 4개의 중심이 일치하며, 이등변 삼각형의 경우에는 5개의 중심이 일직선위에 있음을 관찰할 수 있었다.</td></tr>
</table>

V. 결론 및 제언

이 연구에서는 7차 교육과정 8-나 단계의 기하영역을 중심으로 Freudenthal의 수학화 활동을 위한 학습자료를 개발하고, 개발한 학습자료를 바탕으로 교수-학습 활동에 적용한 후 수학화 과정을 체계적으로 분석하기 위해 다음과 같은 연구과제를 설정하였다.

[가] 중학교 수학 8-나 단계의 기하영역에서 Freudenthal의 수학화 활동에 적합한 학습자료의 개발은 어떻게 할 것인가?

[나] 개발된 학습자료를 활용한 교수-학습 지도안은 어떻게 구성하여 적용할 것인가?

이러한 연구과제를 해결하기 위하여 중학교 수학 8-나 단계의 기하영역을 중심으로 교육과정을 분석하고 Freudenthal의 학습 이론과 관련된 탐구활동 중심의 자료를 개발하였다. 또한 개발한 학습자료를 수업에 적용하기 위하여 van Hiele의 기하 학습 수준 이론을 바탕으로 교수-학습 활동 모형을 개발하여 개발된 자료를 가지고 수업에 적용한 후 연구대상의 학생들로부터 학습 활동지와 교수-학습 관찰일지 등을 통해 수학화 과정의 효과 및 수업에 대한 흥미와 태도를 분석하였다. 이러한 과정을 통해 학습자의 학습경험과 태도에 있어 다음과 같은 특이점이 관찰되었다.

첫째, Freudenthal 수학화 활동을 위한 학습자료는 교사의 적절한 안내를 통해 학습자가 재발명해 나가야한다는 인식하에 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 활발하게 이루어질 수 있도록 학습자료를 개발함으로서 수학을 만들어가는 수학화 활동을 학생들에게 경험시킬 수 있었다.

둘째, van Hiele의 학습수준 이론에 근거한 교수-학습 모형을 개발하여 교수-학습 지도안을 작성하고 탐구학습 활동지를 활용함으로써 학생들이 수업활동을 어려워하지 않고 흥미롭게 참여하였다.

셋째, 소규모의 조별 학습 활동을 실시함으로써 상호간의 협력학습을 통해 자신이 미처 생각하지 못했던 부분을 깨달게 되었고, 다른 학생들의 풀이과정을 통해 자신의 학습활동을 자연스럽게 반성할 수 있었다.

넷째, 수업에 대한 흥미와 참여도 측면에서 GSP 프로그램의 활용 및 탐구실험 도구를 활용한 결과 학생들이 수업에 흥미를 가지고 적극적으로 참여하였으며 자신감을 가지고 활동하였다 .

이 연구의 결과로부터 얻어진 결론은 다음과 같다.

첫째, 교사는 학습목표에 맞추어 학습단원을 재구성함으로써 안내자로서의 역할을 충실히 제공하고, 학생들이 흥미를 가지고 탐구활동이 활발하게 이루어질 수 있도록 수학화 활동자료의 지속적인 개발이 이루어져야 한다.

둘째, 학생들 간의 활발한 상호작용이 일어날 수 있는 여건과 자신의 수학적 활동이 반성될 수 있는 보다 많은 기회가 제공되어야 한다.

셋째, 현실적인 문맥의 개발을 통해 수학이 다른 여러 분야와 관련되고 실생활과 밀접한 관계가 있음을 인식하게 하여 수학의 유용성과 흥미를 느낄 수 있도록 해야 한다.

마지막으로 본 연구 결과를 토대로 다음과 같은 사안을 후속 연구를 위해 제안한다.

첫째, 이 연구는 강원도 삼척시에 소재한 소규모 학교의 소규모 학급을 대상으로 이루어

진 연구이므로 일반적인 학교와 학급의 수업환경에서의 자료의 개발과 적용에 대한 연구와 효과의 분석 방법의 변화가 어떻게 필요한지에 대한 연구가 이루어져야 할 것이다.

둘째, 수학화 활동 자료의 개발에 있어서 현실적인 문맥 상황에 대한 조사 연구가 필요하며, 보다 광범위한 영역에서의 자료의 개발과 이를 바탕으로 새로운 학습 모형의 정립 및 지도법에 대한 연구가 지속적으로 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

박정혜 (2005). Freudenthal의 수학화 학습이론에 근거한 기하단원의 학습자료 개발 및 적용에 관한 사례 연구, 한국교원대학교 석사학위논문.

송근정 (2006). 삼각형의 오심의 성질 확장, 전남대학교 석사학위논문.

신은옥 (2006). 프로이덴탈의 수학화 교수-학습 이론, 충남대학교 석사학위논문.

우정호 (2000). 수학학습지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

이근주 (2006). 탐구형 기하소프트웨어의 활용을 통한 추론능력 평가에 관한 연구, 한국교원대 석사학위논문.

이금주 (2007), van Hiele 이론에 기초한 교과서 분석과 효과적인 가하 학습에 관한 연구, 중앙대학교 석사학위논문.

이정곤 (2004). 평면기하에서 무게중심에 관한 연구, 경희대학교 석사학위 논문.

이준열 외 4인 (2002). 중학교 수학 7-나 교과서 및 교사용 지도서, 도서출판 디딤돌.

이준열 외 4인 (2002). 중학교 수학 8-나 교과서 및 교사용 지도서, 도서출판 디딤돌.

이준열 외 4인 (2002). 중학교 수학 9-나 교과서 및 교사용 지도서, 도서출판 디딤돌.

임채명 (2003). GSP를 이용한 블록 n 각형의 무게중심 작도, 충남대학교 석사학위논문.

장은진 (2005). van Hiele 이론을 적용한 기하영역 지도방안 고찰, 서강대학교 석사학위논문.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education, China Lectures, Kluwer.

De Lange & Verhage, H. B. (1987). Math A and achievement. testing, Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol.3, pp. 243-248.

http://www.dongascience.com/News/contents.asp?mode=view&article_no=20070410082600.

Development and Application of Learning Materials for Freudenthal's Mathematising Activities in the Middle School Geometry

Choi, Jong Chul[5] · Kim, Hongchul[6]

Abstract

The purpose of this paper is to perceive the problems of current geometry education in the middle school mathematics, to develop some learning materials fitted for the mathematising activities based on Freudenthal's learning theories and to analyze the mathematising process followed by teaching-learning activities. For this purpose, we design activity-oriented learning materials for geometry based on Freudenthal's learning theories, and appropriate teaching-learning models are established for the middle school geometry at the 8-NA stage level according to the theory of van Hiele's geometry learning steps. After applied to the practical lessons, the effects of mathematical activities are analyzed.

Key words : Middle school geometry, Mathematising activity, Theory of learning levels, Teaching-learning model

5) Jangho middle school (ccc5810@hanmail.net)
6) Kangnung National University (hongchul@kangnung.ac.kr)