대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.1, 43-61. Mar. 2008

# 일차함수의 그래프에 기초한 이차함수의 그래프에 대한 교수학적 분석[1)]

김 진 환*

현 교육과정에서 이차함수 그래프에 관한 교수-학습은 대수적 조작에 의한 완전제곱형식으로의 변환을 강조하고 이미 선행한 일차함수의 그래프와는 무관하게 다루어지고 있다. 본 논문은 이차함수 그래프의 구조적 특성이라 할 수 있는 대칭성, 꼭짓점 및 합동에 대한 기하적인 근거를 일차함수의 그래프에 기초하여 분석하고 이것의 결과를 구체적 이차함수에 대해 그 꼭짓점의 좌표 및 절편을 찾는 데 적용한다. 본 연구는 이차함수 그래프의 구조적 특성을 일차함수의 그래프와 기하적으로 연결시키는 데 의의가 있으며 그 기하적인 과정은 완전제곱형식의 대수적 절차로 연결된다. 이러한 연결은 일차함수의 그래프에 대한 이해가 이차함수의 그래프에 대한 이해로 전이되어 이차함수에 대한 기하적인 이해를 넓히는 교수-학습방법이 될 수 있을 것이다.

## Ⅰ. 서 론

함수는 수학의 가장 기본적인 개념들 중 하나이다. 함수의 기본 개념은 초등학교부터 비형식적으로 소개되어지고 있으며, 함수 개념은 중등학교 수학과교육과정에서뿐 아니라 수학의 전 분야에서 광범위하게 다루어진다.

함수의 개념은 자연현상에서 변하는 두 양간에 관련한 양적 연구를 위한 필요도구로서 나타났으며 오늘날의 함수의 개념이 정착되기까지는 시대에 따라 여러 번 진화하여 왔다. 17세기에서 18세기의 대부분 수학자들은 함수를 양, 연산, 식 혹은 관계성으로 정의하고 있으므로 함수는 종속적 성격의 개념이라 볼 수 있으며 19세기에서 20세기 수학자들은 함수를 대응의 법칙으로 정의하고 있으며 함수의 본질을 임의적이고 일의적 성격의 개념이라 볼 수 있다(김연식, 박교식, 2002; Cha, 1999; Kelly, 1996). 학교수학에서 다루는 함수의 개념은 이러한 종속적 성격과 대응적 성격이 동시에 적용되어지고 있다고 볼 수 있다.

Sfard(1987, 1991, 1992)는 함수를 과정으로서의 조작적인 면과 대상으로서 구조적인 면이 양립하는 추상적인 개념으로 묘사하고 있다. 함수의 조작적인 면은 어떤 계산 절차들을 포함한 과정과 연관하고 있으며, 주어진 관계를 설명하는 알고리즘과 규칙에 따른 하나의 양의 역동적 변환을 수반한다고 설명하고 있다. 반면 함수의 구조적 개념은 국소적이 아닌 대칭성, 주기, 가역성등과 같은 대역적인 함수의 성질과 관계하는 것으로 기술하고 있다. 구조적 개념에서는

* 영남대학교(kimjh@ynu.ac.kr)
1) 이 연구는 2007학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

함수를 하나의 대상물(object)로 보고 이러한 대상물에서 평행이동, 반사이동 및 회전과 같은 변환의 활동(action)이 수행될 수 있다. Sfard와 더불어 다른 연구가들(Even, 1990; Santos, 2003; Schwarz & Yerushalmy, 1992)도 함수 개념을 완전히 이해하고 함수에 관련한 문제를 해결하기 위하여 함수 개념의 두 가지 관념인 조작적 개념과 구조적 개념의 필요성을 강조하고 있다.

함수는 수, 변수, 좌표, 그래프 등과 같은 다양한 용어들과 관계하고 있으며 다양한 해석과 다양한 표상으로 나타내어진다. 함수가 언어나, 수치-변화표, 그래프 그리고 식과 방정식 등의 대수적 수단을 사용하여 표현될 수 있다는 것은 중요한 사실이다. NCTM(1989, 2000)의 규준집은 학생들이 함수 개념을 완전히 이해하기 위해서는 학생들이 함수를 다양한 수단으로 표현할 수 있어야 하고, 한 표상에서 다른 표상으로 번역할 수 있어야 한다고 강조하고 있다. 이와 더불어 수학적 연결성을 강조하여 수학과 교육과정의 과정 규준의 하나로 정하고 있다. 이러한 연결성에는 수학과 실세계의 상황간의 연결성과 수학자체내에서 수학개념간의 연결성으로 후자는 수학적 구조에 뿌리를 두고 있다. 가령 대수적 절차 그리고 기학적인 표현간의 연결성이나, 같은 수학적 영역에서의 여러 개념과 정리들 사이의 연결성을 예로 들 수 있다.

학생들이 함수의 개념의 두 가지 관념인 조작적이고 구조적인 개념을 이해하도록 하기 위해서 학생들이 여러 가지 표상과 번역을 접하도록 권장하고 있다(Mayes, 1995). 함수를 다룸에 있어 그래프 표현은 여러 수학교육자들에 의해 강조되어 왔으며(Freudenthal, 1983; Sfard, 1992), 특히 기하적인 표현은 기호나 언어적인 표현에 비해 개념의 정의나 성질을 쉽게 생각나게 해주는 장점을 지니고 있다(Freudenthal, 1978). 새로운 개념을 지도함에 있어 이미 알고 있거나 경험한 지식과의 연결성은 학생들이 학습에 상당한 영향을 줄 뿐 아니라 수학하는 동안의 행동에도 영향을 끼치며 수학적 연결성은 관계성이 풍부한 지식으로서 개념적 지식은 절차적 지식과 병행하여 발전되어지며 낱개의 수학적 지식이나 사실들 간의 관계성을 형성할 때 더욱 발달하게 된다(Hiebert & Lefevere, 1986)는 사실과 상통한다.

위에서 진술한 다양한 관점들은 학교수학에서 함수영역의 중심이 되는 내용인 일차 함수 및 이차 함수를 다룸에 있어서 고려되어야 할 점이다. 현 교육과정과 이에 따른 교과서에서 일차함수와 그 그래프의 개형에 대해 많은 시간이 할애하여 다루었지만 이차함수의 개념과 그 그래프는 일차함수의 그래프와는 무관하게 형식적인 완전제곱형식에 맞추어 다루고 있으며 일차함수와 이차함수 그래프사이의 개념적 그리고 구조적 연결이 미흡하다. 이러한 연결성의 취약함이 본 연구를 수행하게 된 계기이다.

지금까지 이차함수에 관련한 선행 연구를 살펴보면, 컴퓨터 소프트웨어나 그래핑 계산기를 활용한 이차함수의 지도(이경도, 2003; 이은녕, 2003; 최종철, 2004; 하양희, 2000;), 이차함수의 효율적인 지도 방안(박순길, 서현주, 1999; 조정수, 2006), 이차함수의 그래프와 관련한 오류의 분석(김해성, 2004; 성종기, 2000; 이경도, 2003; 이현화, 2006; 지윤정, 2004). 에 대해 이루어졌다 이는 등 기존 과정에서 제시하는 이차함수에 관련된 내용에 대해 공학에 기반한 효율적인 교수학습의 측면과 오류분석이 주를 이루고 있다. 이중 조정수(2006)는 이차함수를 구성하는 이차식과 일차식을 토대로 다항식 관점에서 탐색하였다. 이는 이차함수의 구조적 접근에 대한 연구로 볼 수 있지만 더 이상의 구조적 측면에서의 이차함수에 대한 연구는 없으며 더욱이 일차함수와 이차함수를 연결하는 연구

는 찾을 수 없었다.

본 연구는 수학적 연결성과 기하적인 표상을 강조한 교수학적 관점에 근거하여 이차함수 그래프의 구조적 특성이라 할 수 있는 대칭성, 꼭짓점, 절편, 합동의 근원을 일차함수 그래프(직선)에 기초하여 분석[2]하고 이로부터 얻어지는 결과를 이차함수 그래프의 꼭짓점의 좌표 및 $x$ 절편을 찾는 데 실제 적용하여 보며 기하적인 과정이 대수적 절차와 연결됨을 보인다. 이것은 완전제곱형식에 기반을 둔 대수적 절차와 공식에 치우쳐 있는 기존의 이차함수의 교수-학습방법에 대해 새로운 관점을 제공함으로써 이차함수의 그래프에 대한 구조적 특성에 대한 이해를 넓히는 효과가 있을 것으로 기대한다.

## II. 직선적 관점에서의 이차함수 그래프의 대칭성 유도 및 적용

이차함수의 그래프가 가지는 가장 중요한 특성은 선대칭도형이라고 할 수 있다. 이 장에서는 이차함수의 그래프의 대표적 구조적 특성이라 할 수 있는 대칭성을 일차함수의 그래프(직선)의 성질에 기초하여 유도하고 이를 구체적 이차함수의 문제 해결에 적용하고자 한다.

### 1. 직선에 기초한 이차함수 그래프의 대칭성과 꼭짓점 탐구

일반형의 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프를 $y$축의 방향으로 상수항 $c$만큼 평행 이동한 것이다[3]. 여기서 $ax^2+bx$는 $x(ax+b)$, $ax(x+\frac{b}{a})$등으로 나타낼 수 있다. $y=ax^2+bx$의 그래프가 가지는 특성을 두 일차함수 $y_1=x$와 $y_2=ax+b$의 그래프에 기초하여 찾고자 한다. 가령 $f(x)=x^2+2x$에 대해 $y_1=x$와 $y_2=x+2$의 그래프를 살펴보자. 이 그래프들의 $x$절편은 0과 $-2$이며 이들의 평균값은 $-1$이다. 이 평균값을 중심으로 다음과 같은 함수 변화표 <표 II-1>를 만들어 보자.

<표 II-1> $y_1=x$와 $y_2=x+2$ 및 $f(x)=y_1(x)\,y_2(x)$의 함숫값 변화표

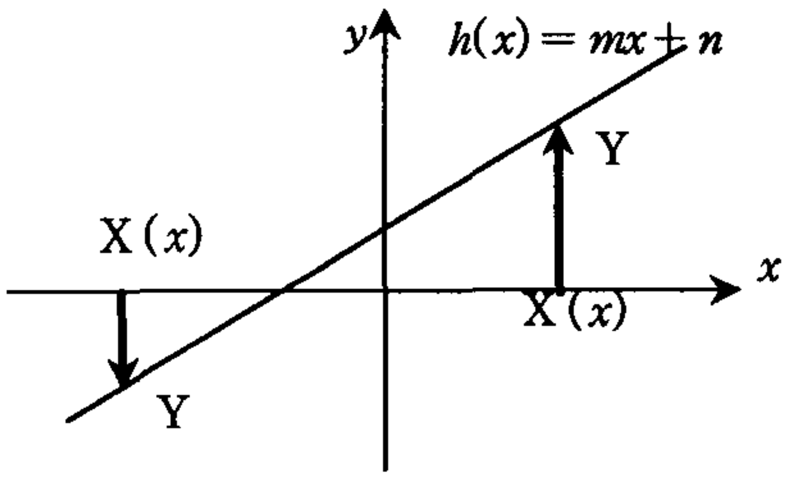
| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1(x)$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y_2(x)$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_1(x)\,y_2(x)$ | 8 | 3 | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 |

<표 II-1>에서 $x$축위의 $-1$을 중심으로 같은 거리에 있는 $-2$와 0에서, $-3$과 1에서 및 $-4$와 2에서 두 일차 함숫값의 곱이 각각 같고 이들 곱 가운데 $-1$이 최솟값으로 $x=-1$일 때의 두 일차 함숫값의 곱이다. 이러한 두 일차 함숫값을 곱하는 연산의 결과가 암시하는 것은 $f(x)=x^2+2x$의 그래프의 대칭성과 꼭짓점의 문제이다. 이러한 문제들을 두 일차함수의 그래프(직선)에 기초한 기하적인 시각에서 살펴보기로 하자.

2) 교수학적 분석은 학교수학의 특정한 주제를 가르치기 적절하게 교재와 수업을 조직하는 데 유용한 시사를 얻기 위해 그 주제의 본질을 다양한 측면에서 분석하는 연구를 통해 학교수학 교육의 개선에 도움이 되는 방안이 되도록 하고자 하는 것이다(우정호외, 2006). 여기선 특정한 수학적 개념의 본질에 대한 이해 및 수학적 개념을 지도하는 방식과 관련한 수학적 분석이다.

3) 일반적인 이차 함수 $y=f(x)$, $y=f(x)+c$의 그래프의 관계로 일반화시켜 $y=f(x)+c$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $y$-축 방향으로 $c$만큼 평행 이동한 것으로 학생들이 받아들이는 데 부담이 적은 개념이다.

모든 일차함수의 그래프는 $x$축 및 $y$축과 교차한다. 또한 이 그래프는 $x$축의 임의의 점에서 수직되게 그은 직선과 한 점에서 만난다[4]. $x$축 위의 한 점과 이 점에서 $x$축에 수직되게 그은 직선과 일차함수의 그래프가 만나는 점을 잇는 선분의 길이는 함숫값과 자연스런 관계를 맺을 수 있다. 특히 $x$축과의 위치 관계에 따라 이 선분의 길이에 부호를 부여한 것이 함숫값이다. 이때 그 교점이 $x$축 아래 있으면 음의 부호, $x$축 위쪽에 있으면 양의 부호를 준다. 좌표평면상의 두 점 X와 점 Y를 잇는 선분의 길이를 $\overline{\mathrm{XY}}$로 나타낸다. 선분의 길이와 함숫값과의 관계를 일차함수에 맞추어 좀 더 구체적으로 살펴보자. $x$축 위의 한 점 $\mathrm{X}(x,0)$에서 $x$축에 수직인 직선과 일차함수 $h(x)=mx+n$의 그래프(직선)가 만나는 점은 $\mathrm{Y}(x,h(x))$이다. Y가 좌표평면에서 제 1 혹은 2 사분면($x$축보다 위쪽)에 있으면 $h(x)>0$이므로 $h(x)=\overline{\mathrm{XY}}$로 둘 수 있고, 제 3 혹은 4 사분면($x$축보다 아래쪽)에 있으면 $h(x)<0$이고 $h(x)=-\overline{\mathrm{XY}}$이며, $x$축에 놓여 있으면 X, Y는 같은 점으로 $h(x)=\overline{\mathrm{XY}}=0$이다. ([그림 Ⅱ-1])




[그림 Ⅱ-1] 선분의 길이 $\overline{\mathrm{XY}}$와 함숫값

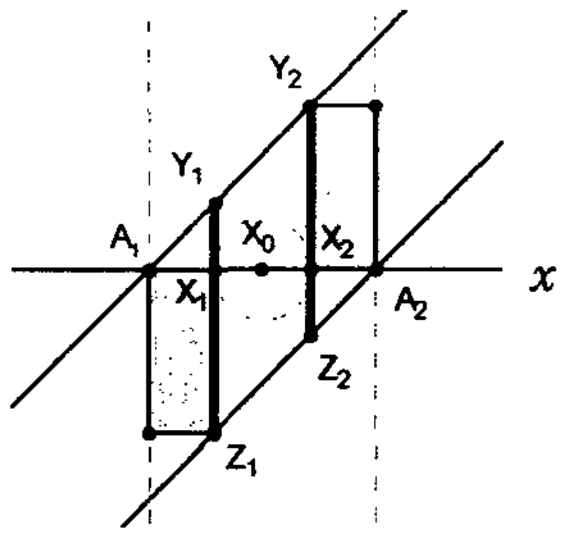
따라서 두 일차함수의 곱으로 주어진 이차함수 $f$는 $x$축 위의 한 점 $\mathrm{X}(x,0)$에서 $x$축에 수직인 직선과 두 일차함수와 교점을 Y, Z라 하면 $f(x)$는 $\overline{\mathrm{XY}}\cdot\overline{\mathrm{XZ}}$이거나 $-\overline{\mathrm{XY}}\cdot\overline{\mathrm{XZ}}$이다.

이러한 선분의 길이와 함숫값의 관계를 토대로 두 일차함수의 그래프인 직선의 위치 관계(평행일 때와 교차할 때)에 따른 이차함수의 그래프의 특성을 알아보자.

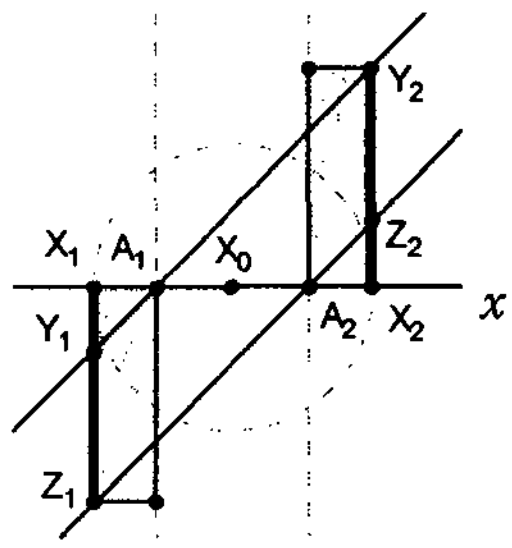
두 직선 $\ell_1$, $\ell_2$가 $x$축과 만나는 점을 $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$라 하고 이들의 중점 $\mathrm{X}_0$라 하자. $\mathrm{X}_0$를 중심으로 하는 임의의 원을 작도하고 이 원과 $x$축과의 교점을 $\mathrm{X}_1$, $\mathrm{X}_2$라 하자. $\mathrm{X}_1$을 지나 $x$축에 수직인 직선과 두 직선 $\ell_1$, $\ell_2$와의 교점을 $\mathrm{Y}_1$, $\mathrm{Z}_1$이라 하고, $\mathrm{X}_2$을 지나 $x$축에 수직인 직선과 두 직선 $\ell_1$, $\ell_2$와의 교점을 $\mathrm{Y}_2$, $\mathrm{Z}_2$라 하자.

두 직선이 기울기가 1인 일차함수의 그래프라면 아래의 [그림 Ⅱ-2]같이 크게 두 가지 경우로 생각해 볼 수 있다.

(경우1)




(경우2)




[그림 Ⅱ-2] 기울기가 1인 두 일차함수의 그래프에 대한 $\overline{\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1}\cdot\overline{\mathrm{X}_1\mathrm{Z}_1}$ 및 $\overline{\mathrm{X}_2\mathrm{Y}_2}\cdot\overline{\mathrm{X}_2\mathrm{Z}_2}$

4) 한 평면 도형이 함수의 그래프인가를 판단하는 하기 위하여 '수직선 검사(vertical-line test)'(이 도형이 $x$축에 수직인 직선과 만나지 않거나 한 점에서 만나는가가 함수의 그래프인가를 판단하는 기준이 된다) 충족시켜야 한다. 1차함수의 정의역 실수전체집합이므로 늘 한 점에서 만난다.

두 경우 모두 $\overline{X_1Y_1}$과 $\overline{X_1Z_1}$의 곱 및 $\overline{X_2Y_2}$와 $\overline{X_2Z_2}$의 곱의 값들을 직사각형의 넓이로 바꿀 수 있으며, 이들 직사각형은 서로 합동으로 넓이가 같으므로 $\overline{X_1Y_1}\cdot\overline{X_1Z_1} = \overline{X_2Y_2}\cdot\overline{X_2Z_2}$ 이 성립한다.

두 직선이 일반적인 일차함수에 의해 주어진 경우에 대해 생각하여 보자. 대표적인 몇 가지 직선의 위치가 [그림 Ⅱ-3]에 주어져 있다. 이들을 토대로 $\overline{X_1Y_1}\cdot\overline{X_1Z_1}$와 $\overline{X_2Y_2}\cdot\overline{X_2Z_2}$를 비교하여 보자. 여기서는 삼각형의 닮음성과 닮음비를 활용한다. [그림 Ⅱ-3]이 보여주듯,

$\triangle X_1A_1Y_1 \quad \triangle X_2A_1Y_2, \quad \triangle X_1A_2Z_1 \quad \triangle X_2A_2Z_2$

임을 관찰할 수 있다. 그러므로

$\overline{X_1Y_1}:\overline{X_2Y_2} = \overline{X_1A_1}:\overline{X_2A_1},$

$\overline{X_2Z_2}:\overline{X_1Z_1} = \overline{X_2A_2}:\overline{X_1A_2}$

여기서 $\overline{X_1A_1} = \overline{X_2A_2}$이고

$\overline{X_1A_2} = \overline{X_2A_1}$이므로

$\overline{X_1Y_1}\cdot\overline{X_1Z_1} = \overline{X_2Y_2}\cdot\overline{X_2Z_2}$

가 성립한다.

이제 두 직선 $\ell_1$, $\ell_2$와 $x$축이 만나는 두 점 $A_1$, $A_2$의 중점 $X_0$을 지나고 $x$축에 수직인 직선과 직선 $\ell_1$, $\ell_2$와의 교점을 $Y_0$, $Z_0$이라 하자. $A_1$, $A_2$사이에 있는 $x$축위의 임의의 점 X를 잡자. 점 X를 지나 $x$축에 수직인 직선과 $\ell_1$, $\ell_2$와의 교점을 Y, Z라 하고 $\overline{XY}\cdot\overline{XZ}$와 $\overline{X_0Y_0}\cdot\overline{X_0Z_0}$를 비교하여 보자.

편의상 $A_1$과 $A_2$을 잇은 선분의 길이 $\overline{A_1A_2}$을 $2s$라 하자. [그림 Ⅱ-4]에서 보듯 $\triangle A_1X_0Y_0 \ \triangle A_1XY$, $\triangle A_2X_0Z_0 \quad \triangle A_2XZ$ 이므로

$\overline{X_0Y_0}:\overline{XY} = \overline{A_1X_0}:\overline{A_1X} = s:\overline{A_1X},$

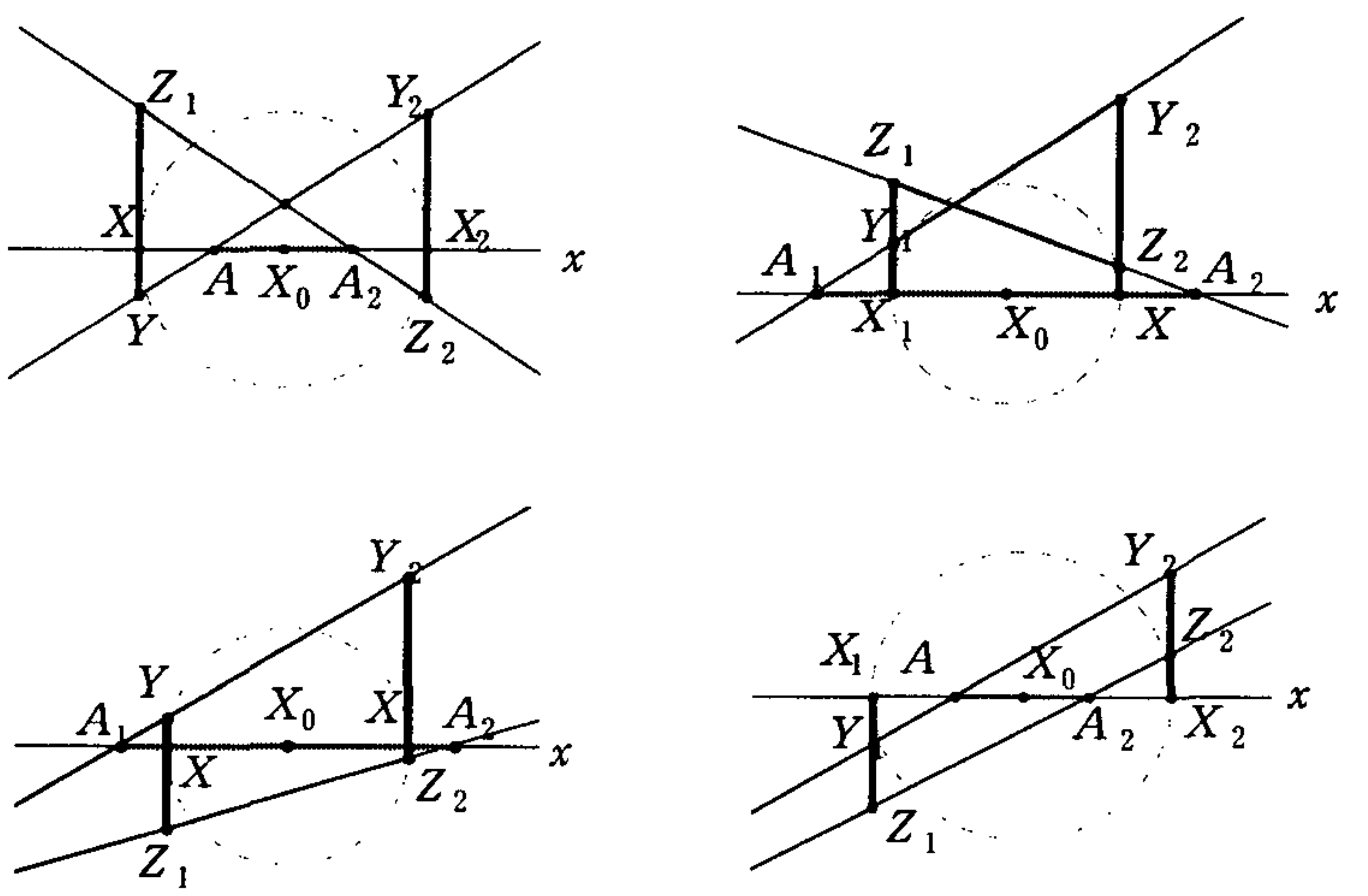
$\overline{X_0Z_0}:\overline{XZ} = \overline{A_2X_0}:\overline{A_2X} = s:\overline{A_2X}$

$\therefore \quad \overline{X_0Y_0}\cdot\overline{A_1X} = \overline{XY}\,s,$

$\overline{X_0Z_0}\cdot\overline{A_2X} = \overline{XZ}\,s$

$\therefore \quad (\overline{X_0Y_0}\cdot\overline{X_0Z_0})(\overline{A_1X}\cdot\overline{A_2X}) = (\overline{XY}\cdot\overline{XZ})\,s^2$ ---(*)

여기서 $\overline{A_2X} = 2s - \overline{A_1X}$이며, $a(=\overline{A_1X})$와 $b(=\overline{A_2X})$는 음이 아닌 두 수로 합이 $2s$



[그림 Ⅱ-3] 중점 $X_0$에서 같은 거리에 있는 $x$축상의 두 점 $X_1$, $X_2$에 대한 $\overline{X_1Y_1}\cdot\overline{X_1Z_1}$ 및 $\overline{X_2Y_2}\cdot\overline{X_2Z_2}$

로 일정하므로 그 곱 $ab$는 두 수 $a$와 $b$의 차가 적을수록 그 값을 커지고 특히 $a=b$인 경우가 그 값이 최대이다. 따라서

$$s^2 \geq \overline{A_1X} \cdot \overline{A_2X}$$

이고 관계식 (*)로부터 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\overline{X_0Y_0} \cdot \overline{X_0Z_0} \geq \overline{XY} \cdot \overline{XZ}$$

또한 X가 $X_0$에 가까울수록 $\overline{XY} \cdot \overline{XZ}$의 값은 커지면서 $\overline{X_0Y_0} \cdot \overline{X_0Z_0}$와 가까워짐을 알 수 있다.

만약 $\ell_1$, $\ell_2$의 기울기가 1이라면 $\overline{X_0Y_0} = \overline{X_0Z_0} = s = \frac{\overline{A_1A_2}}{2}$ 이므로

$$\overline{X_0Y_0} \cdot \overline{X_0Z_0} = \left\{ \frac{\overline{A_1A_2}}{2} \right\}^2$$

이다.

지금까지의 일차함수의 그래프인 두 직선에 기초한 기하적인 사실들은 다음과 같은 [성질1]로 요약될 수 있다.

[성질1] 두 직선이 $x$축과 만나는 두 점 $A_1$, $A_2$의 중점 $X_0$에서 같은 거리에 있는 $x$축위의 두 점 $X_1$, $X_2$에 대해 $X_1$을 지나 $x$축에 수직인 직선과 두 직선과의 교점을 $Y_1$, $Z_1$이라 하고, $X_2$을 지나 $x$축에 수직인 직선과 두 직선과의 교점을 $Y_2$, $Z_2$이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\overline{X_1Y_1} \cdot \overline{X_1Z_1} = \overline{X_2Y_2} \cdot \overline{X_2Z_2}$$

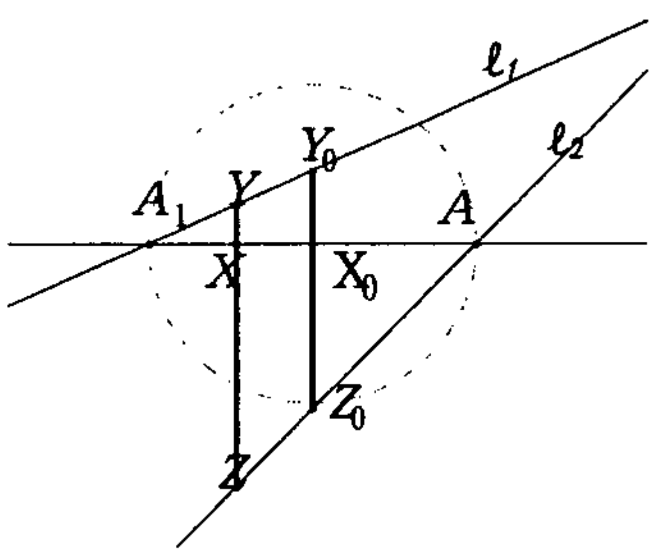
만약 점 $X_1$이 $A_1$, $A_2$사이에 있다면

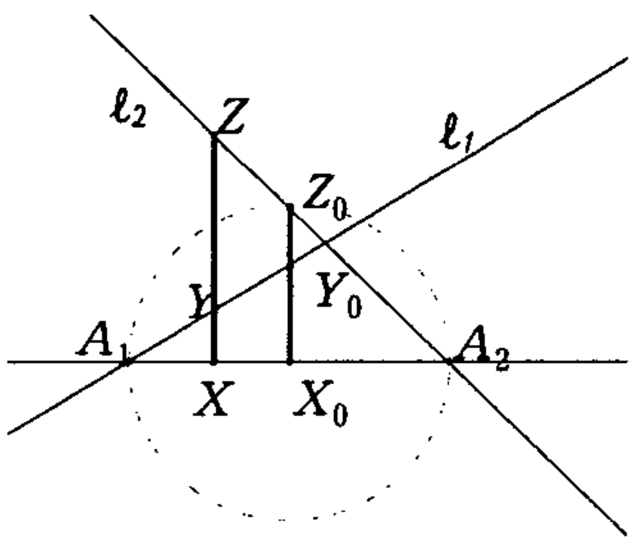
$$\overline{X_0Y_0} \cdot \overline{X_0Z_0} \geq \overline{X_1Y_1} \cdot \overline{X_1Z_1}$$

위 [성질1]은 선분의 길이와 함숫값의 관계에 따르면 두 일차함수의 곱으로 주어진 이차함수의 그래프는 대칭성과 꼭짓점[5]의 위치에 대한 정보를 주며 다음과 같은 이차함수의 특성을 뒷받침한다.

두 일차함수의 그래프의 두 $x$절편의 평균값 $x_0$에서 같은 거리에 있는 좌우 두 $x$값에서 이 두 일차함수의 곱으로 주어진 이차함수의 값이 같고 그 그래프는 직선 $x=x_0$을 대칭축으로 하는 선대칭도형이며, 그 꼭짓점은 대칭축위에 있다.

지금까지 이차함수의 그래프의 대칭성과 꼭짓점의 위치를 일차함수의 그래프(직선)에 기초한 기하적인 관점에서 알아보았다. 다음 절에서 이러한 성질을 구체적인 이차함수의 문제해결에 적용하여 보도록 한다.




[그림 II-4] 두 절편사이 점 X에 대한 $\overline{XY} \cdot \overline{XZ}$과 $\overline{X_0Y_0} \cdot \overline{X_0Z_0}$

5) 이차함수의 그래프의 함숫값이 최대 혹은 최소로 나타나는 점을 꼭짓점이라 한다. 그 대응점이 그래프와 그 대칭축과의 교점 $(x_0, f(x_0))$이다.

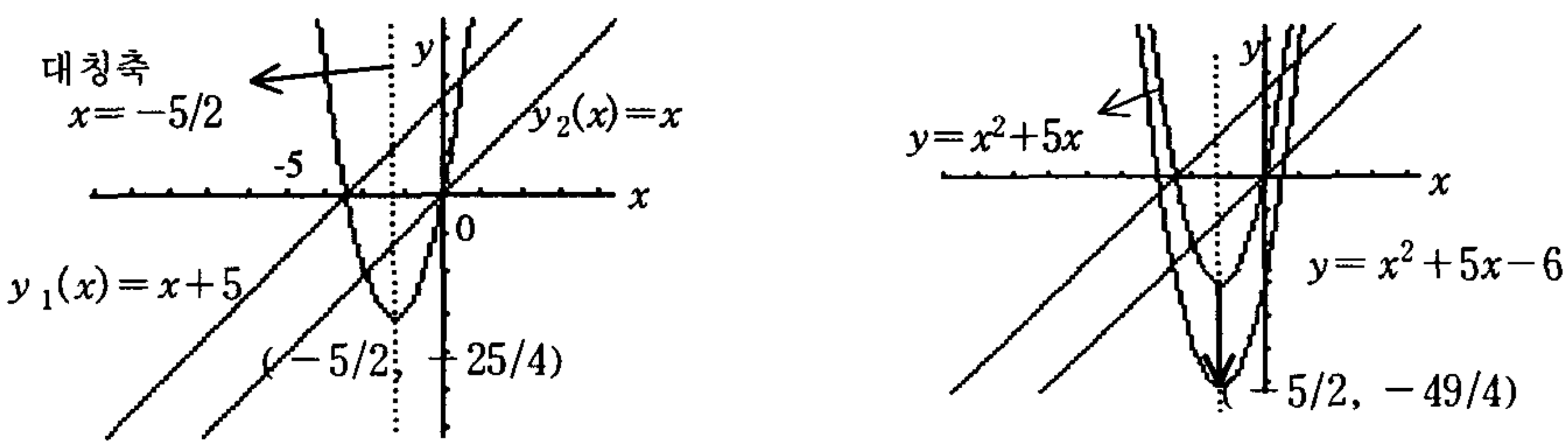
## 2. 이차함수 그래프의 대칭성의 활용

상수항이 없는 이차함수 $y=x^2+5x$는 두 일차함수 $y_1=x+5$와 $y_2=x$의 곱으로 주어짐을 쉽게 알 수 있다. 이 이차함수 그래프의 대칭축을 찾기 위하여 두 일차함수 $y_1=x+5$와 $y_2=x$의 그래프를 그려 보도록 하고 두 $x$절편[6]이 $(-5,0)$와 $(0,0)$의 중점을 지나는 직선 $x=-\frac{5}{2}$이 대칭축임을 주지한다. 이 때 꼭짓점은 대칭축에 위치하여야 하고, 이차함수 $y=x^2+5x=(x+5)x$의 그래프와 대칭축 $x=-\frac{5}{2}$과의 교점으로 꼭짓점의 $y$좌표는 두 일차 함숫값의 곱 $y_1(-\frac{5}{2})\,y_2(-\frac{5}{2})=\frac{5}{2}\cdot(-\frac{5}{2})=-\frac{25}{4}$로 주어진다. 따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-\frac{5}{2},\,-\frac{25}{4})$이다. ([그림 Ⅱ-5(1)])

이차함수 $y=x^2+5x-6$의 그래프는 이차함수 $y=x^2+5x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-6$만큼 평행 이동한 것이다. 따라서 $y=x^2+5x$의 그래프와 같은 대칭축 $x=-\frac{5}{2}$을 가진다. $y=x^2+5x-6$의 꼭짓점도 이 대칭축위에 위치하여야 하고, 이차함수 $y=x^2+5x=(x+5)x-6$의 그래프와 대칭축 $x=-\frac{5}{2}$과의 교점인 꼭짓점의 $y$좌표는 $y_1(-\frac{5}{2})\,y_2(-\frac{5}{2})-6=\frac{5}{2}\cdot(-\frac{5}{2})-6=-\frac{49}{4}$로 주어진다. 이 값 $-\frac{49}{4}$은 $-\frac{5}{2}$에서 $y=x^2+5x-6$의 함숫값으로 계산해 낼 수도 있다. 따라서 $y=x^2+5x-6$의 꼭짓점의 좌표는 $(-\frac{5}{2},\,-\frac{49}{4})$이다. ([그림 Ⅱ-5(2)])

이처럼 상수항을 포함한 이차함수의 그래프의 대칭성과 꼭짓점은 상수가 없는 이차함수에서 인수에 주어지는 일차함수에 기초하여 찾아갈 수 있다.

한편 이차함수 $y=x^2+5x-6$의 그래프는 두 일차함수 $y_1=x+6$과 $y_2=x-1$의 곱으로 주어짐을 쉽게 알 수 있다. 이 이차함수 그래프의 대칭축을 찾기 위하여 두 일차함수 $y_1=x+6$과 $y_2=x-1$의 그래프를 그려 보면 두 $x$절편 $(-6,0)$과 $(1,0)$의 중점을 지나는 직선 $x=-\frac{5}{2}$이 대칭축이고 꼭짓점이 이 대칭축




(1) (2)

[그림 Ⅱ-5] $y_1(x)=x+5$, $y_2(x)=x$의 그래프와 $y=y_1(x)\,y_2(x)$의 그래프 $y=y_1(x)\,y_2(x)-6$의 그래프의 위치관계

6) $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 $x$절편이라 하고 이것은 방정식 $f(x)=0$의 해이다. 이 그래프가 $y$축과 만나는 점의 $y$좌표를 $y$절편이라 하고, 이것은 $x=0$일 때의 함숫값 ($y$의 값) $b$이다. 광의적으로는 좌표축과의 만나는 점을 절편으로 사용하기도 한다. 이 논문에서는 둘 다에 절편이란 용어를 사용한다.

에 위치한다. 따라서 이차함수 $y=x^2+5x-6$의 그래프와 대칭축 $x=-\frac{5}{2}$과의 교점인 꼭짓점의 $y$좌표는 두 일차 함숫값의 곱 $y_1(-\frac{5}{2})$ $y_2(-\frac{5}{2})=\frac{7}{2}\cdot(-\frac{7}{2})=-\frac{49}{4}$로 주어진다. 따라서 그 꼭짓점의 좌표는 $(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4})$이다. ([그림 Ⅱ-6(1)])

이차함수와 그 인수에 의해 주어진 일차함수의 그래프의 교점을 찾는 방법에 대해 알라 보자. 두 일차함수 $y_1=x+6$과 $y_2=x-1$의 그래프와 이차함수 $y=(x+6)(x-1)$의 그래프의 교점 $P, Q$의 좌표를 찾는 것은 이들 그래프들의 관계성을 이해하는 의미 있는 활동이다. 함수의 곱 연산에 근거하여 직선 $y=1$와 두 일차함수의 교점의 $x$좌표가 교점 $P, Q$을 결정한다. 아래의 [그림 Ⅱ-6(2)]에 볼 수 있듯 $y_2=x-1$의 그래프와 직선 $y_3=1$의 교점의 $x$좌표 2이므로 교점 $P$의 좌표는 $(2, y_1(2))$이고, $y_1=x+6$의 그래프와 직선 $y_3=1$와의 교점의 $x$좌표가 $-5$이므로 교점 $Q$의 좌표는 $Q(-5, y_2(-5))$임을 알 수 있다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 대칭축과 꼭짓점의 결정에서 $y=ax^2+bx$의 인수에 의해 주어지는 일차함수의 그래프가 중요한 역할을 하였다. 또한 일차함수의 곱으로 나타내어진 이차함수 그래프의 대칭축과 꼭짓점을 쉽게 찾을 수 있음을 보았다. 다음 장에서는 이러한 인수로의 표현과 이차항의 계수 $a$의 의미에 관하여 다루기로 한다.

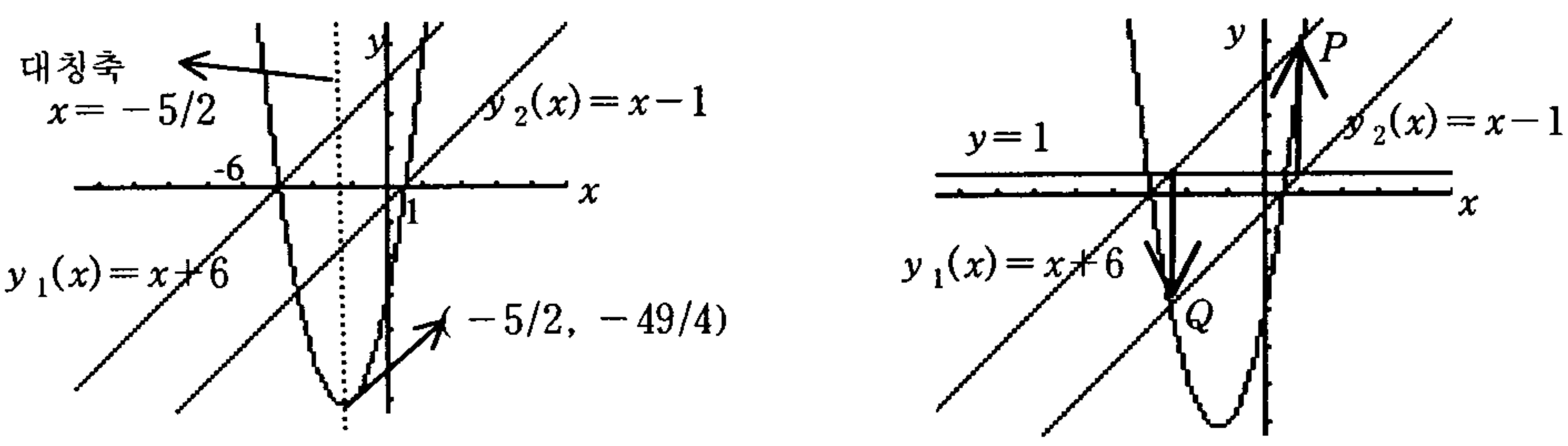
## Ⅲ. 분해형 이차함수를 일차함수의 곱으로 표현

두 일차함수와 상수의 곱으로 표현되어 있는 이차함수를 분해형 이차함수라 하자. 분해형 이차함수들의 형태 즉, 일차함수의 곱으로 표현할 수 있는 방법은 무수히 많다. 예를 들어 [그림 Ⅲ-1]에서 보듯 다양한 분해형 이차함수를 전개하면 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$을 만든다.

위 예에서 같은 이차함수를 생성하는 두 일차 함수들의 그래프들이 갖는 특성으로 다음의 세 조건을 관찰할 수 있다.

첫째, 두 일차함수의 그래프의 $x$절편은 항상 $-1, 3$이다.

둘째, 두 일차함수의 그래프의 두 $y$절편 및 상수(위의 경우 마지막 그림( $\frac{1}{2}$)을 제외하곤 모두 1)의 곱이 $-\frac{3}{2}$이다.




(1) (2)

[그림 Ⅱ-6] $y_1(x)=x+6$, $y_2(x)=x-1$의 그래프와 $f(x)=y_1(x)\ y_2(x)$의 그래프의 교점과 직선 $y=1$과의 관계

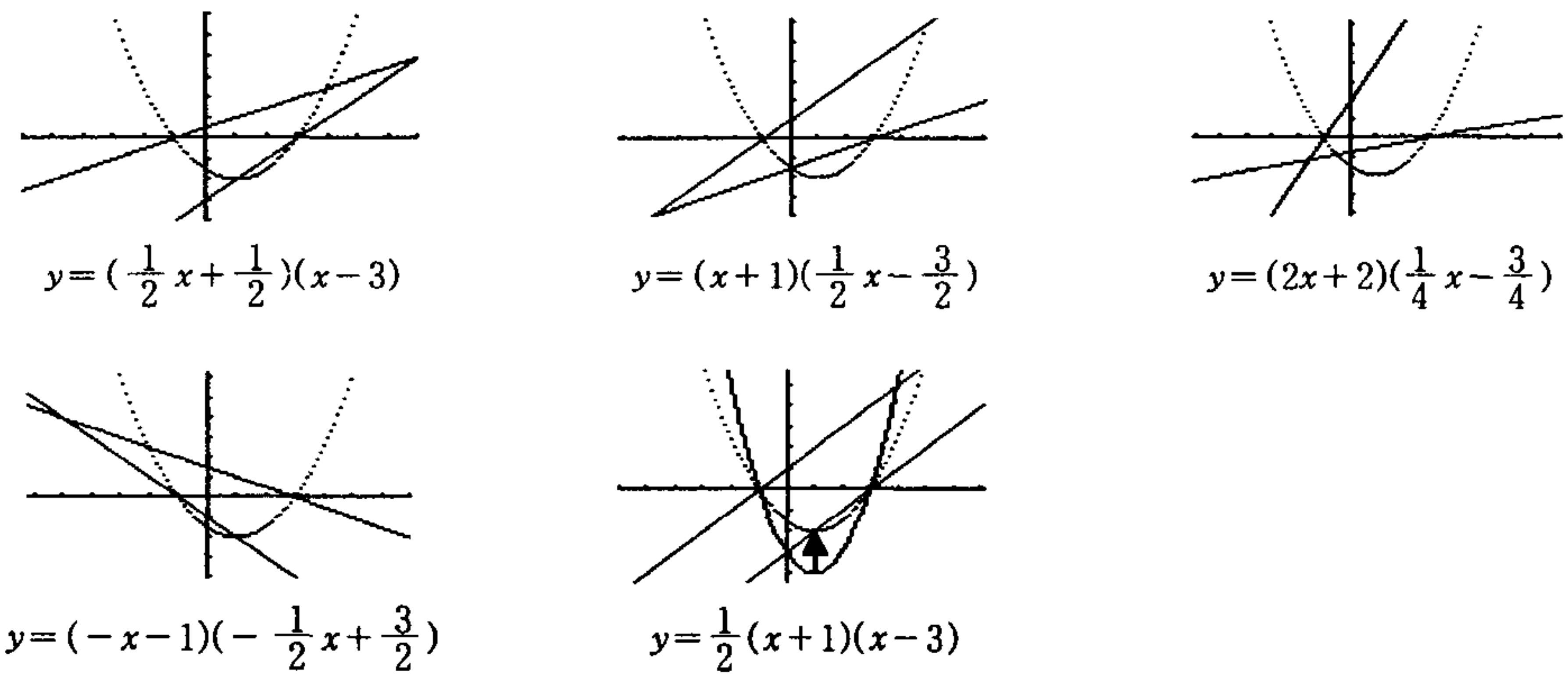
셋째, 두 일차함수의 두 기울기와 상수의 곱이 $\frac{1}{2}$이다.

여기서 첫째와 둘째 혹은 첫째와 셋째 조건은 두 쌍의 일차함수들이 같은 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$을 생성하기 위한 필요충분조건이다.

특히 이차함수는 $y=\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$와 같이 상수($\frac{1}{2}$)와 기울기가 1인 두 일차함수의 곱으로 그 표현방법은 유일하다. 분해형 이차함수는 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$에서 상수 $a(\neq 0)$의 역할을 알아보자, 이를 위해 $a$가 2, $-1$, $-2$ $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$일 때 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프와 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프를 직접적으로 비교하는 방법을 사용한다. 이러한 활동에서 그래핑 계산기나 엑셀 등의 함수를 다루는 소프트웨어의 활용도 유용하다.

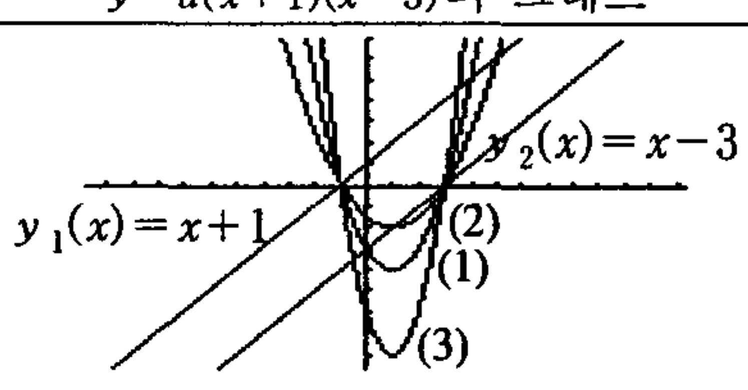
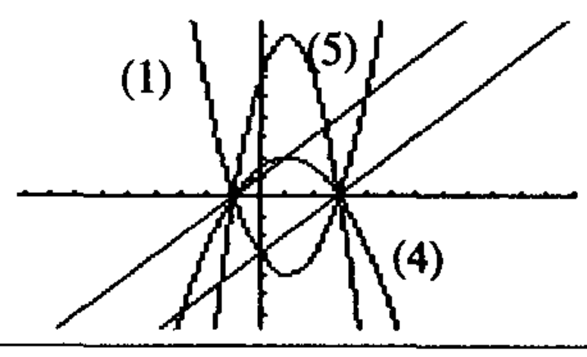
$a(\neq 0)$의 값은 대칭축과 $x$절편에는 영향을 주지 않으나(대칭축 $x=1$, $x$절편은 $-1$, 3로 일정), 꼭짓점의 $y$좌표의 값에서만 차이가 난다. $y=(x+1)(x-3)$의 그래프의 꼭짓점의 $y$좌표의 값은 $-4$이며, $y=-2(x+1)(x-3)$은 그래프의 꼭짓점의 $y$좌표의 값은 8로 $-4$에 기울기($-2$)를 곱한 값이다.

따라서 이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프는 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프로부터 해석될 수 있다. 이런 의미에서 2차 항의 계수가 1인




[그림 Ⅲ-1] 같은 이차함수의 그래프를 생성하는 두 일차함수의 그래프들의 예

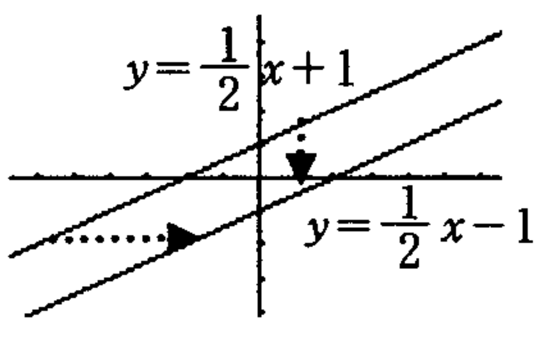
<표 Ⅲ-1> 이차함수 $y=a(x+1)(x-3)$에서 $a(\neq 0)$의 역할

| 이차함수 | $y=a(x+1)(x-3)$의 그래프 |
|---|---|
| (1) $y=(x+1)(x-3)$<br>(2) $y=\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$<br>(3) $y=2(x+1)(x-3)$ |   |
| (4) $y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$<br>(5) $y=-2(x+1)(x-3)$ |   |

이차함수를 다루고 계수 $a(\neq 0)$의 의미를 부과하면 된다.

## Ⅳ. 직선의 평행이동이 이차함수에 미치는 영향과 그 활용

평면도형의 평행이동은 도형의 합동을 다루는 데 있어 가장 기본적인 변환이다. 일차 함수 $y=mx+n$의 그래프는 $y=mx$의 그래프를 $y$축을 따라 $n$만큼 평행 이동한 것임을 교과서의 기본 내용[7]으로 다루고 있다. 그러나 $x$축 방향으로의 평행이동은 교과서의 내용으로 다루진 않는다. 일차함수의 그래프를 보면 $y=mx+n$의 그래프는 $y=mx$의 그래프를 $x$축의 방향으로 평행 이동한 그래프임을 알 수 있다. 이것은 $x$절편 $(0,0)$이 $(-\frac{n}{m},0)$으로 대응되므로 $x$축의 방향으로 $-\frac{n}{m}$만큼 평행 이동한 것이다. 가령 $y=\frac{1}{2}x-1$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x+1$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행 이동한 것이며, $x$축의 방향으로 바꾸어 보면 $x$절편 $(-2,0)$이 $(2,0)$로 대응되므로 4만큼 평행 이동한 것으로 볼 수 있다.

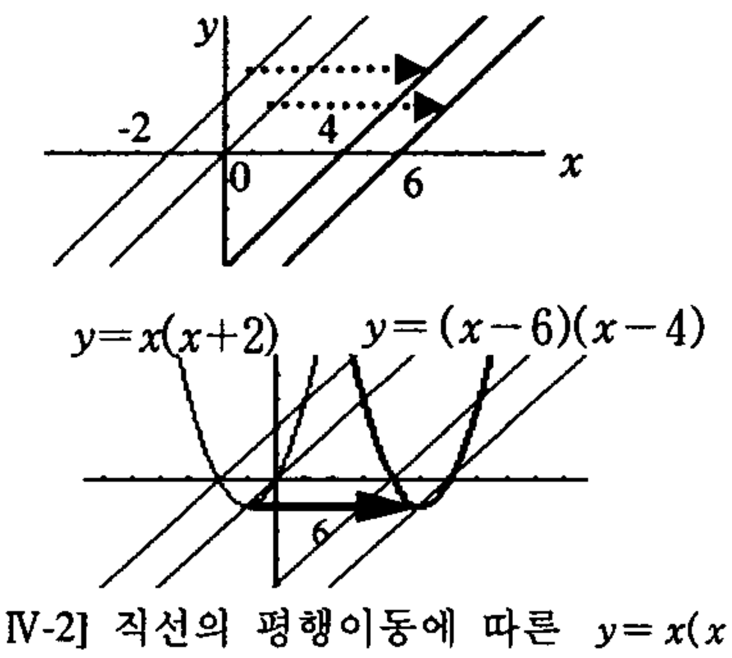



[그림 Ⅳ-1] $y=\frac{1}{2}x+1$와 $y=\frac{1}{2}x-1$의 그래프의 위치; $y$축 방향으로 평행 이동 및 $x$축 방향으로 평행 이동

이러한 일차함수 그래프의 평행이동에 따른 이차함수 그래프의 변형에 대해 다루어 보자. 일차함수의 기울기를 1인 것으로 가정하고 $x$축의 방향에서 같은 크기만큼 같은 방향으로의 평행 이동하는 경우와 같은 크기만큼 반대의 방향으로 평행 이동하는 경우에 대해 알아보기로 하고 그 결과를 구체적인 문제해결에 적용시켜 보기로 한다.

### 1. 두 직선을 같은 방향으로 평행 이동

두 일차함수 $y=x-\alpha$와 $y=x-\beta$ 그래프를 $x$축의 방향으로 같은 크기만큼 평행 이동할 때 이차함수 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프는 어떻게 변화하는 가를 살펴보자. 가령, 이차함수 $y=x(x+2)$에서 $y=x$, $y=x+2$의 그래프(직선)를 각각 $x$축의 방향으로 6만큼 평행 이동한 그래프의 일차함수의 식은 $y=x-6$, $y=x-4$이다([그림 Ⅳ-2]의 첫 번째). 이차함수 $y=(x-6)(x-4)$의 그래프와 이차함수 $y=x(x+2)$의 그래프의 모양을 Ⅱ.1절의 기하적인 과정을 적용하면 그래프의 위치에서만 다를 뿐 모양이 같음을 알 수 있다. ([그림 Ⅳ-2])




[그림 Ⅳ-2] 직선의 평행이동에 따른 $y=x(x+2)$의 그래프와 $y=(x-6)(x-4)$의 그래프간의 관계 ($x$축으로 6만큼 평행이동)

---

7) <8나>단계에서 다루어지고 있으며, 일차함수에 대해 x축으로의 평행이동에 대해 다루고 있지 않으나 이차함수의 경우 교과서 내용(<9가>)에 $y$축 방향의 평행이동 및 $x$축 방향의 평행이동의 개념을 기본내용으로 다루고 있다.

이러한 사실로부터 다음과 같은 이차함수의 성질을 얻을 수 있다.

$|\beta-\alpha|=|\delta-\gamma|$이면 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프는 $y=(x-\gamma)(x-\delta)$의 그래프를 $x$축으로 평행 이동한 도형이이고, $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프는 $y=a(x-\gamma)(x-\delta)$의 그래프를 $x$축으로 평행 이동한 도형이다.

이러한 성질에는 이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프를 $x$축으로 $k$만큼 평행 이동한 도형이 두 일차함수 $y=x-\alpha$와 $y=x-\beta$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $k$만큼 평행 이동한 그래프에 대한 일차함수들과 상수 $a$을 곱한 이차함수의 그래프란 성질을 내포한다.

## 2. 두 직선을 반대 방향으로 평행 이동

이차함수 $y=x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$의 그래프는 이차함수 $y=x^2+5x=(x+5)x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-6$만큼 평행 이동한 것이고, $y=x^2+5x-6$의 인수에 의해 주어진 일차함수 $y_1=x+6$과 $y_2=x-1$의 그래프와 $y=x^2+5x$의 인수에 의해 주어진 $y_1=x+5$와 $y_2=x$의 그래프는 $x$축 방향으로 $-1, 1$만큼 평행 이동한 것이다. 이러한 분해형 이차함수의 인수에 의해 주어진 일차함수 그래프를 $x$축에서 반대 방향으로의 평행이동은 이차함수의 $y$축으로의 평행이동과 밀접한 관계를 있음을 시사한다. 이러한 점에 근거하여 두 일차함수의 그래프를 같은 크기의 반대 방향으로 평행 이동이 궁극적으로 이차함수의 $y$축 방향의 평행이동으로 나타난다는 사실을 직사각형의 넓이를 토대로 기하적인 시각에서 보이도록 한다.

기울기가 1인 직선 $\ell_1$, $\ell_2$와 $x$축과의 교점은 $A_1$, $A_2$이고 그 중점은 $X_0$이다. l1, l2를 서로 반대 방향으로 같은 크기만큼 평행 이동한(단 중점 $X_0$을 넘어서지 않도록 한다) 직선을 l3, l4라 하고 $x$축과의 교점을 $A_3$, $A_4$라 하자. 편의상 $\overline{A_1A_2}$를 $2s$, $\overline{A_3A_4}$를 $2t$라 하고 $t\le s$이라 가정하자. $x$축위의 임의의 점 X에 대해 이 점을 지나 $x$축에 수직인 직선과 $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $\ell_4$의 교점을 $Y_1$, $Z_1$, $Y_2$, $Z_2$이라 하고 $\overline{XY_1}\cdot\overline{XZ_1}$와 $\overline{XY_2}\cdot\overline{XZ_2}$의 관계에 대해 알아보자.

이를 위해 점 X의 위치에 따라 다음의 세 가지의 경우로 나누고 직사각형의 넓이를 토대로 도형을 변형시켜가는 방법을 택한다. 아래의 [그림 Ⅳ-3]은 그림에서 변형시켜 가는 단계를 보여주고 있다.

(경우1) 점 X가 $A_3$과 $A_4$에 사이에 있는 경우

(경우2) 점 X가 $A_1$과 $A_2$에 사이에 있으나 $A_3$과 $A_4$에 사이에 있지 않는 경우

(경우3) 점 X가 $A_1$과 $A_2$에 사이에 있지 않는 경우

[그림 Ⅳ-3]에 근거하여 다음의 성질이 유도되어 진다.

[성질2] 위의 조건하에서 $\overline{XY_1}\cdot\overline{XZ_1}$와 $\overline{XY_2}\cdot\overline{XZ_2}$의 관계를 상수 $s^2-t^2$와 연계된다.

(1) X가 $A_3$과 $A_4$에 사이에 있는 경우

$\overline{XY_1}\cdot\overline{XZ_1}-\overline{XY_2}\cdot\overline{XZ_2}=s^2-t^2$,

(2) X가 $A_1$과 $A_2$에 사이에 있으나 $A_3$과 $A_4$에 사이에 있지 않는 경우

$\overline{XY_2}\cdot\overline{XZ_2}+\overline{XY_1}\cdot\overline{XZ_1}=s^2-t^2$,

(3) X가 $A_1$과 $A_2$에 사이에 있지 않는 경우

$\overline{XY_2}\cdot\overline{XZ_2}-\overline{XY_1}\cdot\overline{XZ_1}=s^2-t^2$

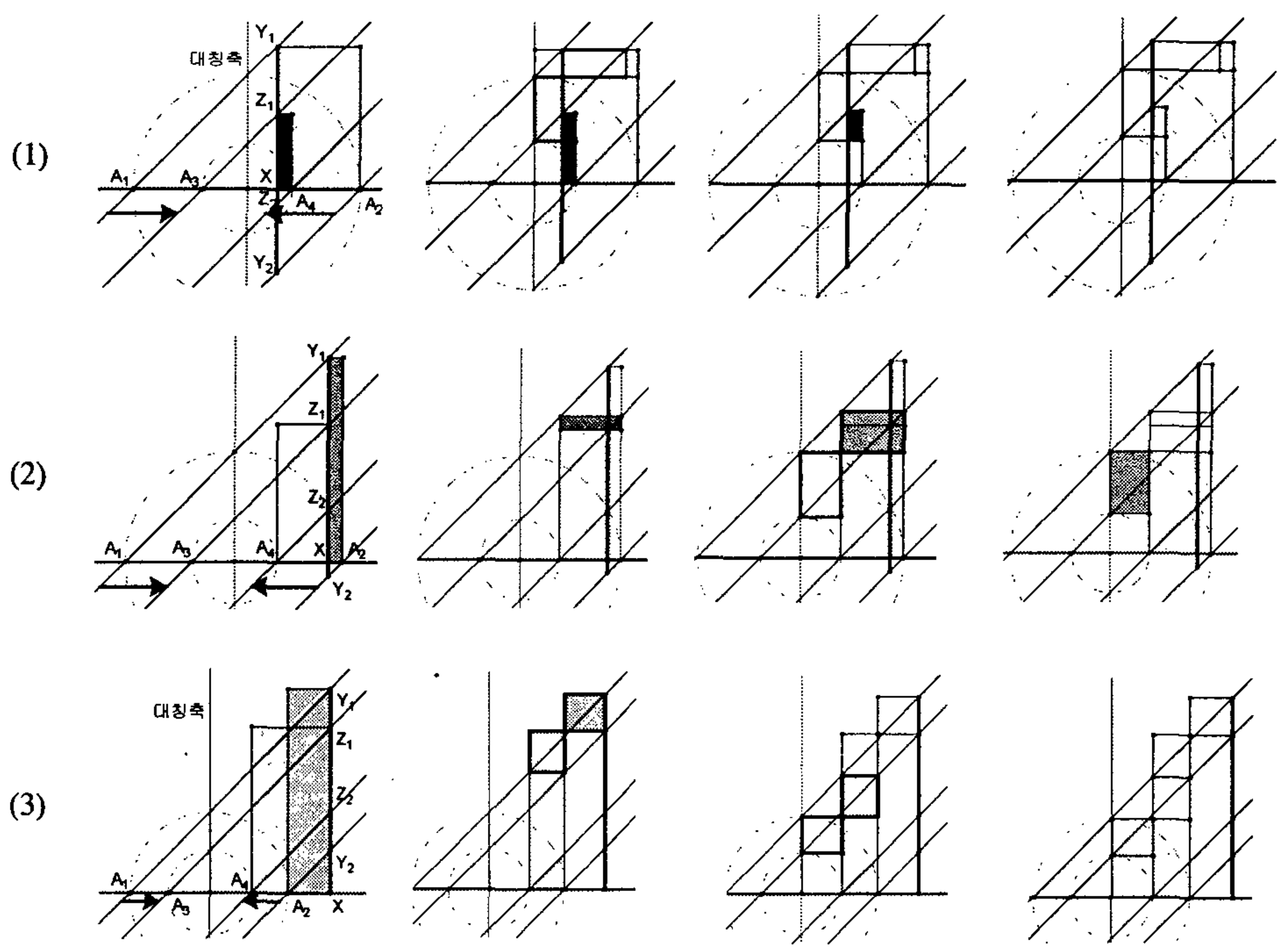
위의 [성질2]는 일차함수의 그래프로부터 얻어지는 직사각형의 넓이로서 점검하는 기하적인 방법에 초점을 두어 얻은 결과이며 다음과 같은 이차함수의 $y$축 방향으로의 평행이동 개념으로 연결된다.

$\alpha+\beta=\gamma+\delta$이면 $g(x)=(x-\gamma)(x-\delta)$의 그래프는 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프를 $y$축으로 $(\frac{\beta-\alpha}{2})^2-(\frac{\delta-\gamma}{2})^2$만큼 평행 이동한 도형이다. 일반적으로 $g(x)=a(x-\gamma)(x-\delta)$의 그래프는 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프를 $y$축으로 $a[(\frac{\beta-\alpha}{2})^2-(\frac{\delta-\gamma}{2})^2]$만큼 평행 이동한 것이다. 특히 $\gamma=\delta$인 경우는 $g(x)=a(x-\gamma)^2$로 $f$의 그래프는 $g$의 그래프를 $-a(\frac{\beta-\alpha}{2})^2$만큼 $y$축의 방향으로 평행이동한 것이고 $g$의 그래프의 꼭짓점의 $y$좌표가 $-a(\frac{\beta-\alpha}{2})^2$이다.

이러한 기하적인 적용은 이차함수의 완전 제곱형식으로의 변환하는 대수적 절차를 암시한다. 위 성질과 Ⅳ.1절의 성질을 종합하면 다음과 같은 일반적인 결과를 말할 수 있다.

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$의 선택에 관계없이, 이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프와 이차함수 $y=a(x-\gamma)(x-\delta)$의 그래프는 모두 합동이다.

이것은 $y=ax^2$, $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$, $y=ax^2+bx=ax(x+\frac{b}{a})$ 및 $y=ax^2+bx+c$의 그래프들이 모두 합동인 도형으로 $x$축 및 $y$축으로 평행 이동하여 포개짐을 보여 주며, 모든




[그림 Ⅳ-3] $\overline{XY_1}\cdot\overline{XZ_1}$와 $\overline{XY_2}\cdot\overline{XZ_2}$의 관계를 찾는 과정

이차함수의 그래프를 모양은 이차항의 계수 $a$ 의 값에 의해 좌우됨을 알 수 있다. 이러한 사실은 고등수학의 방법으로 평면 곡선의 곡률을 계산하여 비교하는 평면 곡선의 합동에 관한 기본정리에 적용하여 논할 수도 있다[8].

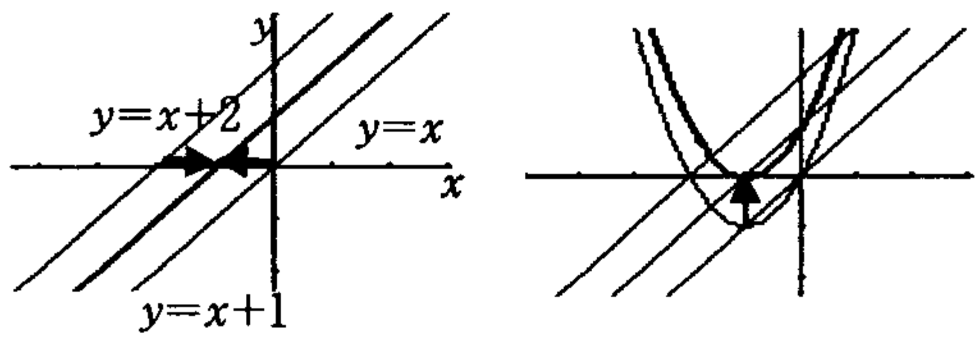
### 3. 평행 이동의 활용

분해형 이차함수 $y=ax^2+bx$에 기초하여 일반형 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점과 $x$절편을 찾는 방법을 일차함수의 평행이동을 통해 얻어지는 지금까지의 결과를 토대로 다루어 보도록 한다. $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $y$축으로 평행이동한 것으로 $y=ax^2+bx$의 그래프를 같은 대칭축을 가진다.

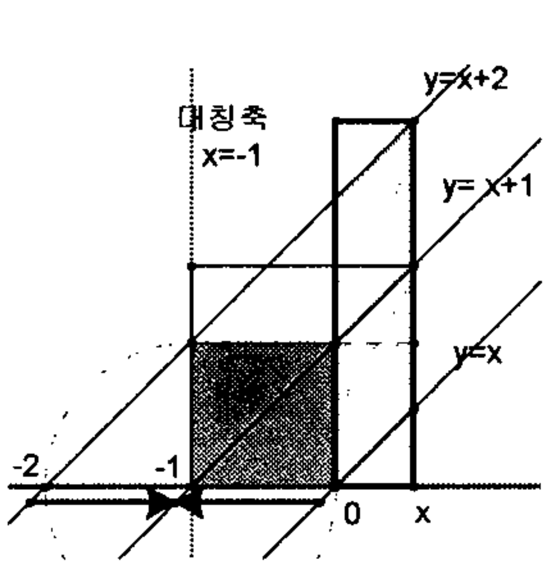
이차식 $x^2+2x$의 인수에 의해 주어지는 일차함수 $y=x$, $y=x+2$의 그래프를 각각 $x$축으로 $-1$과 1만큼 평행 이동시켜 [그림 IV-4]와 같이 두 그래프가 서로 포개지도록 하자. 이동된 그래프에 대한 일차함수는 $y=x+1$이다. 이차함수 $g(x)=(x+1)^2$의 그래프는 이차함수 $f(x)=x(x+2)$의 그래프와 같은 대칭축 $x=-1$을 가지고 $y$축의 방향으로 $1^2$만큼 평행 이동한 것이다. $g$와 $f$의 그래프가 같은 대칭축 $x=-1$을 가지므로 $g$의 그래프의 꼭짓점은 $(-1, g(-1))=(-1, 0)$이고 $f$의 그래프의 꼭짓점이 $(-1, f(-1))=(-1, -1)$이다. 이로부터도 $g$의 그래프는 $f$의 그래프를 $y$축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 것임을 알 수 있다. 따라서 이차함수 $f(x)=x(x+2)$의 그래프는 $g(x)=(x+1)^2$의 그래프를 $y$축의 방향으로 -1 만큼 평행 이동한 것이고 $f(x)=g(x)-1$로 표현할 수 있다.

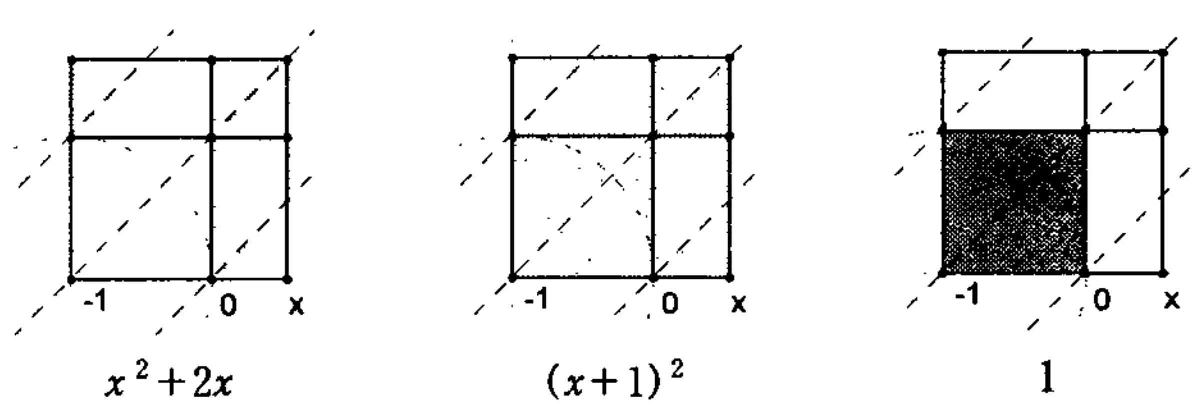
이러한 평행이동에 의한 기하적인 과정은 아래의 [그림 IV-5]에서 볼 수 있듯 $x(x+2)$을 완전 제곱식 $(x+1)^2-1$으로 고쳐가는 대수적 조작의 절차로 연결된다.

또한 $f(x)=x(x+2)$의 그래프는




[그림IV-4] $y=x$, $y=x+2$ 의 그래프를 안쪽 방향으로의 평행이동과 이들의 곱으로 주어진 이차함수의 그래프




[그림 IV-5] $x^2+2x=(x+1)^2-1$임을 도형에 의해 설명되며 대수적 조작과 연결

8) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에 대한 곡률이 $a$에 의해 좌우됨을 알 수 있다(O'Neill, 1997).

$g(x)=(x+1)^2$의 그래프를 $y$축의 방향으로 -1 만큼 평행 이동한 것이고 $f(x)=g(x)-1$이므로 $y=2x(x+2)=2[(x+1)^2-1]=2(x+1)^2-2$이다. $y=2x(x+2)$의 그래프는 $y=2(x+1)^2$의 그래프를 $y$축으로 $-2$만큼 평행 이동한 것이다.

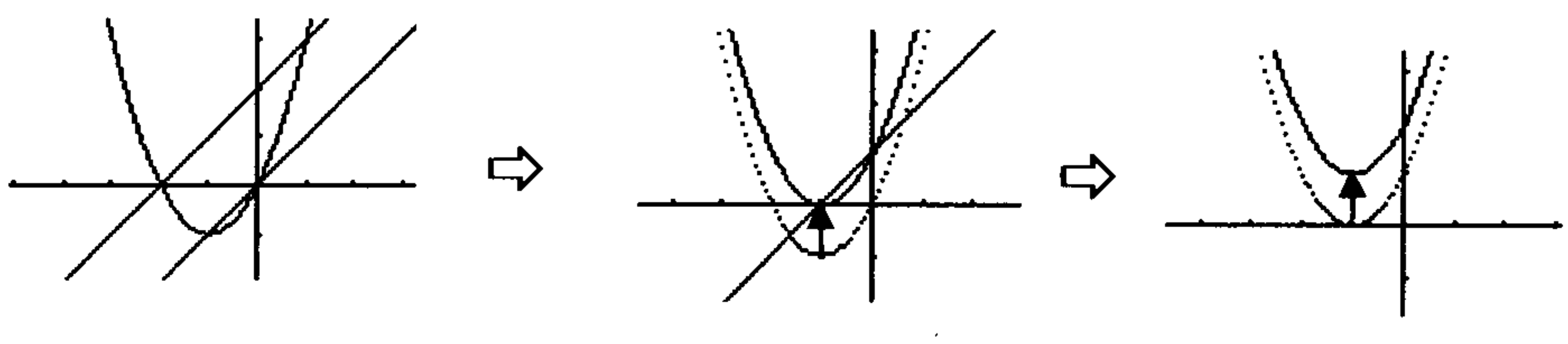
일반형 $f(x)=x^2+2x+2$의 그래프는 $y=x^2+2x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행 이동한 것이다. 위에서 다룬바와 같이 $y=x^2+2x$의 그래프는 $g(x)=(x+1)^2$의 그래프를 $y$축으로 $-1$만큼 평행 이동한 그래프이다. 따라서 $f(x)=x^2+2x+2$의 그래프는 $g(x)=(x+1)^2$의 그래프를 $y$축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 것이고([그림 Ⅳ-6]), $f(x)=g(x)+1$ 로 표현된다. 한편 $f$의 그래프는 $g$의 그래프와 같은 대칭축 $x=-1$을 가지며, $f$의 그래프의 꼭짓점은 $(-1,\ g(-1)+1)=(-1,1)$이다.

여기서 $f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$이므로 모든 $x$에 대해 $f(x)>0$가 성립하므로 $f$의 그래프가 $x$축과 만나지 않음을 알 수 있다.

일반형 이차함수 $f(x)=x^2+2x-3$의 그래프의 $x$과의 교차 여부 및 교차하는 경우 그 $x$절편을 구하는 과정을 평행이동에 기반을 둔 [그림 Ⅳ-7]을 근거하여 알아보기로 하자. $f(x)=x^2+2x-3$의 그래프는 $y=x^2+2x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행 이동한 것이다. 위와 같이 $y=x^2+2x$의 그래프는 $g(x)=(x+1)^2$의 그래프를 $y$축으로 $-1$만큼 평행 이동한 그래프이므로 $f(x)=x^2+2x-3$의 그래프는 $g(x)=(x+1)^2$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-4$만큼 평행 이동한 것이며, $f(x)=g(x)-4$ 로 표현된다. 한편 $f$의 그래프는 $g$의 그래프와 같은 대칭축 $x=-1$을 가지며, $f$의 그래프의 꼭짓점은 $(-1,\ g(-1)-4)=(-1,-4)$이다.

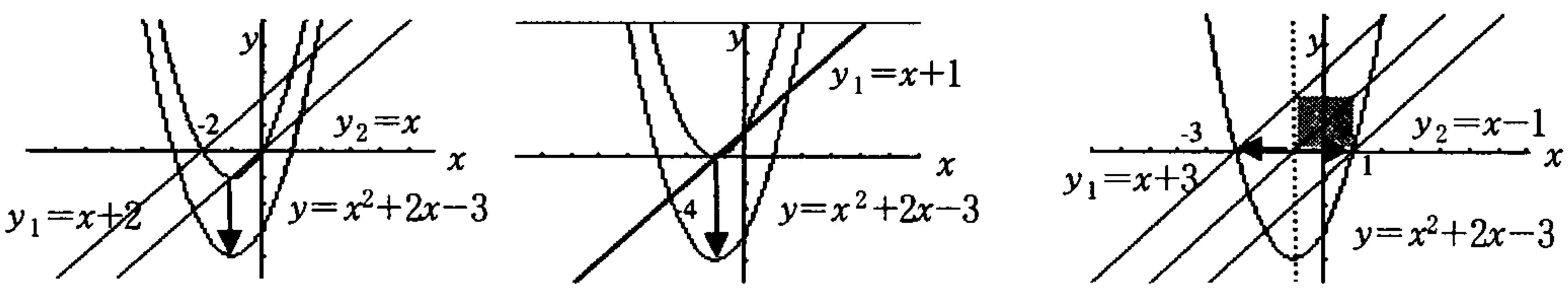
따라서 이차함수 $f(x)=x^2+2x-3$는 $x$축과 교차함을 알 수 있다. 두 $x$절편사이의 거리를 $2k$라 두자. 여기서 두 절편의 평균값은 $-1$임은 알고 있다.

따라서 위의 [성질2]에서 유도된 결과를 쓰



$y=x^2+2x$ $\qquad$ $g(x)=(x+1)^2$ $\qquad$ $f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

[그림 Ⅳ-6] $y=x^2+2x+2$의 그래프를 $y=x^2+2x$의 그래프로부터 얻어가는 과정




[그림 Ⅳ-7] 이차함수 $y=x^2+2x-3$의 $x$절편을 구하는 과정

거나 [그림 Ⅳ-7]에 의해 주어지는 사각형의 넓이와 이차함수 함숫값과의 관계를 활용하면 $k^2=4$임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $k=2$이며 이것은 두 절편의 중점과 각 절편과의 거리를 나타낸다. $f(x)=x^2+2x-3$의 그래프의 $x$절편은 $-1-2$과 $-1+2$이며 $f(x)=x^2+2x-3$는 $(-3,0)$을 지나는 일차함수 $y=x+3$과 $(1,0)$을 지나는 일차함수 $y=x-1$의 곱 $f(x)=(x+3)(x-1)$으로 나타낼 수 있다.

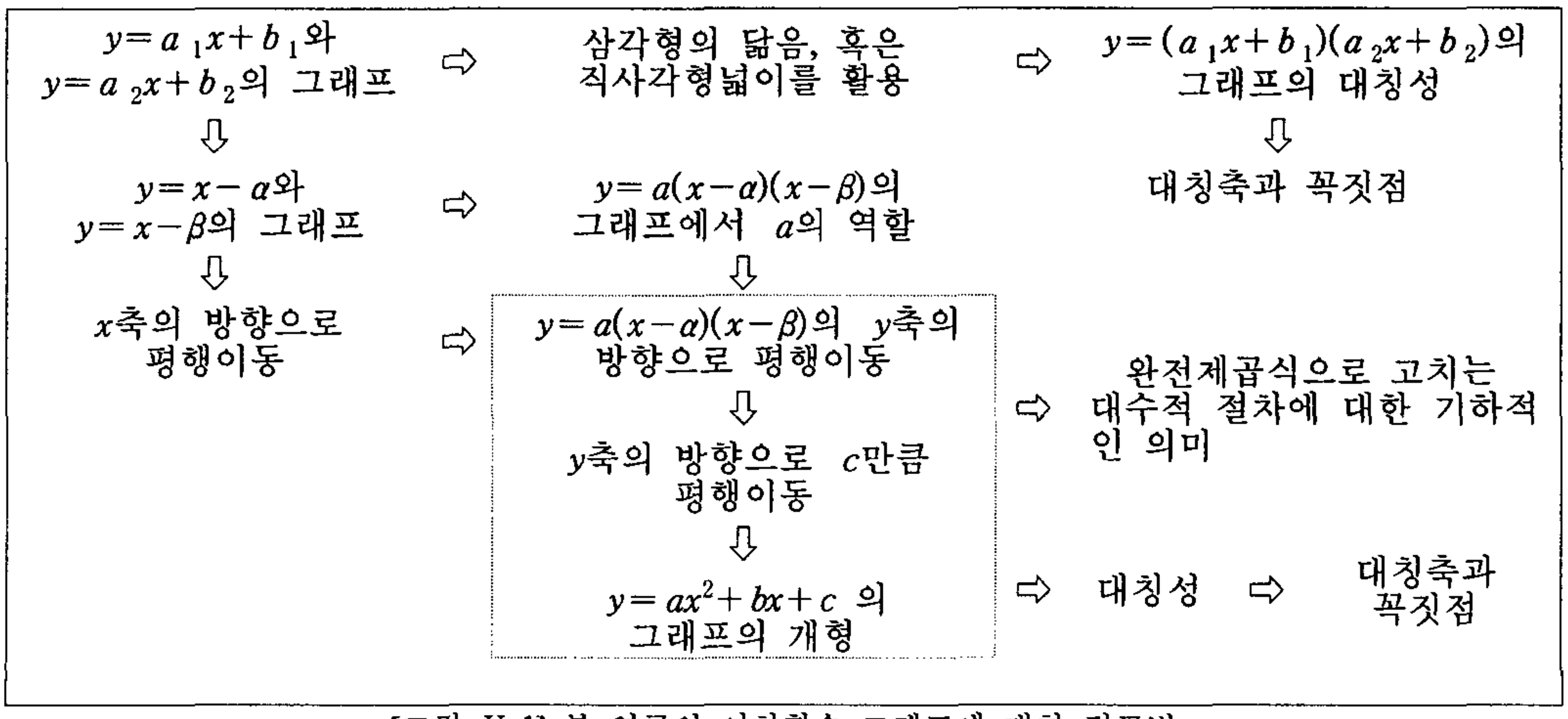
이러한 기하적인 과정은 이차함수를 인수분해 가능성과 완전제곱형식을 활용한 대수적 조작에 따라 인수를 찾아가는 대수적 과정과 연결된다.

## Ⅴ. 현행 교과서에 제시된 이차함수의 그래프에 대한 접근과의 비교

본 장에서는 제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998)에 따른 이차함수의 그래프가 도입과 관련되는 교과 지도 내용과 본 논문의 Ⅱ장부터 Ⅳ장까지 논의된 이차함수 그래프에 대한 교수 지도 계통과 비교하여 보도록 한다.

이차함수는 <9-가>단계에서 다루어지며 현행 교육과정에 따르면 $y=ax^2$의 그래프를 다루고 $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2$, $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 $y=ax^2$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $p$만큼, $y$축의 방향으로 $q$만큼 평행 이동하여 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 얻게 됨을 지도한다. 여기서 $y=ax^2$의 그래프를 모든 이차함수의 그래프의 기본으로 삼고 함수 변화표를 이용하여 이 그래프의 대칭성을 이해토록 권장하고 있다. 더 나아가 이차함수 $y=ax^2+bx+c$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐 이 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식, $x$절편과 $y$절편을 구할 수 있게 하고 이차함수의 그래프의 개형을 그리도록 하고 있다. 이것은 대수적 절차에 기초한 완전제곱 꼴로 변환하는 형식적인 과정으로 다룰 수 있도록 연습시키는 것이다. 현 교육과정에서 모든 교과서들의 지도계열은 획일적으로 이 방법을 따르고 있다(강옥기외, 2002; 이준열외 2002; 박두일외, 2002).

이에 비해 지금까지 Ⅱ장부터 Ⅳ장에서 논의된 이차함수의 그래프에 대한 접근법은 일차함수의 그래프에 기초하였다. 일차함수는 <8-가>단계에서 도입되어 일차함수의 그래프 그리기, 일차함수 그래프의 기울기, 절편, 평행 이동에



[그림 Ⅴ-1] 본 연구의 이차함수 그래프에 대한 접근법

대해 심도있게 다루고 있다. 위 II장부터 IV장에서의 논의는 다음과 같이 [그림 V-1]로 나타낼 수 있다.

본 연구의 이차함수의 그래프에 대한 접근법으로부터  얻을 수 있는 결과를 요약 하면 다음과 같다.

첫째, 두 일차함수의 그래프인 직선에 연계된 삼각형의 닮음을 활용하여 두 일차함수의 곱으로 주어지는 이차함수의 그래프의 대칭성과 대칭축 및 꼭짓점의 위치를 정할 수 있다.

둘째, 일차함수의 그래프의 평행이동에 따라 이들의 곱으로 주어진 이차함수도 평행이동 함을 알 수 있으며 이에 따라 이차함수의 그래프의 꼭짓점과 절편의 위치의 변화를 찾을 수 있다.

셋째, 일반형 이차함수에서 상수항을 제외한 이차함수의 인수에 의해 주어진 일차함수들의 평행이동으로부터 일반형 이차함수의 꼭짓점의 좌표 또는 $x$절편을 찾을 수 있다. 이러한 기하적인 관점은 완전제곱형식으로 변형하여 꼭짓점과 절편을 찾는 대수적 절차로 연결된다. 여기서 인수에 의한 일차함수 그래프의 두 절편의 중점을 지나는 일차함수와 대칭축을 상기시킨다면 대수적 절차에서 야기되는 오류의 해소에도 활용가능하리라 본다.

## VI. 결 론

현행 중등교육과정과 교과서는 일반적인 이차함수의 그래프에 대한 구조적 특성을 이차함수를 정의하는 이차식을 완전 제곱형식으로 변형하는 대수적인 절차에 순응하게 하고 이에 따라 평행이동의 개념을 도입하여 지도하고 있다. 이차함수의 그래프는 평면 도형으로 기하적인 대상이지만 형식적이고 절차적인 지식에 의해 주로 다루어진다고 볼 수 있다. 이차함수와 그 그래프를 학습함에 있어 이미 배우거나 경험한 지식인 일차함수와 그 그래프와의 개념적 연계성이 약한 편이다. 새로운 개념을 지도함에 있어 이미 알고 있거나 경험한 지식과의 개념적 상호연결은 학생들의 개념적 이해를 높이고 보다 선명한 개념이미지를 형성시키는 효과적인 교수-학습이 될 수 있다. 기하적인 표현은 기호나 언어적인 표현에 비해 개념의 정의나 성질을 쉽게 생각나게 해주는 장점을 지니고 있다(Freudenthal, 1978).

본 연구는 이러한 수학개념간의 연계와 연결성과 기하적인 표현이 수학적 이해를 넓힌다는 교수학적 관점에 근거하여, 이차함수의 그래프 구조적 특성이라 할 수 있는 대칭성, 꼭짓점, 절편, 합동의 근원을 일차함수 그래프(직선)에 기초하여 기하적인 측면에서 찾았고 이를 활용하여 구체적인 이차함수에 대해 일차함수의 그래프를 그려보고 이에 기초하여 꼭짓점의 좌표와 $x$절편을 찾는 데 적용하였다. 일차함수 그래프와 이차함수 그래프를 연결시키는 본 연구의 과정에서 대상물로서 함수의 구조적 특성과 과정으로 조작인 특성, 기하적인 시각과 대수적 측면들이 분리된 것이 아니라 치밀하게 연결되어 있음을 알 수 있었다. 또한 기하적인 과정을 대수적 절차로의 전환하고 대수적 절차에 숨겨진 기하적인 의미를 찾는 수학적 사고과정을 볼 수 있었다.

개념적 지식은 절차적 지식과 병행하여 발전되어지며, 개념적 지식은 관계성이 풍부한 지식으로 낱개의 수학적 지식이나 사실들 간의 관계성을 형성할 때 개념적 지식을 발달하게 된다(Hiebert & Lefevere, 1986)는 사실과 함수의 조작적이고 구조적 측면에서 파생된 형식적 절차 및 다양한 표상과 번역활동이 수학적 사고활동의 주요 과정(NCTM, 1989, 2000)이라는 사

실은 본연구의 의미를 뒷받침한다.

본 연구의 결과는 이차함수 그래프를 지도함에 있어 단순한 대수적 절차에 의한 완전제곱 형식을 강조하고 공식을 암기하도록 하는 경향인 현행교과의 조작적 측면의 취약점을 보완하고 구조적인 면에서 일차함수 그래프에 기초한 개념적 연계는 이차함수 그래프에 대한 이해를 넓혀주며 다양한 수학적 사고의 과정에서 도움이 되리라 기대된다. 더 나아가 이차함수 그래프에 대한 풍부한 교수학습방법을 보완하는 기회를 제공하게 될 것으로 사료 된다. 그러나 현장 수학교실에서 교수-학습시에 지도가능성과 교육과정으로 직접 언급할 수 있는 지, 내용 계열의 구성에 어떤 시사점을 주는지에 대해서 보다 심도있는 논의가 필요할 것으로 본다.

## 참고문헌


강옥기 · 정순영 · 이환철(2002). **중학교 수학 9-가.** 서울: (주)두산.

교육부(1998). **수학과 교육과정,** 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육부(2001). **고등학교 교육과정 해설,** 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정,** 서울: 대한 교과서 주식회사.

김연식 · 박교식(2002). 함수 개념 지도의 교수학적 접근. 우정호(편), **수학교육학의 지평,** 261-274. 서울:경문사.

김해성(2004). **이차함수 그래프 과제에서의 오류에 대한 교정방법과 그 효과 분석.** 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종(2002). **중학교 수학 9-가.** 서울: (주) 교학사.

성종기(2000). **이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구.** 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

우정호외 (2006). **교수학적 분석 연구의 방법론과 실제-수학교육학 연구방법론.** 서울: 경문사.

이경도(2003). **이차함수 성질에 관한 오류분석과 Excell을 사용한 교정에 관한 연구: 중학교 3학년을 대상으로.** 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

이은녕(2003). **그래핑 계산기의 활용이 이차함수 표상간의 이해에 미치는 효과.** 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2002). **중학교 수학 9-가.** 서울: (주)도서출판디딤돌.

이현화(2006). **이차함수의 성질에 관한 오류분석과 인지갈등 유발을 통한 오류교정에 관한 연구.** 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

조정수(2006). **다항식 관점에 의한 이차함수의 성질 탐구와 지도방안 탐색.** 한국학교수학회논문집, 9(2), 121-139.

지윤정(2004). **개념적 지식의 학습과 수학에 대한 흥미와의 관계 연구: 이차함수와 그 그래프의 평행이동을 모델로.** 서울대학교 대학원 석사학위논문

최종철(200). **그래픽 계산기를 활용한 수업이 문제해결력에 미치는 효과:고등학교 이차함수 단원을 중심으로.** 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

하양희(2003). **그래픽 계산기를 활용한 수업이 중학생들의 이차함수 학습에 미치는 효과.** 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Cha, I. (1999). *Prospective secondary mathematics teachers' conceptions of function: Mathematical and pedagogical* *understandings*, Unpublished doctoral dissertation, The University of Michigan.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 521-544.

Freudenthal, H. (1983). *Weeding and sowing: Prefer to a science of mathematics education.* Dordrecht, D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, D. Reidel Publishing Company.

Kelly, B. (1996). Investigating advanced algebra with the TI-92. Ontario: Brendan Kelly Publishing Inc.

Hiebert, J. & Lefevere, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1-27). Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mayes(1995). The application of a computer algebra system as a tool in college algebra. *School Science and Mathematics, 95*(2), 61-68.

National Council of Teachers of Mathematics (1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향**. (구광조 · 오병승 · 류희찬 역). 서울: 경문사. (영어원작은 1989년 출판).

National Council of Teachers of Mathematics (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. (류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙, 역). 서울: 경문사. (영어원작은 2000년 출판).

O'Neill, B. (1997). *Elementary differential geometry(2nd Ed).* San Diego: Academic Press.

Santos, F. F. (2003). *Examining the effects of a writing to learn mathematics approach on students' understanding of the function concept.* Unpublished Doctoral Dissertation, Columbia University.

Schwarz, J. & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. In E. Dubinsky and G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Washington, DC: MAA.

Sfard(1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural, *Proceedings of the 11th internal conference for the psychology of mathematics education, Montreal*, Canada, 3, 162-169.

Sfard(1991). On the dual nature of mathematical conceptions:
Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sfard(1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In E. Dubinsky and G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Washington, DC: MAA.

Sierpinska, A. (1992). On understanding of the notion of function, in E. Dubinsky and G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA.

# An Analysis on the Pedagogical Aspect of Quadratic Function Graphs Based on Linear Function Graphs

Kim, Jin Hwan (Yeungnam University)

This study is based on the pedagogical aspect that both connections of mathematical concepts and a geometric approach enhance the understanding of structures in school mathematics. This study is to investigate the graphical properties of quadratic functions such as symmetry, coordinates of vertex, intercepts and congruency through the geometric properties of graphs of linear functions. From this investigation this study would give suggestions on a new pedagogical perspective about current teaching and learning methods of quadratic function graphs which is focused on routine algebraic transformation of the completing squares. In addition, this study would provide the topic of quadratic function graphs with the understanding of geometric perspective.

* key words : linear function(일차함수), quadratic function(이차함수), graph(그래프), mathematical connection(수학적 연결성), pedagogical analysis(교수학적 분석).

논문접수 : 2008. 2. 15
심사완료 : 2008. 3. 12