

GSP가 중학생들의 증명학습에 미치는 영향: 사례연구

신유경¹⁾ · 강윤수²⁾ · 정인철³⁾

이 연구에서는 중학생들이 '원의 성질' 단원의 증명학습 과정에서 어떤 어려움을 겪는지를 조사하여 GSP를 활용한 증명학습이 학생들의 어려움을 어떻게 완화시키는지 탐구하였다. 진단검사를 통해, 학생들은 가정과 결론의 이해, 기호의 사용, 추론 과정 등에서 어려움을 겪고 있음을 확인하였다. 한편, 학생들은 GSP를 활용한 증명학습을 통해 자신의 추측이나 추론에 대한 피드백을 받을 수 있고, 구체적인 사례를 일반화하거나 증명에 필요한 아이디어를 능동적으로 찾는 탐구 태도를 형성할 수 있다는 것을 확인하였다.

주요용어 : 원의 성질, 증명학습, GSP, 학생들의 오류

I. 서론

학교수학에서의 증명학습은 학생들이 논리적이고 체계적으로 사고하도록 하는데 중요한 역할을 한다. NCTM(1989)은 모든 학생들을 위한 주요한 수학적 소양의 하나로서 수학적 추론 능력을 제시하고 학교수학의 모든 분야에서 추론을 보다 강조할 것을 요구하였는데, 10년 후에 발간한 'Standards 2000'에서는 '추론과 증명'을 독자적인 기준으로 제안하면서, 중등학교에서 증명의 역할을 더욱 확대 강조하고 있다.

우리나라 수학교육과정에서는 명시적으로 증명 영역을 구분하지는 않지만 중학교 2학년 기하 영역에서 처음으로 형식적인 증명을 도입한 이후로 2·3학년 과정에서 많은 증명문제가 다루어지고 있다. 그럼에도 많은 학생들이 증명의 필요성을 제대로 이해하지 못하고 증명을 어려워하고 있으며 학생들의 증명 능력 역시 매우 낮은 실정이다. 임승호 외(2000)에 의하면, 우리나라 수학교실에서 이루어지는 증명지도는 내용이 학생들 수준에 비하여 지나치게 높고, 교과서의 증명이 종합적 방법에 치우쳐 있으며 증명의 과정보다는 정리 자체를 강조하는 수업이 이루어진다. 또한 나귀수(1998)는 수업 시간에 연역적 추론을 할 수

1) 순천대학교 교육대학원 (pooh602@hanmail.net)
2) 순천대학교 수학교육과 (yskang@sunchon.ac.kr)
3) 전남대학교 수학교육과 (ijung@chonnam.ac.kr)

있는 충분한 시간이 학생들에게 제공되지 못함으로써 증명 교육의 목적인 수학적 사고, 즉 의미 있는 논리적 추론을 경험할 수 있는 기회가 적다고 지적하였다.

이러한 증명지도의 문제점을 개선시키기 위해 증명지도와 관련된 다양한 연구들이 진행되어 왔다. 몇몇 연구들을 살펴보면, 기하 증명 학습에서 학생들이 겪는 어려움에 대한 연구(서지현, 2005; 박효진, 2006), 분석법을 활용한 증명학습에 관한 연구(이용민, 2000; 이승희, 2005), GSP, CabriII와 같은 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 증명학습에 관한 연구(조완영, 2000; 윤태숙, 2002; 이정숙, 2005; 류희영, 2006) 등이다.

하지만 증명학습이 단원목표로 설정되어 있는 「원의 성질」 단원의 증명학습에 관한 연구는 찾아보기 어렵다. 특히, 「원의 성질」 단원이 작도와 측정, 도형의 변환 등이 용이한 GSP의 특성을 가장 효과적으로 활용할 수 있는 단원임에도 불구하고 이 단원에서 GSP를 활용한 증명학습 관련 연구가 시도되지 않았다는 것은 이해하기 어렵다.

따라서 본 연구에서는 광역시에 위치한 S여자중학교 3학년 학생들을 대상으로 「원의 성질」 단원의 증명학습과정에서 중학생들이 겪는 어려움이 무엇인지를 분석하고, 탐구형 기하소프트웨어 중 하나인 GSP를 활용한 증명지도가 중학생들의 증명학습과정에 어떤 영향을 미치는지를 탐구해 보고자 한다.

II. 연구 방법 및 자료 수집

1. 연구방법

먼저 중학생들이 증명과정에서 어떤 어려움을 겪는지를 조사하기 위해 진단검사를 실시하였다.

그런 다음, 그 결과를 바탕으로, GSP를 활용한 증명지도가 중학생들의 증명학습 과정에 어떤 영향을 미치는가를 확인하기 위해 질적 사례 연구에서 많이 사용하는 관찰과 임상면담 방법을 활용하였다. 즉, GSP를 활용한 탐구학습이 가능하도록 구성된 학습지를 활용하여 연구참여자들이 자기주도적 증명학습을 하게 한 후에 이 과정을 관찰하고, 관찰 중간 혹은 탐구학습 후에 연구자가 질문하여 연구참여자들의 인지적 개념 변화 과정을 확인하는 임상면담을 실시하였다. 질적 사례 연구는 행동, 과정, 한 명 이상의 개인을 심층적으로 연구하고 변인들이 어떻게 작용하는지 그 과정을 생생하게 그려낼 수 있는 장점을 가지고 있으므로 본 연구의 목적에 적합하다고 판단하였다.

따라서 이 연구에서는 정량적 설문지법과 정성적 관찰 및 면담법이 모두 활용되었다.

2. 연구대상

진단검사는 광역시에 소재한 S여자중학교 3학년 2개 학급 76명을 대상으로 실시하였다. 진단검사에 참여한 학생들은 광역시에서 중위권 학력의 학생들로 검사일 한 달 전에 원의 성질 단원의 학습이 이미 이루어졌다.

진단검사에 참여한 학생들 중 담당 수학선생님의 추천과 본 연구에 대한 적극적인 참여

의사를 밝힌 중학생 2명(학생A,B)을 선정하여 모두 8차시에 걸쳐 GSP를 활용한 탐구학습 활동 수업을 실시하였다.

3. 검사도구 및 자료수집

1) 진단검사

진단검사는 서동엽(1999)이 정리한 추론의 구성 요소와 증명의 의미 요소를 바탕으로 하고, 선행 연구(이수진, 2005; 윤태숙, 2002 등)와 한국교육과정평가원 학습 자료를 참고하여 8문항으로 제작하였으며, 수학선생님의 감독 하에 45분 동안 실시하였다. 진단검사 문항은 증명 내용에서 괄호넣기, 증명 쓰기 등 모두 주관식이었기 때문에, 결과분석은 결과에 의한 빈도수 분석과 서술 유형에 따른 유형 분석 방법을 함께 활용하였다.

2) 증명 학습 탐구 활동

GSP를 활용한 증명지도가 중학생들의 증명학습 과정에 어떠한 영향을 미치는가를 알아보기 위해 학생(A, B) 당 8차시에 걸쳐 활동 수업을 실시하였다. 이 과정에서 활용된 증명 활동지는 선행연구(윤태숙, 2002; 조완영, 2000)를 참고하여 작성하였는데, 해당 문제에 필요한 도형을 GSP를 활용하여 작도하는 과정에서 학생들이 증명에 필요한 아이디어를 파악하고 다양한 수학적 개념이나 지식을 이용할 수 있게 구성하였다. 또, 작도와 탐구 과정에서 확인한 사실을 바탕으로 제기된 추측에 대해 스스로 설명하고 정당화하는 과정을 거쳐 마지막으로 증명쓰기를 통해 자신이 이전의 과정에서 확인한 내용을 정리하도록 하였다. 이렇게 진행된 탐구활동 과정은 모두 녹화하여 녹취록으로 작성한 후에 진단검사 결과와 연계하여 통합적으로 분석하였다.

Ⅲ. 연구 결과 및 분석

1. 「원의 성질」 단원의 증명학습 과정에서 중학생들이 겪는 어려움은 무엇인가?

1) 명제나 증명 과정에서 가정과 결론을 구분하거나 이해하는데 어려움을 느낀다.

많은 학생들이 주어진 명제에서 가정과 결론을 구분하는데 어려움을 겪고 있었다. 또, 가정과 결론의 의미를 정확히 알지 못해 결론을 증명 과정에서 이용하거나, 증명에서 가정을 이용하지 않고 결론을 이끌어내는 등의 오류를 범하였다.

진단검사 문항 1-②은 'p이면 q이다' 형태의 명제에서 가정과 결론을 구분하는 기본적인 형태의 명제임에도 정답률 35.38%로 낮은 성취도를 보였다. 특히, 문항8과 같이 일반적인 문장으로 기술된 명제에서는 정답률 20%로 아주 낮은 성취도를 나타내었다.

또, 학생들이 주어진 문제에서 가정과 결론을 분리해내더라도 이를 증명과정에 사용하여 다시 결론을 이끌어 내거나 주어진 가정을 증명에 이용하지 않고 비논리적으로 결론을 이끌어 내는 등의 오류를 보여 많은 학생들이 가정과 결론의 의미를 구분하고 이해하는데 어려움을 겪고 있음을 확인할 수 있었다.

2) 증명과정에서 알맞은 기호를 사용하는데 어려움을 겪는다.

진단검사 문항8은 가정과 결론을 기호로 나타내는 문제로 정답률 12.30%의 아주 낮은 성취도를 보였다. 주어진 문제가 기호로 표시되어 있지 않고 일반적인 문장으로 제시된 경우, 가정과 결론은 분리하였으나 그것을 기호로 나타내지 못하고 문장으로 답한 학생들이 많았다. 문항7은 주어진 문장을 기호로 표현하는 문제였는데 정답률이 7%에 불과하였다.

3) 도형을 작도하고 이를 증명에 이용하는데 어려움을 겪는다.

증명과정에서 주어진 문제에 필요한 도형을 작도하는 것은 아주 중요하다. 대부분의 기하 영역 증명문제에서는 필요한 그림을 그리지 않고 증명을 시작하는 것이 거의 불가능하며, 문제해결에 필요한 적절한 도형의 작도는 도형의 구성 요소들 간의 관계 파악을 수월하게 하고 증명하는데 필요한 아이디어를 얻게 해준다.

진단검사의 주어진 설명에 알맞은 그림을 요구하는 「문항3」에서는 정답률이 60%로 나타났지만, 이 문항은 교과서에서 그림과 함께 나와 있는 성질을 그대로 출제했다는 것을 감안하면 정답률은 결코 높은 것이 아니다. 특히, 학생들은 필요한 그림을 그리거나 도형을 작도하기 위해 기본적으로 알아야 할 용어의 정의를 정확히 이해하지 못하여 도형 작도에 많은 어려움을 겪었다.

4) 학생들은 증명의 논리적 추론과정에서 많은 어려움을 겪는다.

진단검사 분석 결과, 정리를 적용하거나 실행하는 등 증명에 필요한 기본 지식은 알고 있으나 증명과정의 각 단계가 논리적이 못하거나, 필요한 그림을 그린 후에 이를 증명으로 연결하지 못한 학생들이 많았다.

문항2와 문항6은 증명과정을 보여주고 부분을 채우는 괄호 넣기 문제인데 정답률이 각각 53.84%, 18.46%로 높지 않았다. 이는 학생들이 세부적인 추론과정을 연결하는 데 약점이 있음을 보여주는 것이다.

또한, 많은 학생들이 증명과정에서 핵심적인 중간 단계가 생략된 채 결론을 도출하거나 결론 전 단계까지는 잘 기술하고도 결론을 진술하지 못하여 논리적인 추론 과정에 많은 약점을 드러내었다.

2. GSP를 활용한 증명지도가 중학생들의 증명학습에 어떠한 영향을 미치는가?

1) GSP를 활용한 증명학습은 중학생들이 가정과 결론을 구분하는 과정에서 겪는 어려움을 완화시킬 수 있다.

GSP를 이용하여 문제에 알맞은 도형을 작도하는 과정에서 중학생들은 이용한 조건이 무엇인지 그리고 얻어진 결과가 무엇인지를 질문 받고 스스로 사고하게 되고 이를 구분할 수 있게 되었다.

다음은 '증명활동1차시'⁴⁾에서 발췌된 내용으로 학생A가 가정과 결론이 무엇인지 혼동하다가 도움을 받아 이를 극복해가는 과정이 나타나 있다.

학생A : 네...AM과 BM의 길이가 같아요
 연구자 : 그럼 AM과 BM의 길이가 항상 같을까?
 학생A : 음...우선...반지름이니까 여기 여기가 길이가 같고....이 길이는 공통이고.. 또..
AM과 BM이 일정하니까... 두 삼각형이 합동이에요. [가정과 결론의 혼동]
 연구자 : AM과 BM의 길이가 일정해?
 학생A : 네
 연구자 : 그렇게 생각하는 이유를 설명해볼까?
 학생A : 음..
 학생A : **이등분 한 거죠? [결론을 가정으로 생각]**
 연구자 : 이등분 한 거야? 아님 이등분이 된 거야?
 학생A : **이게 결과예요? [결론과 가정 혼란]**
 연구자 : 자...그럼 네가 방금 어떻게 작도했는지 설명해줄래?
 학생A : 먼저...원을 그렸구요. 현 AB를 그린 다음에...수선을 그었어요...그러니까....
 학생A : **아하!!! AB가 이등분 된 거예요 [가정과 결론 인지함]**
 연구자 : 그래?
 학생A : 제가 작도를 하고....수선을 긋고 나니까 AB가 이등분되서 AM과 BM 길이가 같았어요.
 연구자 : 그럼 가정은 뭘까?
 학생 A : 수선을 긋는 거요..
 연구자 : 결론은?
 학생 A : AM과 BM의 길이가 같은 거요

학생A는 연구자가 작도 과정을 설명해달라고 요구하였을 때 스스로 작도 과정을 되새겨 보면서 가정과 결론의 의미를 이해하게 되었다. 이 학생은 이후에 진행된 증명활동 내 가정과 결론을 묻는 질문에 이를 명확하게 구분하여 대답하였다.

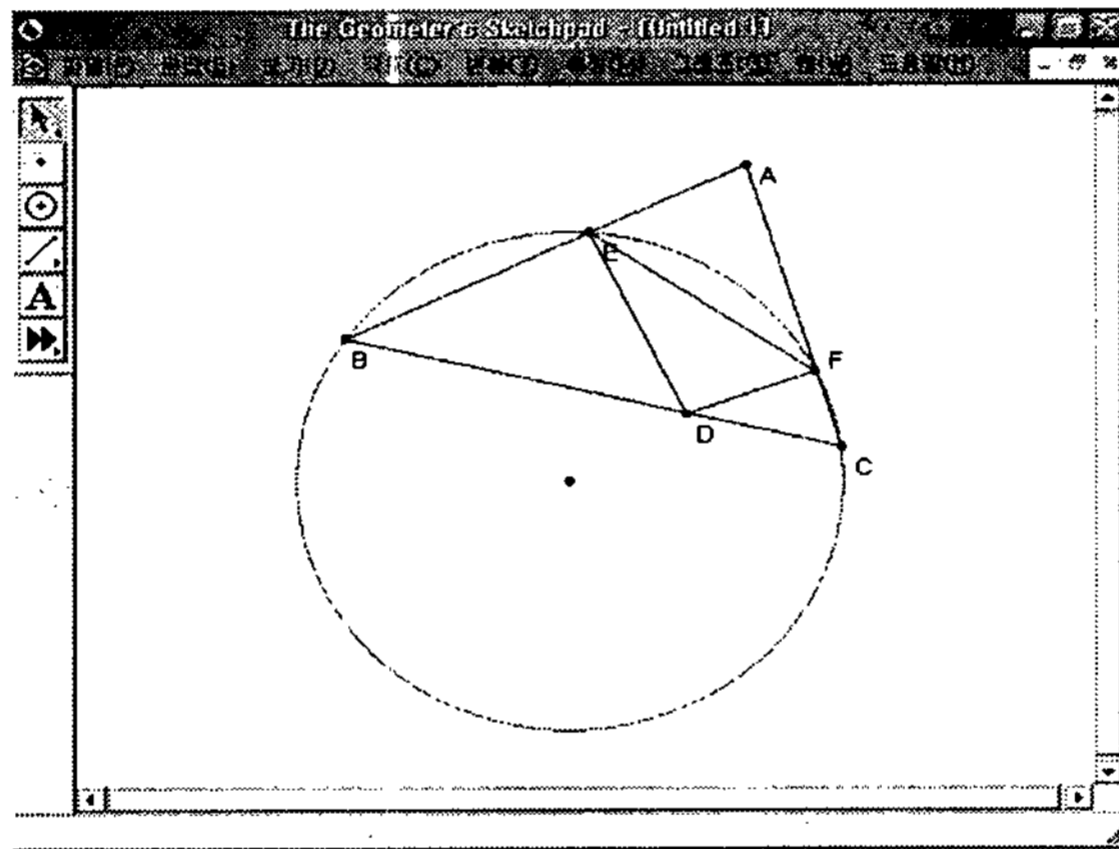
학생B는 진단검사 문항 1-② 가정과 결론을 구분하는 문제에서 오답을 적었는데 증명활동 수업 시간에도 가정과 결론을 구분하는 것을 혼동하였다. 학생B는 연구자가 왜 각 OMA와 각 OMB가 90도로 같은지 질문하였을 때 자신이 작도한 과정을 생각하며 “원의 중심에서 수선을 그었고, 아! 이것이 가정이에요” 라고 답하였다. 이처럼 학생B는 1차시 활동수업에서 연구자의 도움 없이도 본인 스스로 가정과 결론을 구분할 수 있게 되었다.

2) GSP를 활용한 증명학습은 중학생들의 추론에 대한 즉각적인 피드백을 제공하여 자신의 사고를 반성할 기회를 제공한다.

본 연구에 참여한 학생들은 스스로 증명 방법을 탐색하는 과정에서 GSP의 작도기능과 도형의 끌기 그리고 측정기능을 이용하여 자신의 추론에 대한 확실한 근거를 제시하거나 자신의 생각이 잘못되었음을 확인하고 다른 증명 방법을 모색하기도 하였다. 다음은 7차시 원에 내접하는 사각형의 응용문제⁵⁾를 증명하는 과정의 일부이다.

4) 원의 중심에서 현 AB에 내린 수선과 현 AB의 교점을 M이라 할 때, AM과 BM의 길이를 측정해보고 그 관계를 탐구해보자.

연구자 : 자. 그럼 네가 방금 네 점 E, B, C, F가 한 원에 있다고 그림을 직접 그려
 봄으로써 확인했잖아. 그렇다면 그 이유를 증명해 볼까?
 학생 A : 우선...CF가 접선이니까 접선에 관한 성질을 이용해야 해요
 연구자 : 여기가 접선이야?
 학생 A : 아니에요? 접선인거 같은데..직선 이거 움직일 수 있죠?
 연구자 : 응
 학생 A : (CF를 움직여본 후) 어? 접해있지 않구나. 이 선이 접하지 않으니까...접
 선 이용하면 안 되고..



<그림 2-1> 원에 내접하는 사각형

학생A는 점 E, B, C, F가 한 원 위에서 있는지 직접 작도를 해보고 그러한 원이 존재함을 확인한 후 이를 증명하는 과정에서 잘못된 추측을 하였다. 그러나 점 C를 옮겨봄으로써 CF가 접선이라는 자신의 생각이 잘못되었음을 바로 확인할 수 있었고, 다른 증명 방법을 생각하게 되었다.

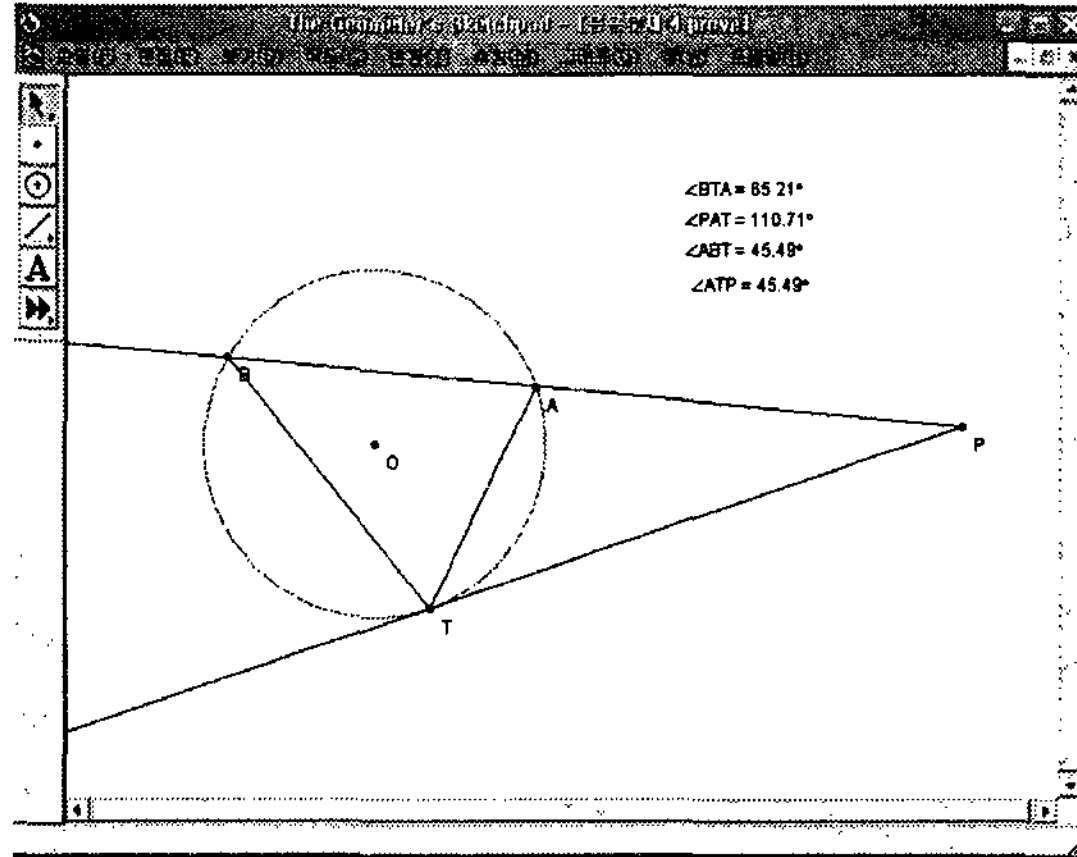
다음은 4차시 원과 두 현 사이의 관계에 관한 응용문제6)를 증명하는 과정의 일부이다.

학생 B : 그림이 좀 이상하지 않아요? 여기 각(각 BTA와 각 PAT)이 웬지 아닐 거
 같은데..
 연구자 : 아닐 거 같아?
 학생 B : 네. 그림이 이상한데...측정해 볼게요. (측정 후) 아이...다르네..그럼 뭐야...
 (중략)

- 5) 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 D, 점 D에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 \overline{AC} 에 내린 수선의 발을 F라 할 때, 네 점 E, B, C, F는 한 원 위에 있는지 탐구해보자.
 6) 현 AB의 연장선 위의 원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 P라고 하자.
 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PT}^2$ 임을 증명하여라.

GSP가 중학생들의 증명학습에 미치는 영향: 사례연구

학생 B : 음..분명히 이 두 삼각형이 닮음인데...왜 그렇지? 각이 같은 게 있어야 하는데.. 각을 한번 체크해 봐야겠네..
오...각 같은 거(각 PTA와 각 ABT) 나왔어...



<그림 2-2> 원과 두 현 사이의 관계

학생B는 처음에 각 BTA와 각 PAT의 크기가 같을 것이라 추측하였으나 의심이 들어 직접 측정해 봄으로써 자신의 생각이 틀렸음을 확인하고, 증명의 아이디어인 삼각형 PBT와 삼각형 PTA가 AA 닮음임을 보이기 위해 필요한 조건을 재탐색하였다. 그 후 다시 측정기능을 이용하여 각PTA와 각ABT가 같음을 발견하고, 자신이 추측한 삼각형 PBT와 삼각형 PTA가 닮음이라는 사실에 확신을 가지고 그를 바탕으로 증명을 시작하게 되었다.

3) GSP를 활용한 증명학습은 중학생들이 다양한 사례를 검증하여 일반화를 시도하는데 도움을 준다.

중학생들은 주어진 문제 상황에 필요한 작도를 시도할 때 교과서에 제시된 전형적인 도형을 작도하려는 경향을 보였다. 이는 본 연구의 진단검사 결과에서도 그대로 나타났다. 진단검사 3번 문항은 주어진 조건에 맞는 도형을 작도하라는 문제였는데 정답을 맞춘 39명 중 37명(94.87%)의 학생들이 교과서에 제시되어 있는 그림과 동일한 형태로 작도하였으며 2명의 학생만이 새로운 형태의 도형을 작도하였다.

다음은 2차시 활동수업 중 '중심각과 원주각 사이의 관계 작도'과정의 일부이다.

학생 B : 다 그렸어요..근데 뭔가 이상해요.. 맞게 그렸나 봐주세요...

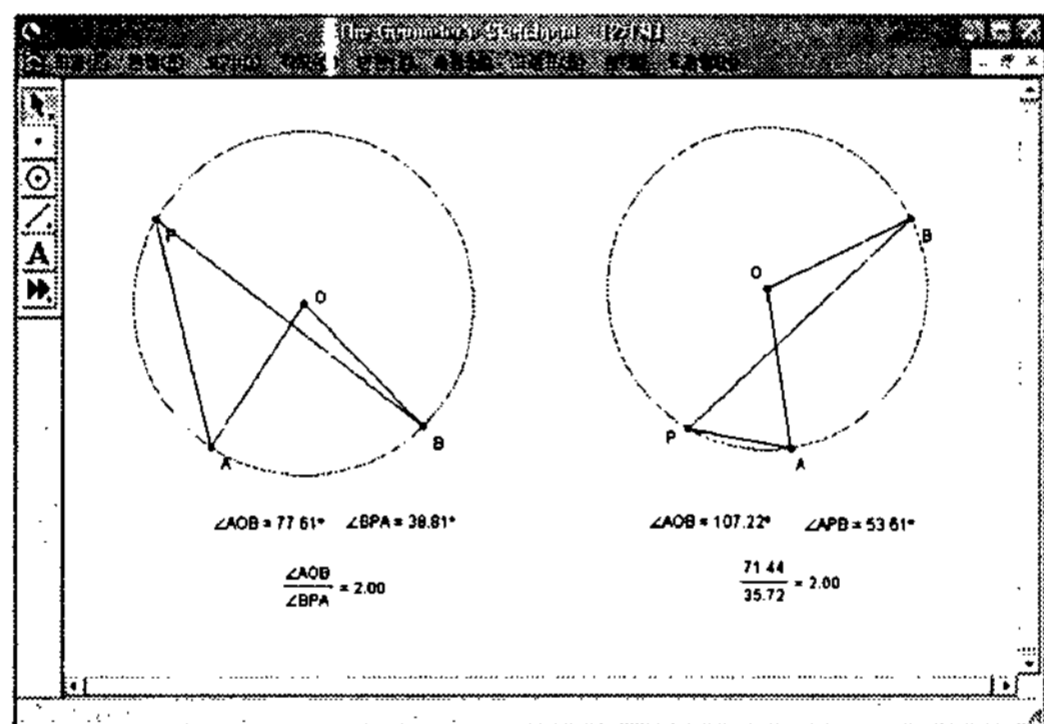
연구자 : 그림이 이상한 거 같아?

학생 B : 네. 중심각과 원주각 사이의 관계는 수업시간에 배운 내용이니까 알겠는데...그림이 웬지 어색한데...

연구자 : 그림 원 위의 한 점을 끌어볼까?

학생 B : 네. 아~~이 그림이에요..교과서에 있는 거..이제 제대로 된 거 같네...

연구자 : 그럼 우선 네가 생각한 이 그림에 대해서 원주각과 중심각의 크기가 어떻게 되는지 살펴볼까?
 학생 B : 다 했어요. 제가 알고 있는 대로 중심각은 원주각의 2배가 되요.
 연구자 : 그렇다면 네가 맨 처음 그렸던 그림으로 다시 돌아 가 볼까?
 학생 B : 처음으로요? 어떻게요?
 연구자 : 점을 다시 끌면 되지
 학생 B : 아..이 그림 맞죠?
 연구자 : 응
 학생 B : 어? 옆에 이것(중심각 ÷ 원주각의 측정값)도 같이 변하네요. 여전히 2배인데...
 연구자 : 그림 아까 그 점을 또 옮겨서 방금과는 다른 그림으로 바꿔볼까?
 학생 B : 네. 그래도 이 값은 항상 2배가 되네요...오..신기하다.



<그림 2-3 > 원주각과 중심각 1

(왼쪽은 교과서에 제시되어 있는 그림의 형태. 오른쪽은 학생이 그린 그림)

학생B는 작도과정에서 자신이 알고 있는 그림의 형태가 나오지 않자 자신이 작도를 잘 못했나 하는 혼동을 일으켰다. 하지만 원 위의 한 점을 끌어 자신이 알고 있던 그림으로 바꾸고 나서는 그림을 맞게 그린 것 같으며 안심하였다. 학생B는 교과서에서 배운 특수한 사례만을 기억하고 있었으며 그 그림에 집착하려는 경향을 보였다.

이처럼 GSP를 활용한 증명학습을 통하여 중학생들은 더 많은 예를 확인하고 이 과정에서 자신의 생각을 확고히 할 수 있으며, 몇몇 특수한 사례에서 발견된 도형의 성질을 끌기 기능을 통해 다양한 사례로 확장하면서 성질을 일반화하는데 주저하지 않았다.

4) GSP를 활용한 학습은 중학생들이 능동적으로 증명에 필요한 아이디어를 탐구하는 습관을 키우는데 긍정적인 역할을 한다.

중학생들에게 증명은 어려운 과제이며 낮은 성취도를 보이는 부분 중 하나이다. 학생들은 증명 방법을 스스로 탐색하지 못하고 증명을 암기의 대상으로 파악하는 경향(나귀수,

GSP가 중학생들의 증명학습에 미치는 영향: 사례연구

1998)이 있다. 하지만, GSP를 활용한 증명활동에 참여한 두 명의 학생은 컴퓨터를 이용하여 증명학습을 한다는 사실에 흥미를 보여 점점 탐구 활동에 적극적인 자세를 취했다.

다음은 2차시 ‘원주각과 중심각 사이의 관계’ 증명활동⁷⁾에서 발췌된 내용으로, 여기서 학생B는 교과서와는 다른 증명을 보여주고 있다.

학생 B : 제가 여러 가지 생각해 봤는데요. 이걸로는 안 될 거 같아요. 보조선을 그려야 해요?

연구자 : 어떤 보조선?

(중략)

학생 B : 삼각형 OAP에서 이 두 각(각 OAP, 각 OPA)이 같으니까 이 각을 x 라고 하면 각 EOA는 $2x$ 예요. 그 다음에 각 BPO를 y 라 하면 역시 BOP가 이등변 삼각형이고 각 BOE가 $2y$ 예요.

연구자 : 왜 $2x$ 이고 $2y$ 야?

학생 B : 왜냐면 삼각형의 외각의 성질에 의해서요.

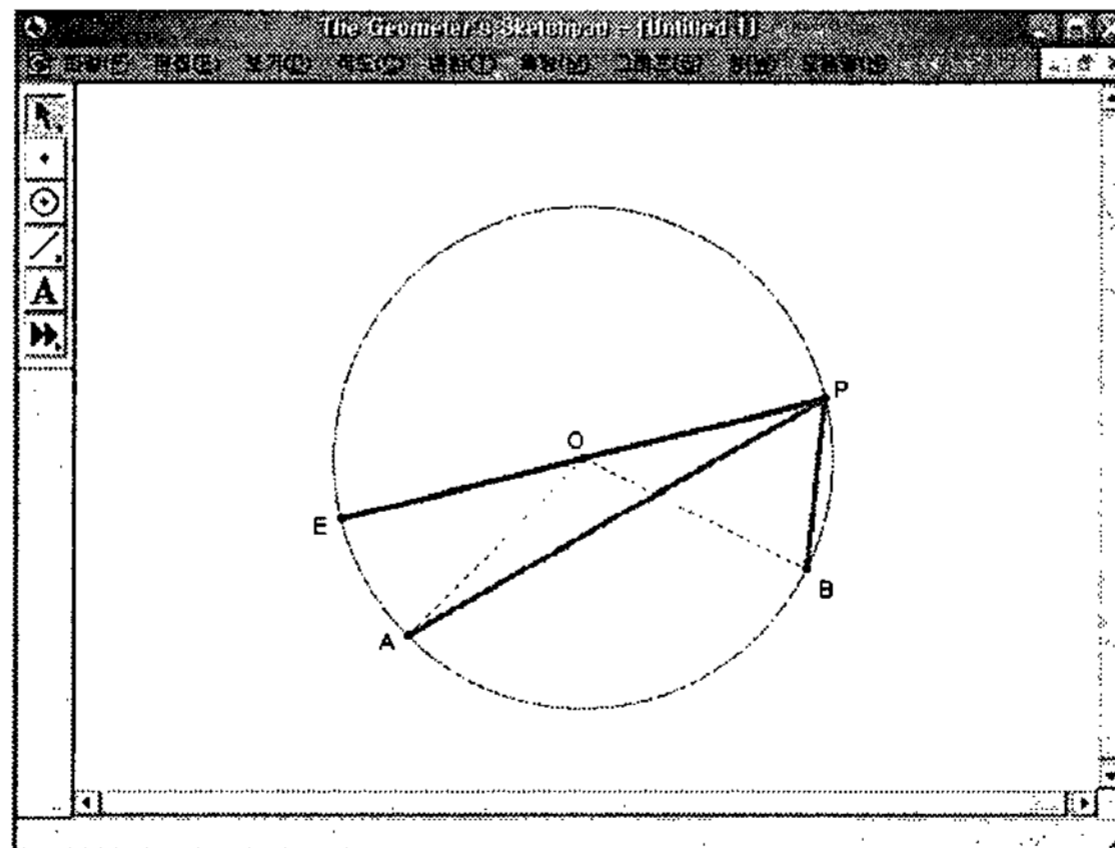
(중략)

연구자 : 방금 네가 한 증명과 교과서의 증명이 조금 다른데.. 알아?

학생 B : 그래요? 아. 교과서는 아까 배운 원주각과 중심각 이용했구나. 저는 외각의 성질을 이용했는데. 근데 제가 한 것도 맞아요?

연구자 : 그래. 맞아

학생 B : 오~~그럼 제가 증명 한 거네요. 신기한데..



<그림 2-4 > 원주각과 중심각 2

학생B가 한 증명은 교과서와는 조금 다르게 외각의 성질을 이용하였다. 학생 B는 연구

7) 현 AB에 대한 원주각 $\angle APB$ 에 대하여 중심 O가 $\angle APB$ 의 외부에 있는 경우 원주각과 중심각 사이의 관계에 대해 탐구해보자.

자의 도움 없이 스스로 GSP를 활용하여 보조선을 그어 보고 자신이 알고 있는 수학적 개념이나 지식(삼각형의 외각의 성질)을 이용하여 증명하였으며, 다시 측정기능을 이용하여 실제로 외각의 성질을 맞게 적용했는지 각의 크기를 측정하여 확인한 후 자신의 생각에 더욱 확신을 갖고 연구자에게 논리적으로 설명할 수 있었다. 그리고 학생B는 스스로 증명을 해 냈다는 사실에 강한 자부심을 느꼈다.

5) GSP를 활용한 증명학습은 중학생들이 증명의 필요성을 인식하는 데 장애가 될 수 있다.

NCTM(2000)은 공학이 어떤 관계를 추측하는 데는 도움이 되지만 학생들이 형식적인 정당화 또는 증명의 필요성을 인식하는 데는 장애가 될 수도 있다고 주장하면서 탐구형 기하소프트웨어가 경험적 정당화 활동에는 도움이 되지만 형식적인 정당화 과정에는 장애가 될 수 있음을 상기시키고 있다.

이와 같은 현상은 본 연구에 참여한 학생A에게서도 나타났다. 다음은 학생A가 5차시 ‘원주각의 크기와 호의 길이에 관한 성질’을 증명하는 과정의 일부인데 그는 GSP와 같은 소프트웨어를 활용하여 확인이 된 사항에 대해서는 따로 증명할 필요가 없다고 생각하였다.

학생 A : 궁금한 게 있는데요. 꼭 모든 성질을 다 증명해야 해요? 때에 따라서는 안 해도 될 거 같은데. 특히 이런 프로그램을 이용하면 꼭 증명을 안 해도 될 거 같아요.

연구자 : 그래? 왜 그렇게 생각해?

학생 A : 왜냐면 이렇게 GSP를 이용해서 조건에 맞는 그림을 그리고 각의 크기나 길이 등을 측정해서 도형의 성질이 성립함을 확인하고, 또 진짜 성립하는지 작도해 보고, 점이나 선을 끌어서 도형을 바꿔도 항상 성립함을 보일 수 있으니까요. 꼭 이렇게 증명을 해야 해요?

학생A의 이러한 생각은 5차시 활동이 끝난 뒤에도 지속되다가 GSP를 활용해도 모든 경우를 다 확인한 것이 아니라는 설명을 듣고 난 후에야 논리적인 증명이 필요하다는 사실을 인정하였다.

6) GSP를 활용한 증명학습으로는 중학생들이 기호를 사용하여 증명쓰기 하는 과정에서 겪는 어려움을 완화시키기 힘들다.

기호화는 논증에서 중요한 역할을 하며, 잘못된 기호화로 인하여 증명에서 여러 가지 오류가 발생하고 잘못된 결론이 이끌어지기도 한다. 여러 연구 결과에서 확인할 수 있는 것처럼 많은 중학생들이 기호화나 기호를 이용하여 증명쓰기를 하는 데 많은 어려움을 느낀다.

본 연구의 GSP를 활용한 증명 활동에 참여한 학생들도 기호화와 관련된 문항에서 낮은 성취도를 보였다. 특히, 자신이 한 추측이 항상 성립함을 말로 설명해 보라는 요구에는 논리적으로 설명할 수 있었으나 글로 써보라고 요구하였을 때는 두 학생 모두 당황하였으며

기호를 사용하여 증명쓰기를 하는데 매우 낮은 자신감을 보였다.

GSP를 활용한 증명활동이 진행되면서 그들은 GSP에서 보여주는 기호에 익숙해졌지만 직접 손으로 탐구활동지에 증명을 하면서 기호를 사용하는 데는 여전히 어려움을 겪는 것을 확인할 수 있었다.

연구자 : GSP로 증명 활동을 해 보니까 수학적인 기호를 이용하는 것에 도움이 된 거 같아?

학생 A : 도움이요? 글썄.

연구자 : 화면을 봐. 측정을 해보니까 직접 이렇게 기호를 사용하여 화면에 나타나잖아. 어떤 거 같아?

학생 B : 이렇게 기호로 표현되어 보여주니까 좋긴 한데요. 눈으로 보는 거랑 직접 손으로 써 보는 거랑 차이가 있는 거 같아요. GSP로 작도, 탐구, 측정하고 나서 직접 손으로 증명을 하려고 하면 또 다시 기호로 나타내는 게 어렵게 느껴져요. 기호는 그냥 외워야 될 거 같은데요.

GSP를 활용한 증명 활동은 GSP의 이름 붙이기 기능을 통해 중학생들에게 자연스럽게 기호를 사용하게 하는 긍정적인 역할도 했지만 그것을 손으로 쓰게 하는 증명쓰기를 하는 과정에서 중학생들이 겪는 어려움까지 완화시키지는 못했다.

V. 결론

본 연구에서는 중학교 수학 '원의 성질' 단원의 증명과정에서 중학생들이 겪는 어려움이 무엇인지를 파악하고, 탐구형 기하 소프트웨어의 하나인 GSP를 활용한 증명지도가 중학생들의 증명학습 과정에 어떤 영향을 미치는가를 탐구하고자 하였다. 이를 위하여, 다음과 같은 과정을 거쳐 자료를 수집하였다. 우선, 중학생들이 증명학습 과정에서 겪는 어려움이 무엇인지를 조사하기 위해 76명의 중학생들을 대상으로 진단검사를 실시하였다. 그런 다음, 두 명의 연구참여자를 선정하여 각각 8차시의 GSP를 활용한 탐구활동 수업을 진행함으로써 GSP를 활용한 증명지도가 중학생들의 증명학습 과정에 어떤 영향을 미치는지를 탐구하였다. 이 과정에서 수집된 자료는 서로 연계되어 분석되었으며, 그 결과로 다음을 확인하였다.

첫째, 중학생들은 「원의 성질」 단원의 증명학습 과정에서 가정과 결론의 이해, 기호의 사용, 도형의 작도, 추론 등과 관련된 어려움을 겪는다.

중학생들은 진단검사의 가정과 결론을 구분하는 두 문제에서 각각 35%, 20%의 정답률을 보여 매우 낮은 성취도를 보였다. 뿐만 아니라, 많은 중학생들이 결론을 증명과정에 임의로 이용하거나, 주어진 가정을 증명에 이용하지 않고 결론을 이끌어내려고 하는 등 증명에서 가정과 결론의 의미와 역할이 무엇인지를 정확하게 이해하지 못하고 있었다.

중학생들은 증명학습 과정에서 기호를 사용하는데 많은 어려움을 겪고 있었는데, 진단검사의 기호화에 관련된 문제의 정답률이 12%, 15%, 7%로 나타나 이를 뒷받침해 주었다.

한편, 기하영역의 증명학습에서는 증명과 관련된 도형을 작도하는 것이 증명의 성패를

좌우하는 경우가 많은데, 중학생들은 기본적인 용어의 의미나 정의를 제대로 이해하지 못해 작도해야 할 도형이 무엇인지, 어떻게 작도해야 하는지 등을 파악하는 과정에서 많은 어려움을 겪었다.

증명학습에서 가장 중요한 논리적 추론과정에서도 중학생들은 많은 어려움을 겪었다. 그들은 증명과 관련된 핵심적인 아이디어를 포함한 도형을 작도하고도 결론을 이끌어내지 못하거나 증명과정에 필수적인 일부 내용을 생략하기도 하였다. 또한, 증명에 필요한 모든 내용을 전개하고도 결론을 바르게 정리하지 못하는 등의 어려움을 겪었다.

둘째, GSP를 활용한 증명 학습은 중학생들이 가정과 결론의 의미와 역할을 구분하고 이해하는데 도움을 주며, 중학생들의 추측과 추론에 대한 즉각적인 피드백을 제공하여 자신의 사고를 반성할 기회를 제공한다.

가정과 결론의 의미와 역할을 이해하는 데 어려움을 겪는 중학생들이 GSP를 활용한 증명학습을 통해 자신들이 수행한 학습과정에서 무엇이 문제인지를 스스로 확인할 수 있었으며, 이 과정에서 가정과 결론의 의미와 역할을 이해하고 이를 구분하여 사용할 수 있게 되었다.

또한, 중학생들이 스스로 증명 방법을 탐색하는 과정에서 GSP의 작도, 끌기, 측정기능은 중학생들의 추측에 대한 즉각적인 피드백을 제공하여 자신의 생각에 대한 확신을 갖게 하거나 오류가능성을 스스로 판단할 수 있는 환경을 제공하였다. 이를 통해, 중학생들은 자신의 행동을 체계적으로 반성할 기회를 제공받았다.

셋째, GSP를 활용한 증명 학습은 중학생들이 다양한 사례를 검증하여 일반화를 시도하는데 도움을 주고, 증명에 필요한 아이디어를 능동적으로 탐구하는 습관을 기르는데 긍정적인 역할을 한다.

중학생들은 GSP를 활용하여 더 많은 예를 확인할 수 있어 자신의 생각을 확고히 할 수 있으며, 몇몇 특수한 사례에서 발견된 도형의 성질을 GSP의 끌기 기능 등을 통해 다양한 사례로 확장하면서 해당 성질을 일반화할 수 있었다. 또한 GSP가 가진 여러 가지 기능은 중학생들이 탐구주제와 관련된 도형을 직접 조작하는 것을 가능하게 해, 증명에 필요한 핵심적인 아이디어를 얻기 위한 탐구활동에 능동적으로 참여하였다. 뿐만 아니라, 중학생들은 새로운 도형의 성질을 배우는 과정에서도 다양한 기하학적 대상을 관찰하고, 조작하고, 추측하고, 검증해 보는 탐구 활동을 통해 새로운 수학적 지식을 발견하려는 능동적인 학습 태도를 보였다.

넷째, GSP를 활용한 증명학습은 중학생들이 증명의 필요성을 인식하는 데 장애가 될 수 있으며, 기호를 사용하여 증명쓰기 하는 과정에서 겪는 어려움을 완화시키기 힘들다.

중학생들은 GSP를 이용하여 자신들이 추측한 명제가 성립한다는 것을 확인할 수 있기 때문에 더 이상의 증명이 필요하지 않다고 생각하는 경향이 있었다. 또한, GSP를 활용하면 실제로 측정하거나 원하는 도형을 다양하게 작도해 보는 것이 가능하므로 중학생들이 경험적인 확인에 의존하는 경향이 나타났다. 이는 GSP를 활용한 증명활동이 중학생들로 하여금 연역적 정당화의 필요성을 인식하는 데 방해가 될 수 있음을 보여주는 사례이다.

한편, GPS를 활용한 증명 활동은 이름 붙이기 기능을 통해 중학생들에게 자연스럽게 기호를 사용하게 하는 긍정적인 역할을 할 수 있지만, 이 연구에 참여한 중학생들은 여전히

증명쓰기에 어려움을 호소하였다. 이는 기호를 사용한 증명쓰기를 위한 효과적인 교수 방법이 따로 강구되어야 할 필요가 있음을 말해준다.

참고문헌

- 나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석 :중학교 기하단원을 중심으로. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.
- 류희영 (2006). 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서 피드백을 활용한 증명학습에 관한 사례연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 박효진 (2006). 중등기하의 증명에서 학생들이 느끼는 어려움에 대한 연구. 건국대 교육대학원 석사학위논문.
- 서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습 -지도 방향 탐색-중학교 수학을 중심으로 -. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.
- 서지현 (2005). 기하 증명의 학습에서 중학생들이 겪는 어려움에 관하여. 건국대 교육대학원 석사학위논문.
- 윤태숙 (2002). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 증명학습. 이화여대 석사학위논문.
- 이수진 (2005). 해석기하 문제해결과정에서의 오류유형과 학생들이 겪는 어려움에 관한 연구. 한국교원대 석사학위논문.
- 이승희 (2005). 중학교 과정에서 분석법을 활용한 증명지도에 관한 연구. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이용민 (2000). 중학교 기하영역 증명지도에 있어서 분석-종합적 증명 방법에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 이정숙 (2005). 탐구형 기하 소프트웨어 학습환경에서 분석법의 활용에 관한 사례연구 : 삼각형의 성질을 중심으로. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 임승호 · 박미진 · 강미자 · 김미자 · 이미정 · 고영수 (2000). 증명 지도를 위한 수준별 수업 모델. MATH FESTIVAL,프로시딩, 제2집, 제1권.
- 조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교원대학교 박사학위 논문.
- NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

신유경·강윤수·정인철

An Influence of GSP to Learning Process of Proof of Middle School Students: Case Study

Shin, Yu Kyoung⁸⁾ · Kang, Yun Soo⁹⁾ · Jung, Inchul¹⁰⁾

Abstract

In this paper, we investigated difficulties that middle school students face in the learning process of proof, and then inquired how does learning of proof using GSP ease students' difficulties. Throughout the inspection, we identified that students have difficulties in understanding process of premise and conclusion, use of notation, process of reasoning. And we identified, throughout learning process of proof using GSP, students can be feedbacked for their guess or reasoning, generalize the special case to general properties and have attitude checking ideas needed in proof by themselves.

Key words : Properties of circle, Learning process of proof, GSP, Error types of students in proof

8) Graduate School of Education, Sunchon National University (pooh602@hanmail.net)

9) Sunchon National University (yskang@sunchon.ac.kr)

10) Chonnam National University (ijung@chonnam.ac.kr)