대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.1, 23-42. Mar. 2008

초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석[1)]

김 민 정* · 이 경 화** · 송 상 헌***

본 연구는 4명의 초등학교 5학년 수학영재들이 주어진 대수 과제를 해결하는 과정에서 나타나는 일반화 전략과 그에 대한 정당화의 특성을 살펴보고, 그러한 과정에서 나타난 메타인지적 사고 특성을 분석한 연구이다. 문헌 검토를 통해 일반화 전략 · 정당화의 유형과 메타인지적 사고를 위한 분석틀을 마련하고 학생들의 다양한 반응들을 분석하였다. 일반화 과정에서 학생들은 과제가 내포한 복합적인 관계나 순환적인 관계를 다양한 경로로 파악했고, 이 관계를 토대로 일반식을 이끌어냈다. 이러한 일반화에 대한 정당화 유형은 대부분 경험적 정당화와 형식적 정당화의 수준을 보여주었다. 메타인지적 사고의 특성에서 학생들은 자신이 보유한 지식을 복합적으로 동원하였고, 이러한 지식을 과제와 연결시키기 위하여 메타인지적 기능 영역인 '감시', '평가', '제어'와 같은 행동들을 수시로 발현시켰다. 감시, 평가, 제어의 사고 과정은 학생들이 과제의 새로운 조건을 파악하게 하는 원동력이 되었고, 자신의 사고과정을 점검함으로써 특정한 사례들에 대한 값을 정당화하게 하며, 전략을 수정 · 변경하면서 해결과정을 지속적으로 이끌어나가게 했다.

Ⅰ. 서 론

수학교육의 목표는 수학적 힘의 신장이라고 할 수 있으며 이는 수학적 사고력과 문제해결력, 수학적 태도를 개발하는 것이다. 수학 영재 교육 분야에서도 수학적 사고력을 키우고 수학적 문제 해결 능력을 보다 발전시킬 수 있는 방법을 찾기 위한 다양한 노력이 이루어지고 있다. 학습자의 능력과 소질에 적합한 교육을 실시하기 위해서는 먼저 영재 학생의 능력과 소질을 파악하는 것이 중요하다는 배경 하에서 영재의 지적 · 정의적 특성을 알아내기 위한 연구와 더불어, 최근에는 수학의 내용을 기반으로 한 수학 영재들의 수학적 사고 특성을 구체적으로 파악하기 위한 연구도 상당수 이루어지고 있다.

이들 연구를 종합하면, 수학영재가 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 수학적 사고력은 각각의 과제나 문제에 따라 다양하며 그 특성과 능력이 구분된다. 그리고 연구된 수학적 사고는 주로 수학적 창의성, 추론수준, 증명수준, 일반화과정 등에 집중되어 있으며 어떤 특정한 과제를 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 사고의 수준과 과정에 대해 밝히고 있다.

한편 각 내용 영역과 관련된 사고 중에서 대수적 사고에 대해 수학교육계에서는 꾸준한 관심을 보이고 있다. 이에 대수적 사고에 대한 연구(김남희, 1994; 김성준, 2004)가 최근 활발하게

* 한국교원대학교 대학원(minjung5390@hanmail.net)
** 한국교원대학교(khmath@knue.ac.kr)
*** 경인교육대학교(shsong@ginue.ac.kr)
1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

이루어졌고, 특히 초등 수준에서도 산술적 사고와 함께 대수적 사고가 길러질 수 있다는 연구(강미애, 2000; 조용남, 2007)가 이루어졌다. 이들 연구의 결과를 종합하면 대수적 사고는 다양한 측면으로 구성되어 있고, 형식적인 기호의 조작 보다는 일련의 사고과정 즉, 대수적 추론이 강조되어야 한다는 것이다. 또한 대수적 사고의 핵심이라 할 수 있는 일반화가 강조되고 있다. 일반화는 수학의 여러 영역에서 가장 중요한 활동으로 다루어지며 특히 대수는 일반화를 통해 표현되고 조작되는 언어 체계를 그 특징으로 한다. 수학 영재교육은 초등 수학영재에게 대수적 사고를 발현시키는 기회를 주어야 하며, 특히 일반화 능력을 발전시킬 수 있도록 이루어져야 한다. 앞서 이루어진 수학영재의 일반화 사고과정에 대한 연구(송상헌 외 3인, 2004; 박은정, 2006; 송상헌 외 3인, 2006; 이향훈, 2007)들은 각 과제에서 보이는 일반화의 수준, 한 과제를 통한 일반화의 과정, 패턴에서의 일반화 과정을 분석하고 능력별 일반화 전략의 차이를 밝히는 것에 초점을 두고 있으며 어떤 특정한 과제를 해결할 때 나타나는 일반화의 과정을 살펴보았다. 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 일반화를 하기 위해서는 먼저 주어진 다양한 패턴 상황에서 나타나는 관계를 파악해야 하는데, 주어진 패턴에서 관계가 쉽게 발견되지 않을 경우에 학생들은 다양한 전략을 사용해서 일반화를 시도한다. 문제를 해결하는 경우에는 일련의 과정을 거쳐 일반화에 성공하는 반면, 몇 번의 시도에도 불구하고 좀처럼 일반화를 하지 못하는 경우도 있다.

선행연구의 결과에 의하면, 수학적 능력이 뛰어난 초등 수학영재라 하더라도 도전적인 문제를 해결하는 과정에서 일반화를 성공적으로 하지 못한 경우도 있으며 각 학생마다 일반화의 수준이 다르다. 이때 문제 해결 과정에서 시도된 일반화의 전략을 구체적으로 살펴본다면 일반화가 가능한 경우는 왜 그러했는지, 일반화가 어려웠던 경우의 원인은 무엇인지 밝힐 수 있을 것이다. 또한 일반화에 성공했다 하더라도 이 일반화에 대한 정당화의 유형을 서로 다르게 나타난다. 그러므로 일반화를 이끌어내도록 구성된 대수문제를 해결하는 과정에서 보이는 일반화 전략과 일반화에 대한 정당화 유형을 세밀하게 분석해보는 것은 수학 영재교육에 도움을 줄 수 있을 것이다.

또한 초등 수학영재들이 주어진 일반화 문제를 해결하는 과정에서 드러나는 메타인지적 사고를 자세히 살펴본다면 학생들이 어떻게 자신의 사고를 조절하고 반성하는지 파악할 수 있을 것이다. 이와 관련하여 신은주, 신선화, 송상헌(2007)은 초등학교 5-6학년 7명의 수학영재들이 페그퍼즐(송상헌 외 3인, 2007)과 축구공의 비밀(이경화, 2003)이라는 두 과제를 해결하는 과정에서 활성화되는 메타인지적 사고의 과정을 분석하여 메타인지적 기능이 문제해결 과정의 성패에 미치는 영향을 조사한 바 있다. 이 논문은 Wilson & Clarke(신은주, 신선화, 송상헌, 2007에서 재인용)의 메타인지 모델을 기반으로 얻은 14가지의 사례를 분석한 것으로 초등수학영재들이 주로 사용한 메타인지의 경로에는 ARE, RE, AERE가 나타났다는 것과 특히 집단의 수준이 높을수록 ARE 경로를 선호하되 이 경로는 문제해결에 성공한 학생들이 보여주는 주된 경로임도 확인하였다고 밝히고 있다. 그리고 과제의 수준에 따라 메타인지 사고 과정이 다르다는 점, 같은 경로로 문제를 해결한 학생들이 동일한 메타인지적 사고를 하여도 메타인지적 사고의 능력에 따라 문제해결의 성패가 달라진다는 점, 메타인지적 지식에 대해 잘 의식하는 학생은 문제해결에 대한 조절과 제어 능력이 높은 면을 보인다는 점 등도 사례를 통해 확인하였다고 한다.

그러나 이 논문은 과제의 수학적 내용에 대한 반응보다는 학생 스스로 자신의 사고에서 개인적으로 가지는 의식(Awareness), 사고에 대한 평가(Evaluation), 사고에 대한 조절(Regulation)이라는 일반적인 메타인지의 반응을 분석한 것이다. 따라서 메타인지적 사고가 보다 수학적 내용(대수 과제)이나 수학적 사고(일반화)와 관련하여 어떠한 작용을 하는지를 좀 더 면밀히 분석해 볼 필요가 있을 것이다.

이를 위해 본 연구는 다음의 두 가지에 초점을 맞춘다. 첫째, 초등 수학영재가 주어진 대수 문제를 해결하는 과정에서 일반화는 어떻게 나타나는가? 둘째, 초등 수학영재가 주어진 대수 문제를 해결하는 과정에서 보이는 메타인지적 사고는 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 일반화

김남희(1997)는 수학적 사고의 여러 가지 측면 중 일반화는 다른 어떤 것보다도 중요하게 다루어져야 할 수학적 사고라고 하면서 그 이유로 수학은 인간 사고를 일반화한 것으로서 일반화의 사고는 모든 수학적 개념, 대상, 명제, 증명 등에 수반되고 있기 때문이라고 하였다. 대수적 문제를 해결하는 과정에서 일반화는 가장 중요한 활동이며 일반화를 위해 필요한 것이 일반화 전략이다. 일반화 전략의 유형에 관련된 문헌들(Mason, 1996; English & Warren, 1998; Lannin, 2003; Steelee & Johanning, 2004; 송상헌, 허지연, 임재훈, 2006; 송상헌 외 4인, 2007; 이향훈, 2007)을 검토하여 일반화 전략의 유형들을 알아보았다. 이들 연구의 결과를 비교하여 정리하면 [그림 Ⅱ-1]과 같다.

	Mason	English & Warren	Lannin	Steelee& Johanning
일반화 전략 유형			그리기 세기(counting)	
	시각화 (visualization)	순환적인 규칙 (recursive)	순환적인 규칙 (recursive)	
	도형의 조작		전체- 부분	표, 그림
	순환적인 규칙 (recursive)	비(ratio) 이용	비율조정하기	덜어내기, 더해가기
	직접적인 공식 도출	함수 관계 파악	문제의 상황적 구조 이해 (contextual)	
			추측-검증 (guess & check)	

참고: 각 유형이 제시된 순서는 원문의 순서를 따름

[그림 Ⅱ-1] 일반화 전략의 유형

2. 정당화의 유형

학생들이 어떤 명제가 참이라는 것을 확신하는 방법은 다양하게 나타난다. 이를 밝힌 증명과 정당화 유형에 관한 연구(Tall, 1995; Balacheff, 1987; Sowder & Harel, 1998; Simon & Blume, 1996; 송상헌, 허지연, 임재훈, 2006, 이경화, 최남광, 송상헌, 2007)를 살펴보고 정당화 유형을 파악했다.

외부적 정당화는 문제 해결과정에서 얻은 일반화에 대해, 전에 본 적이 있거나, 들은 적이 있어서, 혹은 선생님께 배워서라는 이유로 항상 성립함을 보이는 정당화이다. Sowder & Harel의 '외부적으로 기반을 둔 증명 스키마'와 Simon & Blume의 수준 1이 여기에 해당한다. 경험적 정당화는 일반화 과정에서 점검한 사례들을 이유로 들어서, 지금까지 성립했기 때문에 앞으로 다른 경우도 모두 성립할 것이라고 설명하는 정당화이다. Balacheff의 '소박한 경험주의', Sowder & Harel의 '경험적 증명 스키마',

Simon & Blume의 수준 2가 여기에 해당한다. 포괄적 정당화는 각 사례들의 점검을 통해 일반화를 끌어내지만, 그 일반화의 구조적인 특성, 즉 관계성을 보여주는 포괄적인 사례를 들어 정당화하는 경우이다. 이 포괄적인 사례는 특정한 개별 사례가 아니라 그 과제의 관계, 구조를 표현하는 예로서 작용한다. 학생은 자신이 이끌어낸 일반화를 포괄적인 사례에 다시 적용해봄으로써 확인하는 과정을 거치기도 한다. Balacheff의 '포괄적인 예', Simon & Blume의 수준 3이 여기에 해당한다. 형식적 정당화는 문제 해결과정에서 이끌어낸 일반화를 기호나 문자를 사용하여 다시 또 하나의 대상으로 간주하고 연역적인 논증을 통해 항상 성립함을 보이는 정당화이다. Balacheff의 '사고실험'과 Simon & Blume의 수준 4가 여기에 해당한다.[2)]

3. 메타인지적 사고

지금까지의 연구를 통해서 메타인지는 '인지적 대상에 대한 지식과 인식', '인지에 대한 반성', 혹은 '자신의 사고에 대한 사고' 등으로 불리어진다(김수미, 1992). 그러나 이러한 추상적이고 포괄적인 정의만으로는 메타인지가 무엇인지를 정확하게 이해하는데 도움이 되지 않는다. 따라서 메타인지의 의미를 학자에 따라 정리해보고, 메타인지를 메타인지적 지식과 메타인지적 기능으로 구분해 볼 수 있다.

첫째, 메타인지적 지식은 인지 작용의 상태를 판단하기 위해 개인이 소유하고 있는 인간, 과제, 전략에 관한 지식이다. 인간에 관한 지식은 인지활동의 주체자로서 인간이 소유하고 있는 기능이나 능력이 자신의 인지 작용에 어떻게 영향을 미치는가에 관한 지식이다. 과제에 관한 지식은 과제의 본성이 인지작용에 어떻게 영향을 주는가에 대한 지식으로 과제의 조건, 과제의 성질 등을 포함한다. 전략에 대한 지식은 주어진 과제의 수행이나 인지적 목적을 이루기 위하여 필요한 전략적인 지식이다.

둘째, 메타인지적 기능은 어떠한 이해활동의 감시나 과제 수행 활동의 평가, 전략 사용의 제어나 조정에 관한 활동 등으로 나눌 수 있다. 감시는 인지활동을 진행하면서 인지작용의 상태를 직접적으로 감독하는 기능이다. 평가는 자기의 인지활동의 성과를 메타인지적 지식과 서로 맞추어서 직접적으로 판단하는 기능이며, 제어는 자기 평가의 결과를 메타인지적 지식에 맞추어서 자기의 인지 활동을 지시하고 그 후의 활동을 진행, 수정케 하는 등 인지 작용을 직접적으로 통제하는 기능이다.

III. 연구의 방법

1. 연구의 과제

일반화라는 대수적 사고 관찰을 위해 본 연구의 과제로 적합한 조건은 첫째, 상황이 비록 구조적으로는 간단하지 않지만 학생들이 충분히 접근할 수 있는 것이어야만 했다. 둘째, 도입 부분이 맥락적으로 구성되어 그 맥락에 따라 사고의 유형이 다양하게 나타날 수 있어야 했다. 셋째, 단순한 패턴이라기보다는 여러 관계를 따져보아야 하는 도전적인 상황이면서 문제마다 특정한 상황 속에서 일반화를 요하는 맥락을 포함하고 있어야만 했다. 넷째, 하위의 문제해결 상황에서는 일반화, 정당화의 사고와 관련하여 관찰할 수 있어야만 했다. 그리고 마

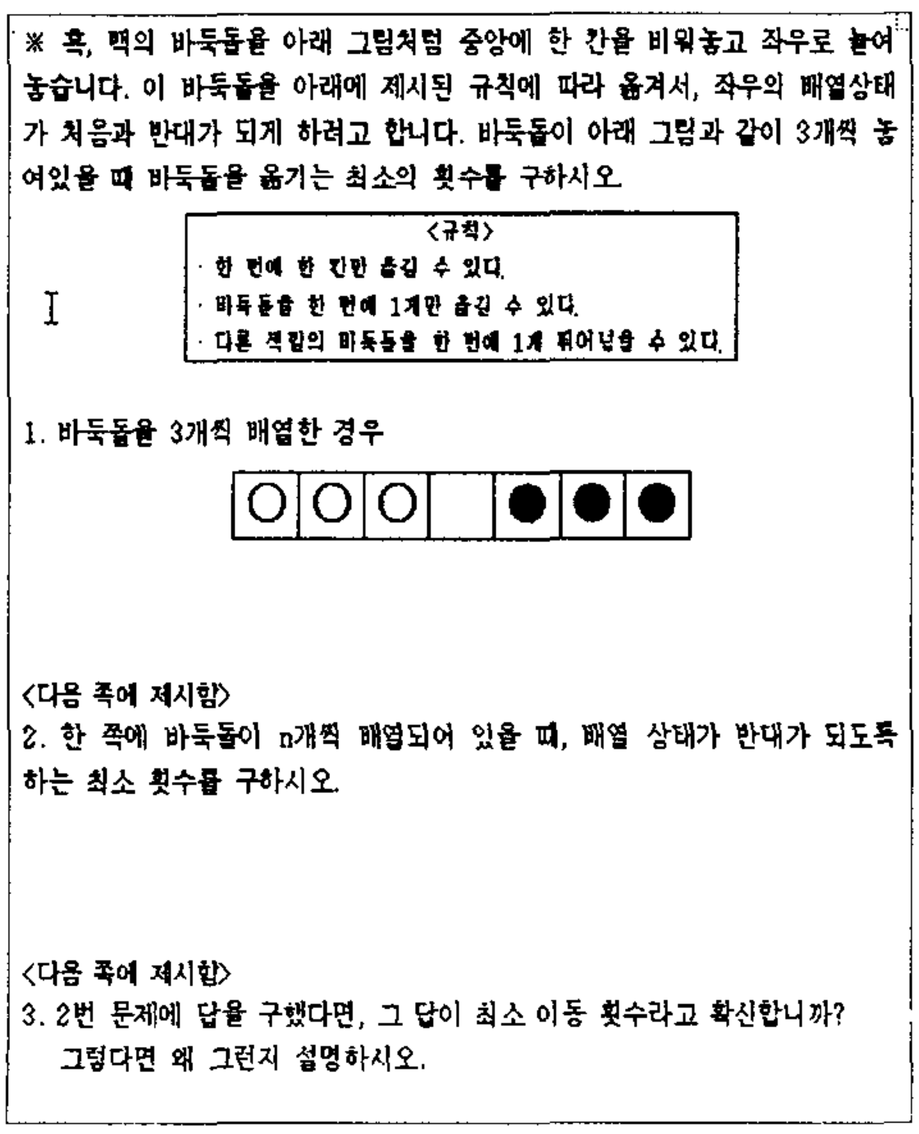
2) 수준 0은 정당화 없음; 수준 1은 외부의 권위에 호소; 수준 2는 경험적 증거; 수준 3은 포괄적 예; 수준 4는 연역적 정당화임.

지막으로, 일반화를 시도한 후에는 그 일반화에 대한 정당화가 필요했다. 기존의 연구로부터 이러한 조건을 만족하도록 선정한 과제는 아래의 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 본 연구에서 사용한 과제

문항	과 제	출 처
1	바둑돌 옮기기	송상헌 외 4인(2006)의 연구
2	Big Loser	Marks(1999)의 연구

그러나 이 연구에서는 위의 두 과제 해결과정을 자세하게 분석하여 특성을 도출하였으나, 「Big Loser」의 경우보다 「바둑돌 옮기기」 과제의 해결 과정에서 다양한 특성과 사고 과정의 세부 특징이 보다 잘 드러나서 이에 초점을 두어 특성을 서술하였다. 학생들에게 제시한 「바둑돌 옮기기」 과제의 내용은 [그림 Ⅲ-1]와 같다. 학생들이 과제를 해결하는 중간에 1시간마다 휴식시간을 10분 정도 주었고, 필요한 경우엔 추가로 자유 시간을 허용하였다. 단, 학생간에 과제에 대한 토의는 허용하지 않았다.


※ 흑, 백의 바둑돌을 아래 그림처럼 중앙에 한 칸을 비워놓고 좌우로 늘어놓습니다. 이 바둑돌을 아래에 제시된 규칙에 따라 옮겨서, 좌우의 배열상태가 처음과 반대가 되게 하려고 합니다. 바둑돌이 아래 그림과 같이 3개씩 놓여있을 때 바둑돌을 옮기는 최소의 횟수를 구하시오.

<규칙>
· 한 번에 한 칸만 옮길 수 있다.
· 바둑돌을 한 번에 1개만 옮길 수 있다.
· 다른 색깔의 바둑돌을 한 번에 1개 뛰어넘을 수 있다.

1. 바둑돌을 3개씩 배열한 경우

○○○ ●●●

<다음 쪽에 제시함>
2. 한 쪽에 바둑돌이 n개씩 배열되어 있을 때, 배열 상태가 반대가 되도록 하는 최소 횟수를 구하시오.

<다음 쪽에 제시함>
3. 2번 문제에 답을 구했다면, 그 답이 최소 이동 횟수라고 확신합니까? 그렇다면 왜 그런지 설명하시오.

[그림 Ⅲ-1] 「바둑돌 옮기기」 과제

2. 연구의 대상

본 연구의 대상자는 우리나라의 영재교육진흥법에 따라 과학재단의 지원을 받는 대학부설 과학영재교육원에서 운영하는 초등수학 기초반에 소속된 5학년 4명이다. 이들은 그들이 소속한 과학영재교육원에서의 탐구활동, 수행능력, 관찰평가 결과를 바탕으로 그들의 지도교사에 의해 추천된 학생들이다.

두 번째 연구문제는 메타인지적 사고의 발현을 포착하여 그 사고의 특성을 분석하는 것인데, 이 메타인지적 사고라는 것은 문제 해결과정에서 즉각적이고 복잡한 양상으로 발현되기 때문에 포착을 위한 자료를 수집하기 위한 세밀한 노력이 필요했기에, 연구진은 평소 자신의 생각을 글이나 말로 잘 표현하는 학생들을 선정해 달라고 지도교사에게 부탁했다. 이러한 선정 과정에서 본 실험에서 사용되는 문제들을 사전에 경험해 본 사람은 제외했으며, 연구 대상자로 연구에 참여하는 것에 대해 과학영재교육원장의 허가와 참여하는 학부모 및 학생의 사전 동의를 받았다.

3. 실험 실시 및 자료 수집

예비 실험을 통해 수정·보완된 최종문항을 이용하여 연구 대상자로 선정된 5학년 초등수학영재 4명에게 2007년 5월과 7월에 실시하였다. 본 연구의 자료 수집은 일부 연구자의 참여 관찰을 통해 이루어졌고, 그 방법으로 수업 관찰 및 학생 면담의 과정에서 활동지 문서와 오디오 및 비디오 자료와 같은 기록물 수집 방법을 사용했다. 여기에는 학생 1인당 1명씩의 관찰자를 배정하여 밀착 관찰이 이루어졌다.

4. 자료의 처리 및 분석

자료 수집의 과정에서 얻은 다양하고 방대한 자료를 분석하는 것은 정성적 사례연구의 중요한 과정인데, 이는 수집된 자료의 분류, 조직화, 범주화, 종합의 단계를 거친다. 본 연구에 있어 자료의 분석은 크게 두 단계로 이루어졌다.

먼저, 각 관찰자가 개별적으로 연구 대상자의 활동지, 전사내용, 면담자료, 기록일지 등의 자료를 전체적으로 자세하게 살피고 읽어서 사고에 대한 특성과 해당하는 범주를 결정하고 나름대로 해석을 내리는 1차적인 분석이며, 이는 주로 실험이 이루어진 그 다음 주중에 이루어졌다.

그리고 2차 분석은 모든 실험이 종료된 이후에 연구자와 관찰자들이 함께 참여하여 모든 피험자들의 분석 결과를 분류, 조직화, 범주화하였다. 이 과정에서 분석된 결과에 대한 의견이 서로 다를 경우, 원 자료를 다시 면밀하게 검토하여 의견이 일치될 까지 협의했다. 그리고 필요한 경우 전문가의 조언을 구했다. 이러한 분석 결과는 종합화하여 결과를 이끌어 내는 데 사용하였다. 자료의 분석을 위하여 문헌 검토를 토대로 한 분석틀을 이용하였다. 앞에서 살펴본 선행 연구의 결과 확인된 일반화의 전략을 비슷한 역할을 하는 유형별로 묶고 본 연구 과제의 특성에 맞게 보충·수정하여 본 연구 문제를 위한 분석틀로 설정하였다.

앞에서 언급된 전략 중 그림, 표, 다이어그램, 세기, 도형의 조작은 주로 주어진 패턴을 구현하는 과정에서 사용되는 기본적인 전략이다. 또한 특수한 예를 점검하는 전략도 패턴의 관계를 파악하기 위한 기본적인 전략이라고 할 수 있다. 따라서 패턴의 관계를 파악하는 데 있어 결정적이라 할 수 있는 전략들을 중심으로 <표 Ⅲ-2>와 같이 분석틀을 구성했다.

<표 Ⅲ-2> 일반화 전략 유형의 분석틀

<table>
<tr><th colspan="4">일반화 전략</th><th>설명</th></tr>
<tr><td rowspan="5">관계를 파악하기 위한 전략</td><td colspan="3">문제 상황의 구조 인식</td><td>문제 상황 속에서 주어진 여러 가지 조건을 조직하여 전체적인 구조를 인식하고, 패턴을 발견하는 것</td></tr>
<tr><td rowspan="4">수치적 관계 주목</td><td rowspan="3">함수적 관계 인식</td><td>복합 관계 인식</td><td>종속변인 변화량과 독립변인 사이에서 나타나는 관계를 인식하는 것</td></tr>
<tr><td>단일 관계 인식</td><td>종속변인의 변화량을 중심으로 관계를 인식하는 것</td></tr>
<tr><td>추측에 의한 관계 인식</td><td>정당화 과정 없이 추측만으로 독립변인과 종속변인 사이의 관계를 인식하는 것</td></tr>
<tr><td colspan="2">순환적 관계 인식</td><td>종속변인 사이의 관계에서 전항과 후항 사이의 합, 차, 곱 등의 관계를 인식하고, 이를 통해 다음 항의 값을 구함</td></tr>
</table>

정당화의 유형의 분석틀은 대수 문제에 관한 연구에 쓰인 Simon & Blume(1996)의 정당화의 수준을 기본으로 하고, 다른 유형들의 특성을 추가하는 형태로 하여 분석틀을 설정하였고, 이 분석틀의 각각의 기준에 대해 본 연구의 상황과 관련된 예시는 <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 Ⅲ-3> 정당화 유형의 분석틀

정당화 유형	설 명
외부적 정당화	책, 권위자, 다른 사람의 의견에 의존한 정당화
경험적 정당화	실제적인 활동, 측정, 실험을 통하여 확인된 특정한 예들을 통한 정당화
포괄적 정당화	특정 사례에서 연역적인 정당화가 표현됨
형식적 정당화	특정 사례들에서 벗어난 연역적인 논증을 통한 정당화

앞에서 살펴본 바와 같이 메타인지는 대체적으로 알기(knowing)라고 할 수 있는 지식 영역의 인간, 과제, 전략의 요소와 행하기(doing)라고 할 수 있는 기능 영역의 감시, 자기평가, 제어의 요소 등으로 분류할 수 있다(조재영, 1996). 이를 토대로 메타인지적 사고의 분석틀을 <표 Ⅲ-4>와 같이 설정하였다.

Ⅳ. 연구의 결과

1. 일반화 과정에서 나타난 사고 특성

4명의 5학년 초등수학영재들이 주어진 문제에서 일반화하기 위하여 사용한 전략의 특성과 학생이 도출한 일반화에 대한 정당화 유형을 알아볼 수 있었다. 학생들에게 제시한 과제들은 초등학교 5학년 학생에게는 영재라 할지라도 도전적인 과제였으며, 학생들은 일반화를 이끌어내기 위하여 상당한 시간 동안 과제에 몰두하였고 그 결과 일반화에 상당부분 일반화에 도달하였으나, 그렇지 못한 경우도 있었다. 본 연구의 초점은 일반화에 도달하기 위해 학생들이 사용하는 전략에 반영된 사고의 특성을 알아보기 위함이었고, 쉽게 일반화를 이끌어 낼 수 있는 과제보다는 도전적인 과제를 제시하는 것이 필수적이었다. 학생들이 일반화에 도달한 경우 정당화 과정을 경험할 수 있었으나 일반화에 도달하지 못한 경우에는 정당화 과정을 경험할 수 없었다.

<표 Ⅲ-4> 메타인지적 사고의 분석틀

구 분	의 미	예
메타 인지적 지식	• 인지적 사실들과 관련하여 습득한 일상적 지식 • 자신의 인지 작용의 상태를 판단하기 위해 저장된 지식	• 인간, 과제, 전략에 관한지식
인 간	• 인지적 주체자인 인간에 대하여 사람들이 획득하게 되는 모든 종류의 지식과 신념체계(동기, 불안, 인내) • 인지적 활동의 수행자로서 자신과 다른 사람에 대해서 믿고 있는 것 • 인간 내, 인간 간 인지적 차이에 대한 지식	• "영어보다 수학을 잘한다." • "식만 알면 계산에는 자신 있다."
과 제	• 인지적 과제의 수행 과정에 직면하거나 다루는 정보에 대한 성질, 과제가 갖고 있는 성질과 관련된 것 • 과제 수행에 영향을 주는 과제 특징(내용, 상황, 구조, 문장구조, 과정)의 개인적 의식	• "복잡하고 친숙하지 않은 문제는 어렵다." • "전에 해 본 문제는 쉽다."
전 략	• 인지적 행위에 관한 정보를 제공하거나 또는 그 행위의 진전에 관한 정보를 제공하는 것 • 이해, 조직, 계획실행, 검사, 평가 하는 데 도움을 주는 의식	• "자세하게 다시 읽어 보자." • "알고 있는 것을 표로 쓰면 더 알기 쉽다."
메타 인지적 기능	• 메타인지적 지식에 비추어 인지작용을 직접적으로 조정하기	• 감시, 평가, 제어에 관한 기능
감 시	• 인지작용의 진행 상태를 직접적으로 체크하는 기능 • 메타인지적 지식에 비추어 자기의 인지활동의 진행을 감시하는 기능	• "전에 해본 문제인가?" • "지금까지 계산을 틀리지 않았는가?"
평 가	• 인지작용의 결과를 메타인지적 지식과 조합해 직접적으로 평가하는 기능 • 자신의 인지활동 성과를 평가하는 기능	• "재미있다." • "이 답은 문제의 뜻에 맞는 것 같다."
제 어	• 평가에 기초하여 인지 작용을 직접적으로 제어하는 기능 • 자기의 인지활동에 지시를 하고 그 후의 활동을 속행, 수정하는 기능	• "해본 대로 해라." • "답을 확인해 보자."

가. 관계를 파악하기 위해 사용되는 전략의 특성

4명의 학생들이 이 과제를 해결하기 위한 일반화 과정과 관계를 파악하기 위해 사용한 전략을 정리하면 <표 Ⅳ-1>와 같다.

첫째, 4명의 학생이 모두 복합 관계 인식의 전략을 사용했으나 그 과정에서는 차이가 있었다. 학생이 나름대로 바둑돌의 최소 이동 횟수에 대한 핵심적인 방법을 터득한 경우에는 각 경우에 해당하는 최소 이동 횟수를 구하는 시행착오를 줄일 수 있었고, 이 과정에서 '3-8-15-24-35…'의 수열을 얻었다. 학생들은 이 수열 안에서의 양의 변화에 주목하기 보다는 이 값들과 '바둑돌의 개수'라는 또 다른 양을 대상으로 하여 두 양 사이의 관계에 초점을 두었다. 복합 관계를 인식하여 일반식을 이끌어 낸 이후에도 그 식이 어떻게 형성되는지를 살펴보기 위하여 노력한 경우 바둑돌의 이동 경로를 세분화하여 문제의 핵심적인 구조를 파악하게 되었고, 이를 통해 일반화를 형식화하는 수준까지 도달하였다.

둘째, 학생이 파악한 복합 관계가 일반화의 표현에 그대로 반영된다. E1 학생은 '3-8-15-24-35…'의 수열에서 각 수들은 모두 완전제곱

<표 Ⅳ-1> 「바둑돌 옮기기」 과제 해결과정에서 학생들의 전략 분석

학생	일반화 과정	전략의 사용
E1	시행착오를 겪어서 최소 횟수를 구함 → 최소 이동 횟수를 위한 자신만의 방법 터득 → 3-8-15-24-… 수열을 얻음 → '완전제곱수보다 1 작은 수'라는 공통점 발견(수 감각) → '바둑돌의 개수'와의 관계를 파악 → **일반화 도달 : (n+1)2 - 1**	**복합 관계 인식**
E2	시행착오를 통해 최소 횟수를 구함 → 3-10-17- … → 다음 횟수로 24회를 예측(7씩 증가) → 조작활동을 통해 새로운 방법을 터득 → 3-8-15-24- … → (바둑돌의 개수) × (바둑돌 개수 + 2) 관계를 파악 → **일반화 도달 : n(n+2) = n2+2n**	**단일 관계 인식** ↓ **복합 관계 인식**
E3	시행착오를 통해 최소 횟수를 구함 → 최소 이동 횟수를 위한 핵심 조건을 파악 → 3-8-15-24-… 수열을 얻음 → (바둑돌의 개수) × (바둑돌 개수 + 2) 관계를 파악 → **일반화 도달 : n×(n+2)**	**복합 관계 인식**
E4	시행착오를 통해 최소 횟수를 구함 → '2×2×2×2 -1 = 15' 라는 식을 추측함 → 직접 조작해보고는 식이 맞지 않음을 판단 → 자신만의 방법을 적용하여 3-8-15-24-35… 수열 얻음 → (바둑돌의 개수) × (바둑돌 개수 + 2) 관계를 파악 → **일반화 도달 : n×(n+2)** → 바둑돌이 움직인 경로를 탐색 → (1+2+… +n) +n +(1+2+… +n)의 식을 이끌어냄 → **일반화 설명 : {(n+1)×n} + n = n×(n+2)**	**추측에 의한 관계 인식** ↓ **복합 관계 인식** ↓ **문제 상황의 구조 인식**

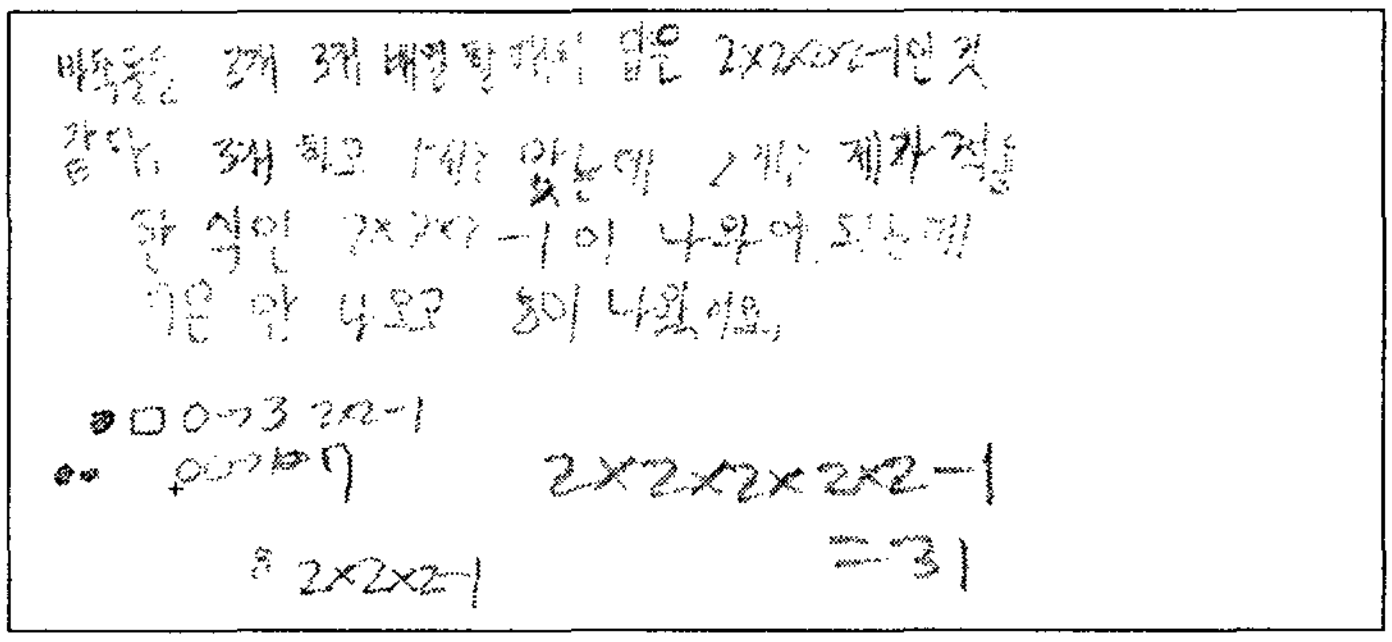
수 보다 1씩 작은 수라는 점에 주목하였고, 이를 바둑돌의 개수와 관련지어서 (n+1)2 - 1 이라는 일반식을 이끌어냈다. E2, E3, E4 학생은 '3-8-15-24-35…'의 수열에서 각 값들은 (바둑돌의 개수) × (바둑돌 개수 + 2) 라는 관계를 파악하였고, 이는 통해 n×(n+2) 와 같은 형태의 일반식을 이끌어냈다. 학생들이 갖고 있는 수 감각은 학생들이 복합 관계를 인식하고 이것을 일반화하도록 하는데 중요한 역할을 하였다.

이 중 E4학생의 경우, 단지 복합 관계 인식에 의하여 문제를 해결할 뿐 아니라, 문제 상황의 구조를 인식하는 수준에 이르렀다. 또한 일반화 과정에서 수학영재아가 어떤 전략을 사용하고, 어떤 정당화를 이끌며, 어떤 메타인지적 사고를 하는지 명확하게 보여주어 그 특징을 상세하게 확인할 수 있었다.

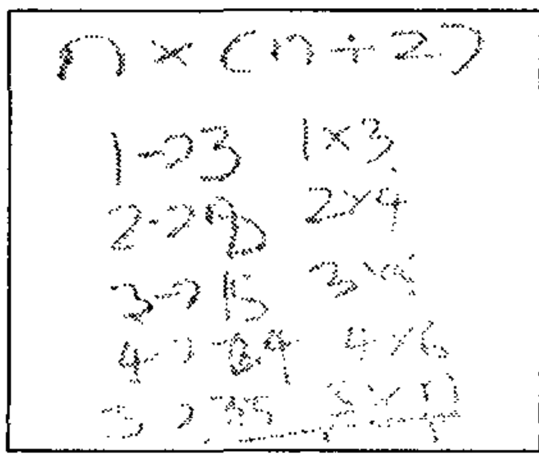
1) E4 학생의 해결과정

E4 학생은 바둑돌로 직접 움직여 가는 여러 번의 시행착오를 거쳐서 1번 문제의 답으로 15회를 얻었다. 그리고 '2×2×2×2 -1'이라는 식을 추측하였다. 이 식은 E4 학생이 '하노이 탑' 문제를 경험했을 때 보았던 식으로 이를 통해 바둑돌의 최소 이동 횟수를 구할 수 있을 것이라 추측했다. 이는 '추측에 의한 관계 인식'전략을 사용한 것으로 볼 수 있다. 이후 이 식이 맞는지 확인하기 위하여 1개씩 배열된 경우를 조작해보니 3회가 나왔고, 이는 추측한 식 '2×2 -1'에 맞았다. 그러나 2개씩 배열된 경우에는 추측한 식 '2×2×2 -1'에 의하면 7회가 나와야 하지만, 직접 해보니 8회가 나왔다([그림 Ⅳ-1]). E4 학생은 바둑돌을 움직여가면서 몇 번의 시행착오를 거친 끝에 8회가 최소 이동 횟수이며 초기에 추측한 공식은 맞지 않다는 것을 알게 되었다.

이후 다시 4개씩, 5개씩 배열된 경우에 대한 최소 이동 횟수를 구하여 [그림 Ⅳ-2]과 같이 정리하였고, 이를 통해 일반식을 이끌어냈다. 각 최소 이동 횟수는 바둑돌의 개수와 그보다 2씩 큰 수를 곱한 결과라는 점에 주목한 것으로 각 바둑돌의 개수와 최소 이동 횟수의 관계를 파



[그림 Ⅳ-1] 「바둑돌 옮기기」 과제의 일반화에 대한 E4 학생의 초기 추측



배열된 바둑돌의 개수(A)	최소 이동 횟수(B)	(B)에 대한 해석	일반화
1	3	1 × 3	n×(n+2)
2	8	2 × 4	
3	15	3 × 5	
4	24	4 × 6	
5	35	5 × 7	

[그림 Ⅳ-2] 「바둑돌 옮기기」 과제에서 E4 학생의 일반화

악한 '복합 관계 인식'전략이 사용된 것으로 판단할 수 있다.

E4 학생은 계속해서 자신이 구한 일반식 n×(n+2) 가 어떻게 나오게 되었는지 탐색하였고, 학생은 '검하검하…' 무늬가 나올 때까지의 횟수에 주목하였다(*1). 학생은 쉬는 시간에도 계속하여 이 부분에 대하여 검토하였고, 초기에는 주어진 바둑돌의 개수에 2.5를 곱하면 그 무늬가 될 때까지의 횟수라고 추측했다(*2). 6개씩 주어진 경우까지는 성립하는 것을 확인했으나(*3), 아직까지 왜 그 식이 성립하는 지는 파악하지 못했다. 다른 사례들을 검토하면서 이 추측이 틀렸음을 깨닫고, 바둑돌이 움직이는 과정을 보다 세분화하여 탐색해나갔다. 이러한 과정에서 '검하검하…' 무늬가 나올 때까지의 횟수를 구하기 위한 식을 도출해냈고(*4), 학생은 이 식과 바둑돌이 움직이는 과정을 연결 지어 설명하였다(*5). 이 부분의 면담 프로토콜은 아래와 같다.

E4 학생은 이와 같은 과정으로 자신이 지금까지 구해 놓은 1개씩 ~ 6개씩의 경우에 대하여 바둑돌이 움직이는 과정을 자세하게 살폈고, 이를 통해 「바둑돌 옮기기」 과제의 핵심적인 구조를 파악하는 데 성공했다. 이를 도식화하면 아래의 [그림 Ⅳ-3]와 같다. 이와 관련된 학생의 활동지를 살펴보면, 이는 확실하게 과

<프로토콜 1> E4 학생이 일반식의 의미를 탐색해가는 과정

	T	그건 뭐하는 거니?
*1	S	이렇게 까지(검하검하검하…) 되는데 최소의 이동횟수
	T	선생님한테 보여줄 수 있겠니? 2.5는 뭐야?
*2	S	4곱하기 2.5가 10이 나오는데요.... 최소횟수!
	T	왜 이식을 만들었지?
	S	규칙이 있을 것 같아서요.
		중략
*3	S	(바둑돌 6개로 검하검하가 되기까지를 보이며)21!!(좋아한다) 21 맞아요.
	T	그럼 그 식에서 어떤 규칙을 발견한 거야? 왜 그렇게 된다고 생각을 하지?
	S	그건 모르겠어요.
		중략
	S	아! 식이 이게 아니에요.
	T	어떤 식이 틀렸다고 생각해?
	S	아까 전에요. 답은 맞는데요. 의미는 아닌 것 같아요.
	T	의미가 아니다?
*4	S	네, 1은 1이고요, 2는 1더하기 2는 3!, 3은 1더하기 2더하기 3은 6!, 4는 1더하기 2더하기 3더하기 4는 10!, 5는 1더하기 2더하기 3더하기 4더하기 5는 15!, 6은 1더하기 2더하기 3더하기 4더하기 5는 21!
	T	아 그렇게 해서 나온 거야?
	S	네.
	T	그래서 어떤 규칙을 찾았어? 응...그것을 선생님이 알아듣기 쉽게 보여 볼까?
*5	S	응 하나씩 두 개씩 천천히 뛰어넘어요. 이렇게 할려면요, 처음에요, 따로따로 되어 있잖아요(검은 돌, 흰 돌) 뛰어야 되니까요. 하나씩 움직여야 되요. 두 개일 때는요 하나, 둘이요. 세 개일 때는요 하나...둘...셋! 이렇게 움직여야 되요.

제의 구조를 파악하여 일반식을 설명하고 있으며 따라서 '문제 상황의 구조 인식'의 전략을 사용했다고 볼 수 있다.

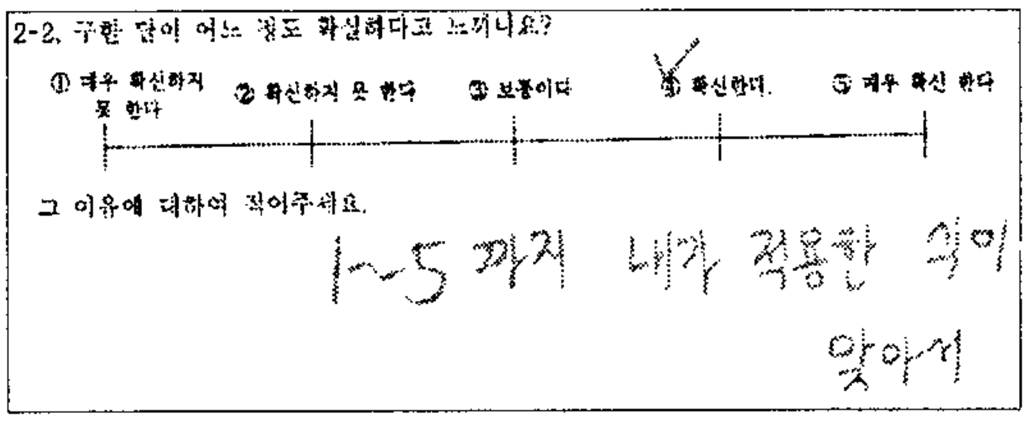
바둑돌을 움직인 경로	시작부분 (… ●●● ○○○ …) →	'검하검하검하…'로 교차하는 모양 (●○● ○●○…) →	끝 부분 (… ○○○ ●●● …)
횟수	1+2+… +n	n+n	(n-1)+(n-2)+… +1
	1+2+… +n + n+n + (n-1)+(n-2)+… +1		
최소 이동 횟수	**(1+2+… +n) +(1+2+… +n)+n = {(n+1)×n} + n = n×(n+2)**		

[그림 IV-3] 「바둑돌 옮기기」 과제에서 E4 학생의 일반화

「Big Loser」 과제의 해결과정에서도 학생들은 대부분 순환적인 규칙을 포착하고 일반화를 시도하였다. 이 경우에는 「바둑돌 옮기기」 과제에 비해 관계적인 이해를 기호로 표현하는 데 어려움을 겪었고, 복합 관계보다는 단일 관계나 추측에 의한 관계 파악 수준에 머물렀다. 문제해결과정의 열쇠가 되는 수열을 찾았으면서도 기호적인 표현에 서투르기 때문에 일반화하는 데 어려움을 느낀 것으로 보인다.

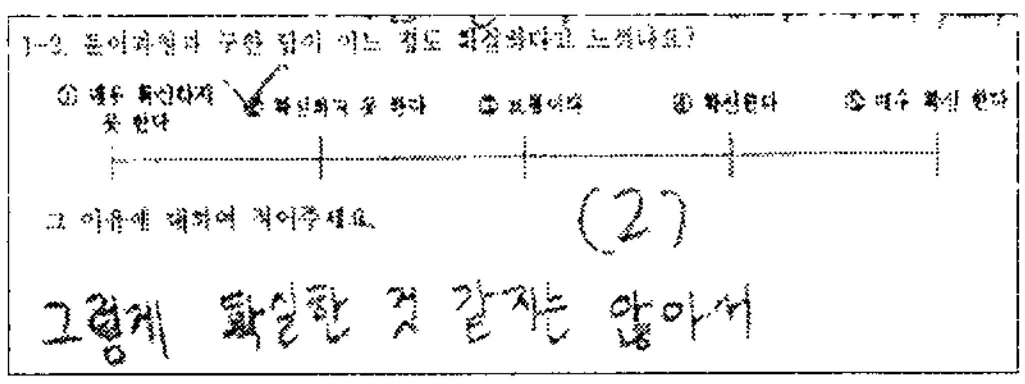
나. 정당화의 유형에 관한 분석

E4 학생을 제외한 나머지 세 학생은 모두 경험적 정당화 유형에 따르는 것으로 나타났다. n=1일 때 확인한 결과에 비추어 정당화하거나, 특정한 사례를 여러 개 확인하여 정당화하는 형태로 나타났다. 그러나 E4 학생은 경험적 정당화에 머무르지 않았기에 역시 집중적인 관찰과 면담을 시도하였다. 먼저 문제를 해결하는 과정의 중간 중간 자신이 구한 결과에 대하여 스스로 정당화를 했다. 초기에 '추측에 의한 관계 인식' 전략으로 파악한 '2×2×2×2 -1 = 15' 라는 식에 대하여 "1~5단계까지 식이 맞기 때문이다."는 설명을 하고 있으며([그림 IV-4]), 이는 경험적 정당화의 수준이다.



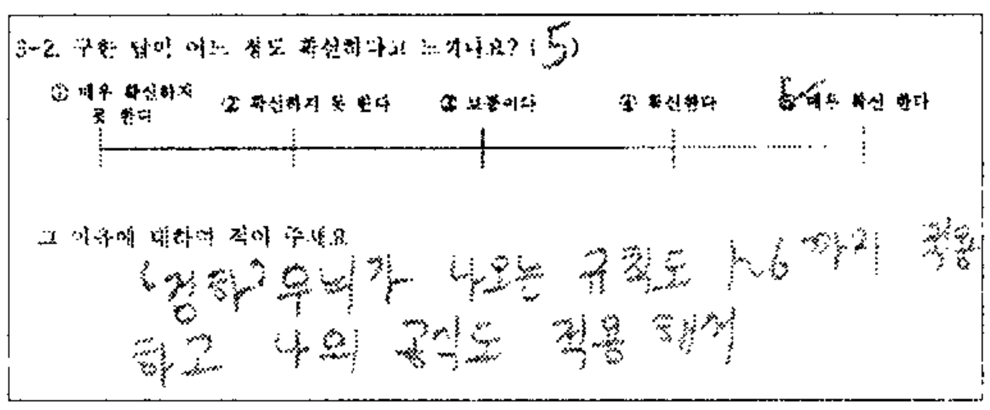
[그림 IV-4] E4 학생의 초기 추측에 대한 정당화

이후 특정 사례 값들을 계속 검토 하여 바둑돌이 이동하는 최소 횟수는 (바둑돌의 개수) × (바둑돌 개수 + 2)라는 것을 파악한 부분에 대해서는 그 식이 성립한다는 것을 설명하지만 강하게 확신하지는 못하였다([그림 IV-5]).



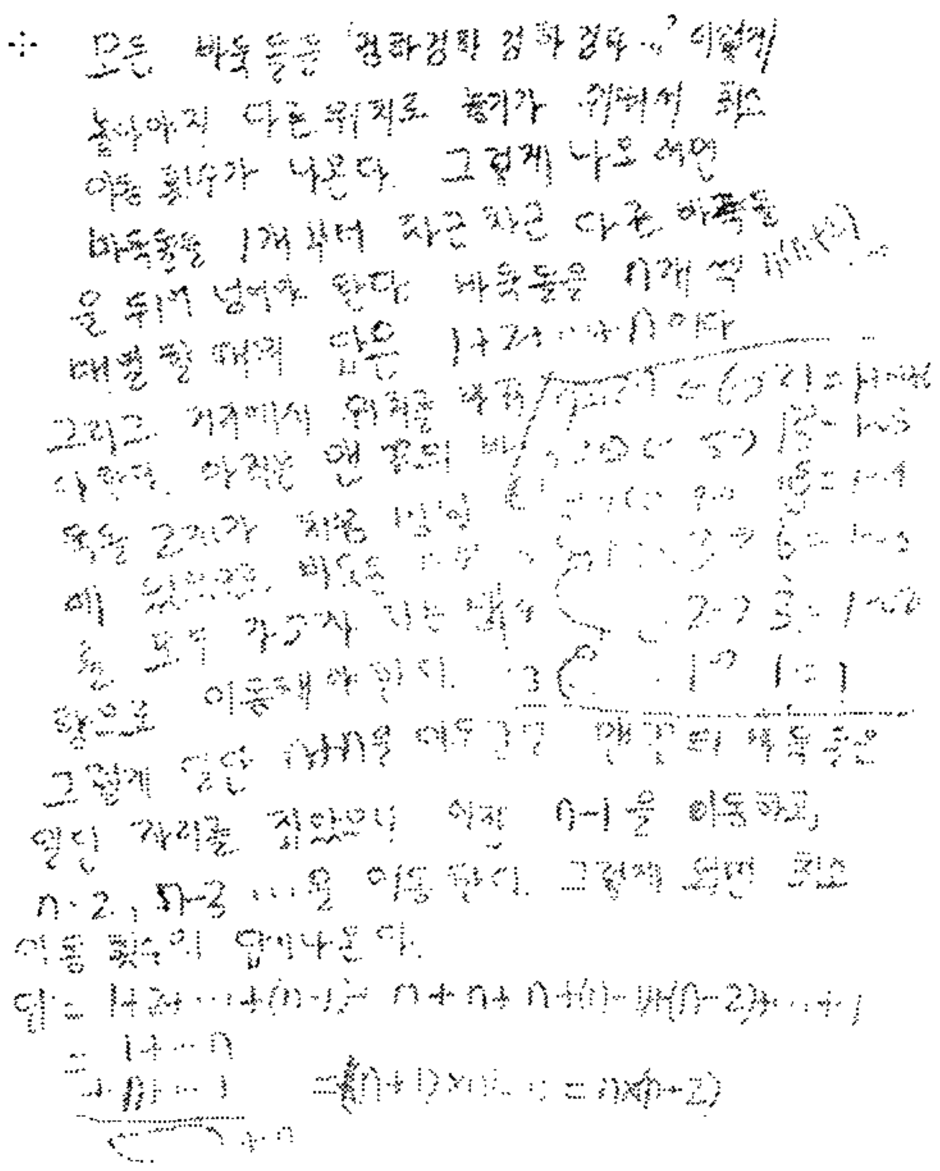
[그림 IV-5] E4 학생의 일반식에 대한 초기의 확신의 정도

식을 바둑돌이 움직이는 세부적인 경로와 연결 지어 설명한 이후 E4 학생은 자신이 도출한 일반식에 대하여 강하게 확신했다([그림 IV-6]).



[그림 IV-6] E4 학생의 일반식에 대한 후기의 확신의 정도

이를 토대로 자신의 일반화 과정을 최종적으로 정당화했다([그림 Ⅳ-7]). 이는 형식적 정당화로 판단되었다. 학생은 초기의 경험적 정당화의 수준에서 문제의 핵심적인 구조를 파악하는 과정을 경험하면서 자연스럽게 형식적 정당화의 수준에 이르게 되었다. 또한 E4 학생은 자신의 일반식에 대하여 '왜 성립하는지' 스스로 탐색하는 정당화 활동을 통해 초기 일반식을 검토하였고, 이러한 과정에서 과제의 핵심적인 구조를 파악하였다. 이러한 과정을 통해 학생은 자신의 일반식을 수학적으로 보다 세련된 형태로 설명할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-7] 「바둑돌 옮기기」 과제에서 E4 학생의 정당화

「Big Loser」 과제의 해결과정에서는 E2, E4 학생이 형식적인 정당화 수준에 도달하였고, E1, E3 학생은 순환적인 관계를 경험적으로 정당화하는 수준에 그쳤다. 이 과제의 경우에는 「바둑돌 옮기기」 과제에 비해 구조가 복잡하고 기호와 연결되지 않는다는 특성 때문에 형식적 정당화 수준에 이르기가 더 어려울 것으로 판단하였다. 그러나 오히려 E2 학생의 경우, 수열과 수열에 대한 일반식을 쉽게 통제함으로써 높은 수준의 정당화를 보여주었다.

2. 문제해결과정에서 나타난 메타인지적 사고의 특성

과제해결 과정에서 학생들은 자신이 가지고 있는 다양한 종류의 지식을 동원한다. 특히 과제가 도전적이고, 어려울 경우에 학생들은 소유한 지식들을 복합적으로 이용했고 그 과정에서 도움이 되는 경우도 있고, 오히려 방해가 되는 경우도 있었다. 하지만 점차 과제를 해결해나가는 과정에서 학생 스스로 감시, 평가, 제어하는 메타인지의 기능 영역의 사고를 통하여 적절하고 유용한 지식만을 적용하며, 그렇지 않은 경우는 배제하였다. 특히 '과제'에 관한 메타인지적 지식의 발현이 두드러졌다.

가. 메타인지적 지식 영역의 특성

학생들이 일반화를 시도하는 초기 접근으로 대부분 몇 개의 특정한 사례를 점검하는 활동을 시작했다. 이 과정에서 얻은 값들을 대상으로 학생들은 자연스럽게 관계를 파악하려고 했고, 직관적으로 떠오르는 아이디어를 점검해보는 과정을 거쳤다. 이 때 떠오르는 아이디어들은 학생들이 이전 수학활동의 경험에서 터득한 것으로부터 나오거나, 자신이 알고 있는 수학적인 지식, 혹은 학생에게 형성되어 있는 수감각 등을 기반으로 형성되었다. 이러한 아이디어의 근원은 학생 개인이 소유하고 있는 지식이며, 이를 과제를 해결하는 과정에서 연결시키는 것이 메타인지적 사고라고 판단했다. 이와 관련된 사례를 제시하면 다음과 같다.

1) 학생의 메타인지적 지식에 따라 일반화의 과정과 결과가 다르다.

가) 「바둑돌 옮기기」 과제에서의 E1 학생의 메타인지적 지식

E1 학생은 바둑돌로 몇 개의 사례를 검토해 본 후 이 과정에서 얻은 결과를 토대로 일반화를 시도했다. 메타인지적 지식과 관련된 면담 내용을 제시하면 <프로토콜 Ⅳ-8>과 같다.

학생이 규칙을 파악하기 위해서 한 최초의 접근은 '가우스 방법'을 떠올리고 이를 적용해 본 것이다(*1). 이 때 1개씩 배열된 경우는 최소 이동 횟수가 3인데, 이를 1+2 라고 추측해 보았고, 여기에서 모두 2개이므로 2개까지 더해본 것이다(*2). E1 학생은 이 방법을 '가우스 방법'이라고 표현했다. 그러나 2개씩 배열된 경우는 모두 4개의 바둑돌이므로 1+2+3+4=10 모두 10회가 나와야 하지만, 자신이 조작한 결과는 8회였으므로 이 아이디어를 변경하였다(*3). 나중에 활용한 메타인지적 지식은 '완전제곱수'에 대한 아이디어이다(*4). 학생은 3을 보고서 완전제곱수 4보다 1적은 수, 8을 보고서는 역시 완전제곱수인 9보다 1적은 수임을 직관적으로 파악하고서(*5), 이를 이용하여 일반식을 이끌어냈다(*6). 이 학생은 이러한 과정을 통하여 일반식을 (n+1)2-1 라고 정리했다. 이는 다른

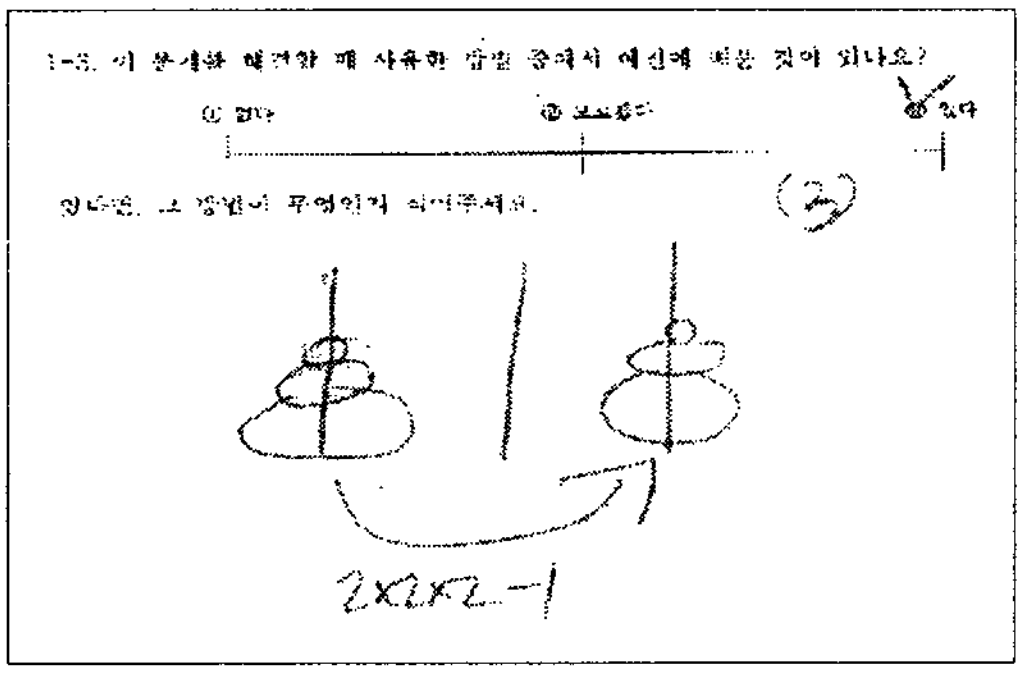
<프로토콜 2> 「바둑돌 옮기기」 과제에서 E1 학생의 메타인지적 지식

T: 자, 다시 한 번 말해보자.
S: 이게..n 이 1일 때 양쪽에 있으니까, 2개이니까...
T: 잠깐, 1일 때 양 쪽에 2개라는 건 뭐지? 뭐가 양쪽에 있지?
*1 S: 여기 이렇게, 이렇게 다른 색이 이렇게....그러니까..그 뭐야..가우스 방법으로 2더하기 1을 해서 3이 나왔어요.
T: 어? 가우스 방법에서 2더하기 1인데, 2는 어디서 나왔구? 1은 어디서?
*2 S: 아니,,그냥..2는 이거 두개 있으니까..2 더해보고
T: 잠깐 잠깐. (바둑돌을 색깔별로 한 개씩 놓으면서)이게 지금 움직이는 최소 횟수잖아? 근데, 너는 바둑돌 개수를 더한 거야?
S: 네. 한 번 더해 봤어요. 규칙을 찾으려고..
… 중략 …
S: 근데, (자신이 풀어놓은 최소횟수들을 가리키며)이런 거는 나머지가 안 맞아요.. 근데...
T: 아...예를 들어서 2개짜리는 왜 안 맞지?
*3 S: 2개짜리는 (바둑돌의 개수가 모두)4개이니까, 4 더하기 3 더하기 2 더하기 1인데, 그건 10이 되잖아요?그리고 (다른 경우의 최소횟수들을 가리키며)이런 것도 다 그렇게 하며 더 커져요..
T: 아. 그렇구나.
*4 S: 근데, 갑자기..그..제곱이 떠오른 거예요.
T: 왜, 왜 갑자기 그게 떠올랐는데?
*5 S: 그..뭐지..이게 1일 때 제곱이면 1인데, 그 뭐지...꼭 하나씩 1일 때...N에 더하기 1한 다음에...4가...이건(n=1일 때) 4, 이건(n=2일 때) 9, 이건(n=3일 때) 16..이렇게 하나씩만 커져요.
T: 음...
*6 S: 그래서 잘 생각해봤더니...이 식이 n 더하기 1 한 다음에, 괄호하고(n+1) 제곱하고 마이너스 1 해보니까, 다 맞았어요.

세 학생이 정리한 일반식인 n×(n+2)의 형태와 차이를 보이며, E1 학생이 활용한 메타인지적 지식의 영향에 의한 것이다.

나) 「바둑돌 옮기기」 과제에서의 E4 학생의 메타인지적 지식

E4 학생은 초기의 일반식을 추측할 때, 도움이 된 아이디어를 '하노이 탑' 문제를 떠올리면서 얻었다고 설명했다([그림 Ⅳ-8]). 이는 이미 형성된 학생의 수학적 지식이며, 이 지식은 초기에 학생이 일반식을 유도할 때 강하게 작용했다. 그러나 이후 다른 경우에는 이 식이 들어맞지 않게 되자 학생은 여러 차례 시행착오를 반복했고, 상당한 시간과 사고의 단계를 거쳐 결국 이 식이 틀렸다는 것을 인정하게 되었다.



[그림 Ⅳ-8] E4 학생이 활용한 메타인지적 지식

2) 주어진 과제의 의미와 조건의 파악은 일반화에 도달하는 데 결정적이다.

학생들은 처음 접하는 생소한 과제들을 해결했다. 더구나 특정한 사례의 결과만을 구하는 것이 아닌 일반적인 경우에도 성립하는 일반화까지 끌어내기를 요구했다. 이 때 학생들은 각각의 특정한 사례들 사이에서 관계를 파악해야 했고, 본 연구에서 제시한 과제는 어떠한 관계를 쉽사리 파악하기 힘든 과제였다. 주어진 과제의 조건을 잘못 이해하여 특정한 사례 값들조차 틀리게 구한 경우는 일반화에 도달하기가 더욱 힘들어졌고, 설사 몇 개의 사례에 대하여 값을 구한다 하더라도 계속해서 더 큰 경우에 대하여 조작이나 실험을 하기는 어려웠을 것이다. 학생들은 그 과정에서 과제의 핵심적인 조건과 구조를 파악하려고 노력했다. 과제의 핵심적인 조건이나 구조를 파악한 경우에는 보다 효과적으로 사례들의 값을 구할 수 있으며, 자신이 구한 사례들의 결과에 대한 확신도 강해졌다. 또한 이를 토대로 일반화까지 도달할 수 있었다.

나. 문제해결과정에서 보이는 메타인지적 기능

과제를 해결하는 과정에서 학생들은 이미 소유하고 있었던 지식을 연결시키려고 하였고, 새롭게 발견한 과제의 조건에 대한 지식을 이용하여 과제를 효과적으로 풀어나갔다. 그러나 이렇게 자신의 해결과정을 결정, 수정, 진전시켜 나가는 데에는 이러한 지식을 토대로 한 어떠한 행동이 있었기 때문이다. 특히 메타인지적 기능 영역인 '감시', '평가', '제어'와 같은 행동은 과제를 해결하는 과정에서 수시로 발현되었다.

1) 감시, 평가, 제어 활동의 발현

가) 「바둑돌 옮기기」 과제에서의 E4 학생의 메타인지적 기능

E4 학생은 초기에 식을 추측하면서 하노이 탑의 아이디어를 이용했으나, 이러한 지식이 맞지 않음을 깨닫는 과정에서 감시, 평가, 제어의 활동을 발현시켰다. 이와 관련된 프로토콜은 아래와 같다.

E4 학생은 자신이 해결하는 과정에서 얻은 중간 결과에 대하여 스스로 검토하는 감시활동을 수시로 발현시켰다. 이는 곧바로 자신의 사고과정과 중간 결과 값에 대하여 평가하는 활동으로 이어졌고(*1, *2, *4), 평가활동의 결과에 따라 다음의 과정을 스스로 제어해 나갔다(*1, *2, *3). 즉 감시, 평가, 제어의 메타인지적 기능 활동은 학생이 자신의 사고과정을 스스로 점검·평가함으로써 특정한 사례들에 대한 값들을 정당화하게 하며, 이를 통해 적절하고 유용한 아이디어만을 남기고 자신의 전략과 방법을 수정·변경하면서 해결과정을 지속적으로 이끌어나가게 했다.

V. 논의 및 결론

이 글은 초등 수학 영재가 주어진 대수과제를 해결하는 과정에서 보여주는 일반화 전략과 그에 대한 정당화 유형을 분석하였고, 그 과정에서 발현되는 메타인지적 사고의 특성을 보여주고 있다.

과제해결 과정에서 학생들은 일반화를 위해 관계를 파악하는 전략을 사용하였고, 이 전략을 과제가 내포한 관계의 특성에 따라 복합적으로 나타났다. 한 과제를 해결하는 과정에서 문제해결 초기단계에서 사용한 전략은 해결과정이 진전됨에 따라 변경된 경우도 있었다. 또

<프로토콜 3> 「바둑돌 옮기기」 과제에서 E4 학생의 메타인지적 기능

T: 지금은 어때요?
S: 지금은 틀려졌어요(**평가**).
T: 틀린걸 한번 적어볼까요? 틀려진 생각을? 이때 갑자기 떠오른..바뀐..
*1 S: 세 개하고 한 개는 맞는데요(**평가**). 두 개는요(**감시**)..제가 적어 놓은 식에서 2×2×2×-1이 나와야 하는데(**감시**), 7이 안 나오고 8이 나왔어요...그 다음에 계속 해봤는데요(**제어**). 더 작은 게 아무리 해봐도 안 나오더라고요.
T: 네...그랬어요? (활동지의 반응을 가리키며) 확신하지는 않았다? 배운 적이 있나요? 잠시 생각해볼까요?
… 중략 …
S: 아! 하노이 탑이요!
T: 하노이 탑이요? 그거를 적어볼까요?
S: 하노이 탑...하노이탑...이렇게 책이 몇 개가 있는데요. 큰 원위에 작은 원을 올려 놔야 되고, 작은 원위에 큰 원을 올려놓을 수가 없어요. 그렇게 옮긴 다음에 이렇게 옮길 때 횟수가요. 제가 생각한 공식이었어요.
T: 아. 그러면 이 문제를 봤을 때 하노이 탑을 생각했어요?
*2 S: 하노이 탑은 생각하지 않았는데 그 공식이 떠올랐어요..네..근데 해봤더니요(**제어**), 15가 나와 가지고 확신을 했었어요(**감시**). 근데요...이상한 것 같아요(**평가**).
T: 아~ 그 어떤 특정한 수는 맞는데 다른 걸 해봤더니..틀리더라..그래서 어떻게 했어요?
*3 S: 계속 해봤죠(**제어**).
계속 해봤어요? 응..어떤 수를 다 적용을 해도 맞는 식을 찾으려고 노력을 했죠? 그렇죠?
네.
그래서 이 식까지 나왔어요. 지금 이 답까지 나올 때까지...아! 이거다. 라고 확신을 했던 그 어떤 번쩍 뜨이는 사고가 있었어요?
*4 두 번째 할 때는요.. 이거 왜 이렇게 이상해 하고(**평가**) 생각했는데요. 네 번째 하니까요(**제어**), 원래 제가 생각한 공식에서는 31이 나왔는데(**감시**). 24가 나오니까요...그게(새로운 일반식) 갑자기 딱 떠올랐어요.

한 한 유형의 전략에 대해서도 학생들이 그 전략을 활용하는 방법과 수준에는 차이가 있음을 파악하였다.

과제를 해결할 때 4명의 학생이 모두 복합 관계 인식의 전략을 사용했으나 그 과정에서는 차이가 있었다. 단순히 주어진 양과 결과로 얻은 양 사이의 관계를 파악하려고 시도하는 학생들이 있었고, 그 과정에서 관계가 쉽게 보이지 않을 경우 다른 전략의 사용으로 변경하기도 했다. 대조적으로 관계가 쉽게 보이지 않을 경우, 두 양들을 조작하여 새로운 양으로 표현한 후 그 양에 초점을 두고 사고를 조작하여 계속적으로 복합 관계 인식의 전략으로 접근한 경우도 있었다. 이 경우 단지 순환적인 논리를 적용한 규칙의 도출이 아닌, 명시적인 일반식을 끌어낼 수 있었다. 또한 복합 관계를 인식하여 일반식을 이끌어 낸 이후에도 그 식이 어떻게 형성되는지를 살펴보기 위하여 노력한 경우에는 바둑돌의 이동 경로를 세분화하여 문제의 핵심적인 구조를 파악하게 되었고, 이를 통해 일반화를 형식화하는 수준까지 도달하였다.

과제의 순환적인 규칙의 특징을 학생들은 다양한 방법, 수준으로 이용하여 문제를 해결했다. 과제의 순환적인 특성을 발견하기는 했으나 일반화와 연결 짓지 못한 경우가 있었다. 반면 초기 접근부터 이러한 특성을 이용하여 각 사례 값들에 빨리 접근하여 이를 식의 형태로까지 정리하고 일반화에 도달하는 학생들도 있었다.

학생들이 일반화에 성공한 경우에는 정당화의 과정을 경험하였고, 학생들의 정당화의 유형은 다양하게 나타났다. 그리고 비록 경험적 정당화로 분류되는 수준이라 하더라도 학생들의 정당화 과정에는 그 이상의 수준으로 나아갈 수 있는 잠재능력이 포착되었다. 학생들이 일반화에 대한 정당화를 경험하면서, 점차 일반화에 대해서 뿐 아니라 자신의 해결과정의 부분이나 요소들에 대해서도 정당화하기 시작했고, 그 과정에서 일반화에 대한 사고로 연결됨을 발견했다.

경험적 정당화를 한 학생의 경우에도 “더 많은 경우에 대해서는 완전히 확신 할 수 없다.”는 설명을 하고 있다. 이는 일부 사례에 대한 검사를 통해 자신의 일반화를 정당화하는 즉, 경험적 정당화로서는 자신의 규칙을 설명하고 옹호하는데 있어서 충분하지 않으며 한계가 있음을 학생 스스로 인식하고 있음을 보여주는 것이다. 또한 ‘그것이 왜 최소일 수밖에 없는지’에 대하여 자신이 파악한 과제의 핵심적이 조건을 근거로 설명하는 학생들도 있었다. 이 학생들은 자신들의 일반식을 정당화함에 있어서 분명 자신이 점검한 사례들을 이유로 들어서, 지금까지 성립했기 때문에 앞으로 다른 경우도 모두 성립할 것이라고 설명하는 경험적 정당화이다. 그러나 ‘왜 그 일반식이 항상 최소 이동 횟수인가?’에 대하여 자신들이 파악한 과제의 특성을 이용하여 설명하고 있다. 이는 과제의 구조적인 특성을 보여주면서 그것을 근거로 학생의 일반식을 옹호하려는 행동이며 경험적 정당화에서 조금 더 진보된 형태라고 여겨진다. 따라서 정당화할 수 있는 충분한 시간과 기회를 제공한다면, 보다 더 발전된 유형의 정당화 활동으로 진전될 가능성이 되어 있다고 여겨진다.

또한 과제의 핵심적인 구조를 통해 일반식을 끌어냈고, 정당화 과정에서 특정한 사례들과는 별개로 연역적인 사고과정을 통해 설명한 형식적 정당화의 수준까지 나타났다. 학생은 일반식에 도달한 이후에도 왜 그 식이 최소임을 나타내는 지에 대하여 지속적으로 탐구하고, 다시 개별 사례들을 관찰하는 과정에서 과제의 핵심 조건과 이동 횟수와의 관계를 파악할 수 있었

고, 각 경로마다 바둑돌이 움직인 횟수를 구함으로써 형식적인 수준으로 나아갈 수 있었다.

메타인지적 사고의 특성을 살펴본 결과, 과제해결 과정에서 학생들은 자신이 가지고 있는 다양한 종류의 지식을 동원했다. 특히 '과제'에 관한 메타인지적 지식의 발현이 두드러졌다. 과제가 도전적이고, 어려울 경우에 학생들은 소유한 지식들을 복합적으로 이용했고 그 과정에서 도움이 되는 경우도 있고, 오히려 방해가 되는 경우도 있었다. 하지만 점차 과제를 해결해나가는 과정에서 학생 스스로 감시, 평가, 제어하는 메타인지의 기능 영역의 사고를 통하여 적절하고 유용한 지식만을 적용하며, 그렇지 않은 경우는 배제하였다.

학생들이 일반화를 시도하는 초기 접근으로 대부분 몇 개의 특정한 사례를 점검하는 활동을 시작했다. 이 과정에서 얻은 값들을 대상으로 학생들은 자연스럽게 관계를 파악하려고 했고, 직관적으로 떠오르는 아이디어를 점검해보는 과정을 거쳤다. 이 때 떠오르는 아이디어들은 학생들이 이전 수학활동의 경험에서 터득한 것으로부터 나오거나, 자신이 알고 있는 수학적인 지식, 혹은 학생에게 형성되어 있는 수감각 등을 기반으로 형성된 것이었다.

과제를 해결하는 과정에서 학생들은 이미 소유하고 있었던 지식을 연결시키려고 하였고, 새롭게 발견한 과제의 조건에 대한 지식을 이용하여 과제를 효과적으로 풀어나갔다. 그러나 이렇게 자신의 해결과정을 결정, 수정, 진전시켜 나가는 데에는 이러한 지식을 토대로 한 어떠한 행동이 있었기 때문이다. 특히 메타인지적 기능 영역인 '감시', '평가', '제어'와 같은 행동은 과제를 해결하는 과정에서 수시로 발현되었다. 감시, 평가, 제어의 사고과정은 학생들이 과제의 새로운 조건을 파악하게 하는 원동력이 되었고, 자신의 사고과정을 점검함으로써 특정한 사례들에 대한 값들을 정당화하게 하며, 전략을 수정·변경하면서 해결과정을 지속적으로 이끌어나가게 했다.

본 연구를 통해 초등 수학영재들의 일반화와 관련된 사고특성을 살펴보았다. 학생들이 일반화 전략을 사용하는 방법과 수준, 그에 대한 정당화 유형을 확인했으며 그러한 과정에서 메타인지적 사고가 어떠한 역할을 하는지 살펴보았다. 이 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 초등 수학 영재들에게 대수 영역의 핵심인 일반화를 경험시키고자 할 때, 학생들에게 어떤 과제를 통하여 어떤 일반화 전략을 경험하게 할 것인지 고려할 필요가 있다. 이 연구에서는 선행연구를 분석하여 일부 일반화 전략의 사용 과정을 확인하였으나, 나머지 다른 일반화 전략에 대해서는 충분히 연구하지 못하였다. 특히 과제의 특성에 따라 유용한 전략이 달랐으며, 이러한 과제의 구조를 잘 활용해야 일반화에 도달하도록 할 수 있음을 알 수 있었다. 따라서 보다 다양한 구조나 특성을 내포한 일반화 과제를 도입하여 일반화를 경험하게 한다면, 학생들의 대수적 사고가 더욱 폭넓게 형성될 것으로 기대된다.

둘째, 학생들이 과제를 해결하는 과정 중에 수시로 중간 결과에 대한 정당화를 할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 학생들의 경험적 정당화의 수준은 이미 그 다음 단계로 나갈 준비가 되어있었다. 학생들이 그 과정에서 결과가 확실한지, 그것이 왜 최소인지 등에 대하여 점검하고, 확신을 얻고, 설명을 하게 한다면 일반화에 대한 핵심적인 조건과 구조에 접근할 수 있고, 이는 최종적인 일반화에 대한 정당화 활동과 연결되며 그 수준이 더욱 향상될 것이다.

셋째, 과제를 해결하는 과정에서 스스로의 사고과정과 과제해결의 정도를 감시하고 평가

하는 기회를 갖도록 해야 한다. 학생들은 자신의 인지활동과 과제의 수행 정도를 감시하고, 평가함으로써 과제해결을 위한 행동 방향을 결정하고 이를 지속하거나 수정, 변경하게 하는 제어활동이 나타난다. 이를 통해 학생들은 과제의 핵심적인 조건을 파악하고, 유용한 아이디어를 선별하며 새로운 전략을 도입하여 해결해 나가는 것이다. 초등 수학영재학생들에게도 이러한 메타인지적 사고에 대하여 강조하고 스스로 활용할 수 있도록 한다면 더욱 유능한 문제해결자로 발전할 것이다.

참고문헌

강미애(2000). **초등학생의 대수적 사고 분석에 관한 연구**. 인천교육대학교 석사학위논문.

강신포 · 김판수 · 유화전(2003). 초등학교 수학영재 및 일반 아동의 정의적 특성 비교 연구. **학교수학, 5**(4), 441-457.

강승자 · 김용구 · 정인철 · 임근광(2006). 수학영재의 수학교과에 대한 정의적 특성에 관한 연구. **한국수학교육학회 주최 제11회 국제수학영재교육세미나프로시딩**. 133-148.

강 완(1994). 수학적 능력의 구조에 따른 수학영재아의 지도 방안. **대한수학교육학회논문집, 4**(2), 39-147.

강은희(2006). **해체적 발문을 통한 수학영재아들의 수학적 사고과정**. 경인교육대학교 석사학위논문.

김남희(1994). 대수적 사고에 관한 고찰: 산술과의 관련성과 변수개념. **대한수학교육학회논문집, 4**(2), 189-204.

김남희(1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해. **대한수학교육학회논문집, 7**(1), 445-458.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위논문.

김수미(1992). 수학교육에서의 메타인지 개념에 대한 고찰. **대한수학교육학회논문집, 2**(2), 95-104.

김지원(2003). **한 수학 영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

김판수(2005). 초등수학 영재의 문제설정 단계와 사고과정 분석: 성냥개비 과제에 대한 사례 분석을 중심으로. ***The Journal of Elementary Education*, 18**(2).

박은정(2006). **능력별 집단에 따른 수학 영재들의 패턴의 일반화 과정에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

신은주 · 신선화 · 송상헌(2007). 초등수학영재들의 메타인지적 사고 과정 사례 분석. **수학교육학연구 17**(3), 201-210

송상헌(2000). 수학영재아들을 위한 행동특성검사지의 개발과 활용에 관한 연구. **학교수학, 2**(2), 427-457.

송상헌 · 강은희 · 박은정 · 허지연(2004). 수학영재들의 수학적 추론 능력 분석에 관한 연구. **경인교육대학교 과학교육 논총, 17집**, 17-34.

송상헌 · 임재훈 · 정영옥 · 권석일 · 김지원(2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구 17**(2), 163-177.

송상헌 · 허지연 · 임재훈(2006). 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학영재들이 보여주는 정당화의 유형 사례 분석. **수학교육학연구 16**(1), 79-94.

이경화(2001). 초등수학 우수아의 특성과 지도자료의 예시. **수학교육학연구, 11**(1), 37-50.

이경화 · 최남광 · 송상헌(2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구 과정-정당화 과정

과 표현 과정을 중심으로-. **학교수학 9**(4), 487-506.

이향훈(2007). **NIM게임의 조건 변경을 통한 문제 만들기와 일반화 과정 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.

조용남(2007). **초등학교 5학년 문제 푸는 방법 찾기 단원에서의 대수적 사고 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.

조재영(1996). **수학 교수활동 과정에서 학생의 메타인지적 능력 신장 방안 연구**. 한국교원대학교 박사학위논문.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situation of validation. Educational Studies in Mathematics, 18, 147-176.

English, L. D. & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, Vol 91*, 166-170.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(7), 342-348.

Mark, D. (1999, March). The big loser. *The Mathematics Teacher, 92*(3), 208-213.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 3-31.

Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justification. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Steelee, D. F. & Johanning, D. I.(2004). A schematics-theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 65-90.

A Study on the Algebraic Thinking of Mathematically Gifted Elementary Students

Kim, Min Jung (graduate school, Korea National University of Education)
Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)
Song, Sang Hun (Gyeong-in National University of Education)

The purpose of this study was to describe characteristics of thinking in elementary gifted students' solutions to algebraic tasks. Especially, this paper was focused on the students' strategies to develop generalization while problem solving, the justifications on the generalization and metacognitive thinking emerged in students' problem solving process. To find these issues, a case study was conducted. The subjects of this study were four 6th graders in elementary school - they were all receiving education for the gifted in an academy for the gifted attached to a university.

Major findings of this study are as follows:

First, during the process of the task solving, the students varied in their use of generalization strategies and utilized more than one generalization strategy, and the students also moved from one strategy toward other strategies, trying to reach generalization. In addition, there are some differences of appling the same type of strategy between students. In a case of reaching a generalization, students were asked to justify their generalization. Students' justification types were different in level. However, there were some potential abilities that lead to higher level although students' justification level was in empirical step.

Second, the students utilized their various knowledges to solve the challengeable and difficult tasks. Some knowledges helped students, on the contrary some knowledges made students struggled. Specially, metacognitive knowledges of task were noticeably. Metacognitive skills; 'monitoring', 'evaluating', 'control' were emerged at any time. These metacognitive skills played a key role in their task solving process, led to students justify their generalization, made students keep their task solving process by changing and adjusting their strategies.

* key words : mathematically gifted students(수학영재), algebraic thinking(대수적 사고) generalization(일반화), students' strategies(전략), justification(정당화), metacognition(메타인지)

논문접수 : 2008. 2. 15
심사완료 : 2008. 3. 18