

확산 가속법을 이용한 SAAF 중성자 수송 방정식의 해법

노태완[†] · 김성진

홍익대학교 기초과학과 응용수학 전공

(2008년 12월 14일 접수, 2009년 2월 10일 수정, 2009년 2월 10일 채택)

Solution of the SAAF Neutron Transport Equation with the Diffusion Synthetic Acceleration

Taewan Noh[†], Sungjin Kim

Applied Mathematics, Hongik University, Seoul, Korea

(Received 14 December 2008, Revised 10 February 2009, Accepted 10 February 2009)

요 약

최근 새로운 2계 자기 수반형(self-adjoint) 중성자 수송 방정식으로 기존의 우성 및 기성 수송 방정식 외에 SAAF (Self-Adjoint Angular Flux) 수송 방정식이 소개되어, 이에 대한 적절한 경계조건, 수치해법, 정확도 등에 관한 논의가 활발히 진행되고 있다. 본 연구에서는 SAAF 수송 방정식의 수학적, 물리적 의미를 고찰하고 기존의 우성 및 기성 수송 방정식과의 연관성을 명확히 하였으며, Boltzmann 수송 방정식의 1계 차분식에서 2계의 SAAF 수송 방정식의 차분식을 유도하는 방법을 확산 가속법(diffusion synthetic acceleration method)과 함께 소개하였다. 유도된 SAAF 차분법이 계산 효율성과 수송해의 정확도를 증가시킴을 수치결과로 확인하였다.

주요어 : 중성자 수송 방정식, SAAF, 우성, 기성, 확산 가속법, 중성자속

Abstract — Conventionally, the second-order self-adjoint neutron transport equations have been studied using the even parity and the odd parity equations. Recently, however, the SAAF (self-adjoint angular flux) form of neutron transport equation has been introduced as a new option for the second-order self-adjoint equations. In this paper we validated the SAAF equation mathematically and clarified how it relates with the existing even and odd parity equations. We also developed a second-order SAAF differencing formula including DSA(diffusion synthetic acceleration) from the first-order difference equations. Numerical result is attached to show that the proposed methods increases accuracy with effective computational effort.

Key words : Neutron Transport Equation, SAAF, Even-Parity, Odd-Parity, Diffusion Acceleration, Neutron Flux

1. 서 론

원자력 발전소의 설계에 있어 가장 기본이 되는 것은 원자로 내의 중성자 거동을 정확하게 기술하는 일이며 이를 토대로 원자로 내의 정확한 출력 분포를 계산할 수

있고 이를 이어 열수력학적 설계 등이 뒤 따르게 된다. 따라서 시간, 위치, 방향을 변수로 갖는 중성자에 대한 정확한 정보를 파악하는 학문적 노력은 원자력 발전소를 안전하게 설계하고 운영하는 기술의 원천이 된다. 중성자의 매질 내에서의 거동을 기술하기 위해 전통적으로 1계 미분방정식의 형태를 갖는 Boltzmann 중성자 수송 방정식(Boltzmann neutron transport equation)이 주로 사용되어 왔으나 최근에는 컴퓨터 하드웨어 및 병렬처리 기법의 발달로 대규모 행렬계산이 용이해 짐에 따라 보다 수치적 안정성을 갖는 2계 자기 수반형 중성자 수송

[†]To whom correspondence should be addressed
Applied Mathematics, Hongik University
72-1 Sangsu-dong, Mapo-gu, Seoul, Korea
E-mail : twnoh@hongik.ac.kr

방정식의 해법에 많은 관심과 연구가 집중되었다.⁽¹⁻³⁾ 2계 자기 수반형 중성자 수송 방정식에는 우성 방향 중성자속(even-parity angular neutron flux)을 미지함수로 갖는 우성 수송 방정식(even-parity transport equation)과 기성 방향 중성자속(odd-parity angular neutron flux)을 미지함수로 갖는 기성 수송 방정식(odd-parity transport equation)이 있는데, 이제까지는 중성자속(scalar neutron flux) 계산의 편리함 때문에 주로 우성 수송 방정식에 대한 연구가 주를 이루어 왔다. 노⁽⁴⁾는 우성 및 기성 수송 방정식 모두에 대하여 중성자속을 용이하게 계산할 수 있는 수치적 방법을 소개하기도 하였다.

최근 Morel과 McGhee⁽⁵⁾는 또 다른 2계 자기 수반형 수송 방정식의 하나로 방향 중성자속(angular neutron flux) 자체를 미지수로 갖는 SAAF (Self-Adjoint Angular Flux) 방정식을 소개하였고, 이후로 SAAF와 기존 우성 및 기성 수송 방정식과의 연관성, 계산 정확도 및 SAAF에 적용이 가능한 적절한 경계 조건 설정 등이 주요한 연구 주제로 등장하고 있다.⁽⁶⁾ Morel⁽⁷⁾에 의하면 미국의 Los Alamos National Laboratory에서도 중성자 수송 및 열복사 계산 관련 코드에 이미 SAAF를 포함한 2계 자기 수반형 수송 방정식을 사용하고 있으며 이를 바탕으로 한 코드 재구축 움직임도 활발히 진행되고 있다.

본 연구에서는 SAAF 수송 방정식의 수학적, 물리적 의미를 고찰하고 기존의 우성 및 기성 수송 방정식과의 연관성을 명확히 하며, 1계 Boltzmann 수송 방정식으로부터 2계 SAAF 차분식을 유도하고, 이를 계산하는 방법을 수치해와 함께 보인다. 더욱이 SAAF 해의 수렴속도를 증가시키기 위해 새롭게 개발된 확산 가속법도 함께 소개한다.

2. SAAF 수송 방정식과 경계조건

2-1. 중성자 수송 방정식

1계 Boltzmann 중성자 수송 방정식은

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = S \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + Q \quad (1)$$

로 나타나는데, 여기서, ψ 는 방향 중성자속이며 \vec{r} , $\hat{\Omega}$ 는 위치 및 방향변수, σ 는 거시총단면적(macroscopic total cross section), S 와 Q 는 각각 중성자 산란(neutron scattering)과 중성자원(neutron source)을 나타내는 연산자이다.

여기서는 수송 방정식의 경계조건(boundary conditions)으로 방향 중성자속에 대한 기지유입조건(known incoming condition)과 반사조건(reflective condition)을 다룬다. 중

성자 거동을 기술하는데 편리하게 사용되는 기타의 경계 조건도 유사한 방법으로 해석할 수 있다.

기지유입조건은 매질의 외부에서 유입되는 방향 중성자속의 방향별 크기를 나타낸다. 따라서, 경계 Γ 에서의 기지유입조건은

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = f(\hat{\Omega}), \quad (\vec{r} \in \Gamma, \hat{\Omega} \cdot \hat{n} < 0) \quad (2)$$

로 표시된다. 여기서 \hat{n} 은 경계에서의 바깥 방향 법선벡터(outward normal vector)이다. 물론 $f(\hat{\Omega}) = 0$ 이면 외부로부터 방향 중성자속의 유입이 없는 진공조건(vacuum condition)이 된다.

반사조건은 경계에서의 거울반사(mirror reflection)를 나타내며,

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}'), \quad (\vec{r} \in \Gamma, (\hat{\Omega} \times \hat{\Omega}') \cdot \hat{n} = 0) \quad (3)$$

로 나타낸다. 여기서 $\hat{\Omega}$ 는 중성자의 입사방향(incidence angle)을 $\hat{\Omega}'$ 는 중성자의 반사방향(reflection angle)이다.

2-2. SAAF 중성자 수송 방정식

SAAF 중성자 수송 방정식을 한 마디로 소개하면 방향 중성자속 자체를 미지함수로 갖는 2계 자기 수반형 수송 방정식이라 할 수 있다. 이는 기성 및 우성 수송 방정식과 같은 기존의 2계 자기 수반형 수송 방정식이 미지함수로 각각 우성 방향 중성자속(even-parity angular neutron flux)과 기성 방향 중성자속(odd-parity angular neutron flux)을 갖는 것과 대조된다. 식(1)의 1계 수송 방정식을 ψ 에 대하여 풀면

$$\psi = -(\sigma - S)^{-1} \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi + (\sigma - S)^{-1} Q \quad (4)$$

이고, 식(4)를 식(1)의 1계 미분항(gradient term)의 ψ 에 대입하면

$$-\hat{\Omega} \cdot \nabla (\sigma - S)^{-1} \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi + (\sigma - S) \psi = Q - \hat{\Omega} \cdot (\sigma - S)^{-1} Q \quad (5)$$

가 되는데, 이를 SAAF (self-adjoint angular flux) 수송 방정식이라고 부른다. SAAF 수송 방정식은 식(1)의 Boltzmann 수송 방정식과 같이 방향 중성자속을 미지함수로 가지면서도 형태가 2계이고, 우성 및 기성 수송 방정식과는 달리 방정식의 미지함수 자체가 방향 중성자속이므로 1계 Boltzmann 수송 방정식에 적용되는 식(2)와 식(3)의 경계조건이 수정 없이 그대로 적용되는 특징을 갖는다. 여

기서 주의할 점은 SAAF 수송 방정식을 풀기 위해서는 SAAF 수송 방정식이 2계 미분방정식이므로 식(4)가 영역의 경계에서도 성립한다는 추가적인 경계조건이 필요하다는 것이다. SAAF 수송 방정식의 여러 가지 다른 특징들이 Morel과 McGhee⁽⁵⁾에 상세히 기술되어 있다.

식(5)의 형태로 유도되는 SAAF 수송 방정식이 과연 수학적으로 타당성을 갖는지 의문이 있을 수 있다. 예를 들어, 1계 초기값 문제 $y' - y = 0, y(0) = 1$ 을 생각하자. 이의 해는 $y = e^x$ 이다. 이 문제에 대해 SAAF 수송 방정식을 유도할 때와 같은 방법을 적용하기 위해 주어진 미분방정식을 y 에 대해 풀면 $y = y'$ 이 된다. 이를 다시 원래 미분방정식의 1계 미분항에 대입하면 2계 미분방정식 $y'' - y = 0$ 이 되고 이의 일반해는 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ 이다. 상수 c_1, c_2 를 결정하기 위해서 주어진 초기조건 $y(0) = 1$ 이외에 다른 조건이 하나 더 필요한데 이는 2계 미분방정식을 유도하기 위해 사용했던 $y = y'$ 으로부터 $y(0) = y'(0)$ 을 사용한다. 이러한 두 조건을 사용하면 2계 미분방정식에 대한 초기값 문제의 해는 본래의 1계 미분방정식에 대한 초기값 문제의 해와 같은 $y = e^x$ 이 된다. 이는 SAAF 수송 방정식과 이의 해에 대한 타당성을 제공하는 예이다.

3. SAAF 중성자 수송 방정식의 차분

식(1)의 Boltzmann 수송 방정식을 1차원 방향차분(discrete ordinates, S_N), 등방성 산란 및 중성자원, 내에너지 그룹(within energy group)을 가정하여 다시 쓰면

$$\mu_m \frac{\partial \psi_m^{j+1/2}}{\partial x} + \sigma \psi_m^{j+1/2} = \sigma_s \phi^j + Q \tag{6}$$

로 단순해진다. 여기서, $\psi_m^{j+1/2}$ 은 차분방향(discrete direction) $m = 1, 2, \dots, M$ 에 대해 반복계산 단계 l 에서의 방향 중성자속이다. μ_m 은 1차원 방향성분(directional quadrature), σ_s 는 거시산란단면적(macroscopic scattering cross section),

ϕ 는 중성자속(scalar neutron flux)으로 방향 중성자속에 대해

$$\phi^{j+1/2} = \sum_{m=1}^M \omega_m \psi_m^{j+1/2} \tag{7}$$

로 정의한다. 여기에서는 식(6)의 1계 미분방정식에 대한 차분식을 먼저 유도하고 이 차분식을 이용해 SAAF 차분식을 유도하는 과정을 보이겠다.

차분을 위한 격자(cell) 구조를 정수 표시 x_i 는 각 격자의 중심(center)을 나타내고 반정수 표시 $x_{i+1/2}$ 는 각 격자의 모서리(vertex or edge)를 나타내도록 Figure 1과 같이 정한다. 물질의 속성인 $\sigma_i, \sigma_{s,i}, Q_i$ 는 격자의 내부에서 일정한 값을 가지며 미지함수인 ψ_m 과 ϕ 는 격자의 중앙과 모서리에서 모두 정의된다.

식(6)을 구간 $[x_i, x_{i+1}]$ 에 대해 적분하면

$$\begin{aligned} & \mu_m (\psi_{m,i+1}^{j+1/2} - \psi_{m,i}^{j+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \psi_{m,i+1/2}^{j+1/2} \\ & = \sigma_{s,i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^j + Q_{i+1/2} h_{i+1/2} \end{aligned} \tag{8}$$

이고 식(6)을 또 다시 구간 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m (\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2} - \psi_{m,i-1/2}^{j+1/2}) + \sigma_i h_i \psi_{m,i}^{j+1/2} = \sigma_{s,i} h_i \phi_i^j + Q_i h_i \tag{9}$$

이다. 여기서,

$$\begin{aligned} h_{i+1/2} &= \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad \sigma_{i+1/2} = \frac{\sigma_i h_i + \sigma_{i+1} h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \\ Q_{i+1/2} &= \frac{Q_i h_i + Q_{i+1} h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \end{aligned} \tag{10}$$

이다. 식(9)를 $\psi_{m,i}^{j+1/2}$ 에 대해 풀어 격자 중앙에서의 SAAF 수송 방정식(cell-center SAAF transport equation)

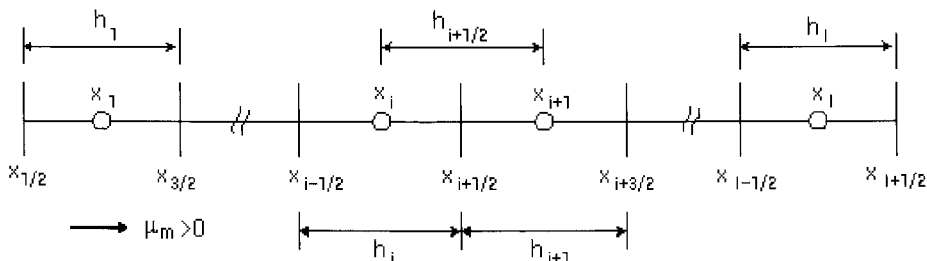


Figure 1. Cell Structure

$$\psi_{m,i}^{j+1/2} = -\frac{\mu_m}{\sigma_i h_i} (\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2} - \psi_{m,i-1/2}^{j+1/2}) + \frac{1}{\sigma_i} (\sigma_{s,i} \phi_i^j + Q_i) \quad (11)$$

을 구하고, 식(11)을 식(8)의 $\psi_{m,i}^{j+1/2}$, $\psi_{m,i+1}^{j+1/2}$ 에 대입하여 격자 모서리에서의 SAAF 수송 방정식(cell-vertex SAAF transport equation)

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_m^2}{\sigma_{i+1} h_{i+1}} (\psi_{m,i+3/2}^{j+1/2} - \psi_{m,i+1/2}^{j+1/2}) \\ & + \frac{\mu_m^2}{\sigma_i h_i} (\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2} - \psi_{m,i-1/2}^{j+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \psi_{m,i+1/2}^{j+1/2} \\ & = \sigma_{s,i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^j + Q_{i+1/2} h_{i+1/2} \\ & - \mu_m \left(\frac{\sigma_{s,i+1} \phi_{i+1}^j + Q_{i+1}}{\sigma_{i+1}} - \frac{\sigma_{s,i} \phi_i^j + Q_i}{\sigma_i} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

을 유도한다. 식(12)를 살펴보면 좌변에 위치하고 격자 모서리에서 정의되는 세 개의 방향 중성자속 $\psi_{m,i+3/2}^{j+1/2}$, $\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2}$, $\psi_{m,i-1/2}^{j+1/2}$ 이 미지함수이고 이들의 관계가 식의 우변에 위치하는 격자의 모서리와 중앙에서의 미지 중성자속 $\phi_{i+1/2}$, ϕ_i , ϕ_{i+1} 로 나타남을 알 수 있다. 따라서 격자 중앙에서의 중성자속 ϕ_i 와 ϕ_{i+1} 의 계산을 위해서는 식(11)의 양변을 적분하는 절차도 필요하다.

왼쪽 경계에서의 차분식을 유도하기 위해서 왼쪽 경계에서의 방향 중성자속을 $\psi_{m,L}$ 이라 하고 먼저 식(6)을 구간 $[x_{1/2}, x_1]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m (\psi_{m,1}^{j+1/2} - \psi_{m,L}^{j+1/2}) + \sigma_{1/2} h_{1/2} \psi_{m,1/2}^{j+1/2} = \sigma_{s,1/2} h_{1/2} \phi_{1/2}^j + Q_{1/2} h_{1/2} \quad (13)$$

이 되고, 식(11)을 $i = 1$ 에 대하여 적용한 식

$$\psi_{m,1}^{j+1/2} = -\frac{\mu_m}{\sigma_1 h_1} (\psi_{m,3/2}^{j+1/2} - \psi_{m,1/2}^{j+1/2}) + \frac{1}{\sigma_1} (\sigma_{s,1} \phi_1^j + Q_1) \quad (14)$$

를 식(13)에 대입하면 왼쪽 경계에 대한 SAAF 차분식

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_m^2}{\sigma_1 h_1} (\psi_{m,3/2}^{j+1/2} - \psi_{m,1/2}^{j+1/2}) + \sigma_{1/2} h_{1/2} \psi_{m,1/2}^{j+1/2} - \mu_m \psi_{m,L} \\ & = \sigma_{s,1/2} h_{1/2} \phi_{1/2}^j + Q_{1/2} h_{1/2} - \mu_m \left(\frac{\sigma_{s,1} \phi_1^j + Q_1}{\sigma_1} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

을 구한다. 여기서 $\psi_{m,L}$ 은 방향에 따라 달라지는데 $\mu_m > 0$ 인 경우는 $\psi_{m,L} = f_{m,L}$ 로 왼쪽 경계에서 유입되

는 값을 사용하며, $\mu_m < 0$ 인 경우는 $\psi_{m,L} = \psi_{m,1/2}$ 로 구해야 할 미지값이다. 한편, $f_{m,L}$ 은 기지유입조건인 경우는 주어진 유입값을 그대로 사용하고 반사조건인 경우는 이미 계산된 반사 방향 $m' (= M - m + 1)$ 의 방향 중성자속 $\psi_{m',1/2}$ 을 사용해야 한다.

마찬가지로 오른쪽 경계에서의 방향 중성자속을 $\psi_{m,R}$ 로 놓으면 오른쪽 경계에서의 SAAF 차분식

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_m^2}{\sigma_I h_I} (\psi_{m,I+1/2}^{j+1/2} - \psi_{m,I-1/2}^{j+1/2}) + \sigma_{I+1/2} h_{I+1/2} \psi_{m,I+1/2}^{j+1/2} + \mu_m \psi_{m,R} \\ & = \sigma_{s,I+1/2} h_{I+1/2} \phi_{I+1/2}^j + Q_{I+1/2} h_{I+1/2} + \mu_m \left(\frac{\sigma_{s,I} \phi_I^j + Q_I}{\sigma_I} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

을 구할 수 있다. 여기서도 $\psi_{m,R}$ 은 방향에 따라 달라지는데 $\mu_m < 0$ 인 경우는 $\psi_{m,R} = f_{m,R}$ 로 오른쪽 경계에서 유입되는 값을 사용하며, $\mu_m > 0$ 인 경우는 $\psi_{m,R} = \psi_{m,I+1/2}$ 로 구해야 할 미지값이다. 마찬가지로, $f_{m,R}$ 은 기지유입 조건인 경우는 경계조건으로 주어진 유입값을 그대로 사용하고 반사조건인 경우는 이미 계산된 반사 방향의 방향 중성자속 $\psi_{m',I+1/2}$ 을 사용해야 한다.

식(11)과 식(12)를 이용하여 전체 차분 방향 $m = 1, 2, \dots, M$ 에 대해 격자 중앙과 격자 모서리에서 방향 중성자속 $\psi_{m,i}^{j+1/2}$ 과 $\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2}$ 이 계산되면 식(7)의 차분형태인

$$\phi_i^{j+1/2} = \sum_{m=1}^M \omega_m \psi_{m,i}^{j+1/2} \quad (17)$$

과

$$\phi_{i+1/2}^{j+1/2} = \sum_{m=1}^M \omega_m \psi_{m,i+1/2}^{j+1/2} \quad (18)$$

에 의해 격자 중앙과 격자 모서리에서의 중성자속을 계산하고 이 계산 결과는 다시 식(11)과 식(12)의 우변에 사용되어 지속적인 반복계산이 이루어진다. 이러한 반복 계산은 각 격자점에서 중성자속이 수렴할 때까지 계속된다.

여기서 계산 과정을 잠시 돌이켜 보자. 먼저 식(12)에 의하여 격자 모서리의 방향 중성자속 $\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2}$ 을 계산해야 하는데 이 단계에서는 식(12)가 음함수 형태(implicit form)의 2계 차분식이므로 $(I+1) \times (I+1)$ 크기의 행렬 계산이 요구된다. 다음에는 계산된 $\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2}$ 을 이용하여 식(11)로 격자 중앙의 방향 중성자속 $\psi_{m,i}^{j+1/2}$ 을 계산한다. 하지만 식(11)은 양함수 형태(explicit form)로 행렬계산 없이 우변의 간단한 대수적 연산으로 격자 중앙의 방향 중성자속이 곧바로 결정된다.

이를 정리하면 우성 수송해법에서는 $(I+1) \times (I+1)$ 크기의 행렬 계산으로 격자 모서리의 방향 중성자속을

생산하고, 기성 수송해법에서는 $I \times I$ 크기의 행렬 계산으로 격자 중앙의 방향 중성자속을 생산하는 반면에 SAAF 수송해법에서는 $(I+1) \times (I+1)$ 크기의 행렬 계산 한 번으로 격자 모서리와 격자 중앙의 방향 중성자속 모두를 계산할 수 있으므로 이론적으로 거의 동일한 계산량으로 두 배의 계산결과를 생산하는 효율성을 갖게 되며 이는 다차원 문제에서 더욱 크게 나타나게 된다.

4. SAAF 확산 가속법

중성자 수송 해법에 있어 식(17)과 식(18)을 사용하여 각 격자점에서 중성자속을 구하는 중성자원 가속법(SI : Source Iteration)은 중성자속의 수렴성을 확보하는데 다수의 반복 계산이 요구되어 계산 효율성이 매우 떨어지며 특히 산란성이 강한 매질에서는 더욱 그러하다. 이를 극복하기 위해 기존의 1계 중성자 수송 방정식의 계산 효율성 높이기 위한 확산 가속법(DSA: Diffusion Synthetic Acceleration)에 대해서는 Larsen⁽⁸⁾ 등의 많은 연구 결과가 있으나 SAAF 중성자 수송 방정식에 대한 확산 가속법은 아직 학계에 발표되지 않았다. 본 연구를 통해 처음으로 개발된 SAAF 수송 방정식에 대한 확산 가속법에 대하여 설명하겠다.

식(17)과 식(18)을 대체하여 중성자속 계산의 수렴성을 증가시킬 수 있는 확산 가속식을 유도하기 위해 먼저 방향 중성자속을 $\psi_m^{i+1/2} = \phi^{i+1/2} + 3\mu_m J^{i+1/2}$ 와 같이 P_1 -근사⁽¹⁾하고 이를 식(12)에 대입한 후 방향에 대해 적분하여($\sum_{m=1}^M \omega_m :$)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}(\phi_{i+3/2}^{i+1/2} - \phi_{i+1/2}^{i+1/2}) \\
 & + \frac{1}{3\sigma_i h_i}(\phi_{i+1/2}^{i+1/2} - \phi_{i-1/2}^{i+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^{i+1/2} \\
 & = \sigma_{s,i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^i + Q_{i+1/2} h_{i+1/2}
 \end{aligned} \tag{19}$$

을 얻는다. 여기서, $\sum_{m=1}^M \omega_m = 1$, $\sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m = 0$, $\sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m^2 = 1/3$ 이다. $\sigma_a (= \sigma - \sigma_s)$ 가 저시흡수단면적(macroscopic absorption cross section)일 때, 식(19)에 대응하는 확산 방정식(diffusion equation)을

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}(\phi_{i+3/2}^{i+1} - \phi_{i+1/2}^{i+1}) + \frac{1}{3\sigma_i h_i}(\phi_{i+1/2}^{i+1} - \phi_{i-1/2}^{i+1}) \\
 & + \sigma_{a,i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^{i+1} = Q_{i+1/2} h_{i+1/2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

로 정의하고, 식(20)에서 식(19)를 빼면 격자 모서리에서의 SAAF 확산 가속식

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}(\epsilon_{i+3/2}^{i+1} - \epsilon_{i+1/2}^{i+1}) + \frac{1}{3\sigma_i h_i}(\epsilon_{i+1/2}^{i+1} - \epsilon_{i-1/2}^{i+1}) \\
 & + \sigma_{a,i+1/2} h_{i+1/2} \epsilon_{i+1/2}^{i+1} \\
 & = \sigma_{s,i+1/2} h_{i+1/2} (\phi_{i+1/2}^{i+1/2} - \phi_{i+1/2}^i)
 \end{aligned} \tag{21}$$

을 얻는다. 여기서, $\epsilon_{i+1/2}^{i+1}$ ($i=0,1,\dots,I$)은 $l+1$ 반복계산 단계의 격자 모서리에서의 중성자속 오차

$$\epsilon_{i+1/2}^{i+1} = \phi_{i+1/2}^{i+1} - \phi_{i+1/2}^{i+1/2} \tag{22}$$

이고, $l+1/2$ 단계의 중성자속은 정의에 의해 격자 i 와 $i+1/2$ 에 대해

$$\phi^{i+1/2} = \sum_{m=1}^M \omega_m \psi_m^{i+1/2} \tag{23}$$

로 계산한다. 양쪽 경계에 대해서도 식(21)과 같은 확산 가속식이 필요하다. SAAF 수송 방정식의 경계식인 식(15)와 식(16)에 대하여 유사한 방법을 적용하면 왼쪽 경계와 오른쪽 경계에서의 확산 가속식은 각각

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_1 h_1}(\epsilon_{3/2}^{i+1} - \epsilon_{1/2}^{i+1}) + \sigma_{a,1/2} h_{1/2} \epsilon_{1/2}^{i+1} + \alpha_v \epsilon_{1/2}^{i+1} \\
 & = \sigma_{s,1/2} h_{1/2} (\phi_{1/2}^{i+1/2} - \phi_{1/2}^i)
 \end{aligned} \tag{24}$$

과

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3\sigma_I h_I}(\epsilon_{I+1/2}^{i+1} - \epsilon_{I-1/2}^{i+1}) + \sigma_{a,I+1/2} h_{I+1/2} \epsilon_{I+1/2}^{i+1} + \alpha_v \epsilon_{I+1/2}^{i+1} \\
 & = \sigma_{s,I+1/2} h_{I+1/2} (\phi_{I+1/2}^{i+1/2} - \phi_{I+1/2}^i)
 \end{aligned} \tag{25}$$

이 된다. 여기서, $m=1,2,\dots,M/2$ 을 양의 방향, $m=M/2+1,\dots,M$ 을 음의 방향이라 할 때, 경계조건이 기지유입 조건이면 $\alpha_v = \sum_{m=1}^{M/2} \omega_m \mu_m$ 이고, 반사조건이면 $\alpha_v = 0$ 이다.

격자 중앙의 중성자속 ϕ_{i+1}^i , ϕ_i^i 가 식(12)의 좌변에 위치하므로 SAAF 수송 방정식을 제대로 풀기 위해서는 격자 중앙에서의 확산 가속도 요구되는데, 식(11)로 나타나는 격자 중앙의 SAAF 수송 방정식 자체로 격자 중앙에서의 2계 확산 근사식을 유도하는 것은 불가능하다. 따라서, 노⁽⁴⁾에서 기성 수송 방정식에 대해 소개한 바와 같이 격자 중앙에서 정의되는 방향 중성자속을 미지수로 갖는 또 다른 수송 방정식을 먼저 유도해야 한다. 즉, 식

(8)과 식(9)로부터 격자 모서리에 대한 SAAF 차분식을 유도할 때와 달리 격자 중앙에 대한 2계 차분식을 먼저 유도하고, 이를 이용해 해당 확산 가속식을 구하여야 한다. 이를 구체적으로 설명하면 다음과 같다.

식(8)을 $\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2}$ 에 대해 풀고, 이를 식(9)에 대입하면 격자 중앙에서 정의되는 2계 차분식

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu_m^2}{\sigma_{i+1/2}h_{i+1/2}}(\psi_{m,i+1}^{j+1/2} - \psi_{m,i}^{j+1/2}) \\
 & + \frac{\mu_m^2}{\sigma_{i-1/2}h_{i-1/2}}(\psi_{m,i}^{j+1/2} - \psi_{m,i-1}^{j+1/2}) + \sigma_i h_i \psi_{m,i}^{j+1/2} \\
 & = \sigma_{s,i} h_i \phi_i^j + Q_i h_i \\
 & - \mu_m \left(\frac{\sigma_{s,i+1/2} \phi_{i+1/2}^j + Q_{i+1/2}}{\sigma_{i+1/2}} - \frac{\sigma_{s,i-1/2} \phi_{i-1/2}^j + Q_{i-1/2}}{\sigma_{i-1/2}} \right) \quad (26)
 \end{aligned}$$

을 얻는다. 확산 가속식을 구하기 위해 마찬가지로 $\psi_{m,i}^{j+1/2} = \phi_i^{j+1/2} + 3\mu_m J^{j+1/2}$ 로 P_1 -근사하고 식(26)을 방향에 대해 적분하면

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_{i+1/2}h_{i+1/2}}(\phi_{i+1}^{j+1/2} - \phi_i^{j+1/2}) \\
 & + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2}h_{i-1/2}}(\phi_i^{j+1/2} - \phi_{i-1}^{j+1/2}) \\
 & + \sigma_i h_i \phi_i^{j+1/2} = \sigma_{s,i} h_i \phi_i^j + Q_i h_i \quad (27)
 \end{aligned}$$

이다. 식(27)에 대응하는 확산 방정식을

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_{i+1/2}h_{i+1/2}}(\phi_{i+1}^{j+1} - \phi_i^{j+1}) \\
 & + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2}h_{i-1/2}}(\phi_i^{j+1} - \phi_{i-1}^{j+1}) + \sigma_{a,i} h_i \phi_i^{j+1} = Q_i h_i \quad (28)
 \end{aligned}$$

로 정의하고, 식(28)에서 식(27)을 빼면 격자 중앙에서의 SAAF 확산 가속식

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_{i+1/2}h_{i+1/2}}(\epsilon_{i+1}^{j+1} - \epsilon_i^{j+1}) \\
 & + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2}h_{i-1/2}}(\epsilon_i^{j+1} - \epsilon_{i-1}^{j+1}) + \sigma_{a,i} h_i \epsilon_i^{j+1} \\
 & = \sigma_{s,i} h_i (\phi_i^{j+1/2} - \phi_i^j) \quad (29)
 \end{aligned}$$

을 얻는다. 유사한 방법으로 왼쪽 경계와 오른쪽 경계에서의 확산 가속식은 각각

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3\sigma_{3/2}h_{3/2}}(\epsilon_2^{j+1} - \epsilon_1^{j+1}) + \sigma_{a,1} h_1 \epsilon_1^{j+1} + \alpha_{c,L} \epsilon_1^{j+1} \\
 & = \sigma_{s,1} h_1 (\phi_1^{j+1/2} - \phi_1^j) \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3\sigma_{I-1/2}h_{I-1/2}}(\epsilon_I^{j+1} - \epsilon_{I-1}^{j+1}) + \sigma_{a,I} h_I \epsilon_I^{j+1} \\
 & + \alpha_{c,R} \epsilon_I^{j+1} = \sigma_{s,I} h_I (\phi_I^{j+1/2} - \phi_I^j) \quad (31)
 \end{aligned}$$

이다.

여기서 $\alpha_{c,L} = \sum_{m=1}^M \frac{\omega_m \mu_m^2 f_{m,L}}{\mu_m + \sigma_1 h_1/2}$, $\alpha_{c,R} = \sum_{m=1}^M \frac{\omega_m \mu_m^2 f_{m,R}}{\mu_m + \sigma_I h_I/2}$

이고, ϵ_i^{j+1} 은 $l+1$ 반복계산 단계에서 격자 중앙에서의 중성자속 오차

$$\epsilon_i^{j+1} = \phi_i^{j+1} - \phi_i^{j+1/2} \quad (32)$$

이다. 결과적으로 확산 가속법이 포함된 SAAF 수송 방정식의 계산 절차는 다음과 같다.

- (i) 각 차분방향에 대해 격자 모서리에서의 SAAF 수송 방정식[식(12), (15), (16)]을 풀어 $\psi_{m,i+1/2}^{j+1/2}$ ($i=0,1,\dots,I$)을 계산한다.
- (ii) 각 차분방향에 대해 격자 중앙에서의 SAAF 수송 방정식[식(11)]을 풀어 $\psi_{m,i}^{j+1/2}$ ($i=1,2,\dots,I$)을 계산한다.
- (iii) 식(23)을 사용하여 격자 중앙과 모서리에서 중성자속 $\phi_i^{j+1/2}$ 을 계산한다.
- (iv) 격자 모서리에 대한 확산 가속식[식(21),(24),(25)]을 풀어 $\epsilon_{i+1/2}^{j+1}$ 를 계산한다.
- (v) 격자 중앙에 대한 확산 가속식[식(29),(30),(31)]을 풀어 ϵ_i^{j+1} 를 계산한다.
- (vi) 식(22)와 식(32)를 사용하여 격자 중앙과 모서리에서 ϕ_i^{j+1} 의 값을 개선한다.
- (vii) ϕ 의 값이 수렴할 때까지 (i)-(vi) 단계를 반복한다.

물론 우성 또는 기성 수송해법에서는 각 반복계산 단계에서 한 개의 확산 가속식을 푸는데 반해 SAAF 수송해법에서는 격자 중앙과 모서리에 대해 두 개의 다른 확산 가속식[식(21)과 식(29)]을 풀어야 한다. 하지만 이러한 가속식들은 이미 방향변수가 제거된 것으로 각 차분방향에 대해 매번 계산할 필요가 없다. 중성자 수송계산에서 대부분의 계산 시간이 각 차분방향에 대한 방향 중성자속 계산에 소요된다는 점을 감안할 때 추가된 하나의 가속식 계산에 소요되는 계산량의 증가는 전체적으로 크지 않다.

5. 수치계산 결과

앞에서 언급한 SAAF 수송계산 모형을 해당 확산 가속법과 함께 프로그램화 하여 실제 수치 문제에 적용하고 그 계산 결과를 확인하였다. 대상 문제는 노⁽⁴⁾, Morel과 McGhee⁽⁵⁾에 소개된 것으로 전체 길이가 1cm이고 $\sigma = 2\text{cm}^{-1}$, $\sigma_s = 1\text{cm}^{-1}$, $Q = 1\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$ 이며, 왼쪽과 오른쪽이 모두 진공조건을 갖는 1차원 등방성 산란, 균질매질 문제이다. 여기에서는 본문에서 보인 SAAF 수송 방정식의 경계조건으로 기지유입조건식과 반사조건식을 검증하기 위하여 $x = 0.5\text{cm}$ 지점에 반사조건을 두어 문제의 영역을 반으로 줄여 계산하였다. 격자 간격은 0.05cm를 사용하였고 S_2 방향차분 계산을 수행하였는데 S_2 계산의 경우는 방향차분 수송방정식이 Mark 경계조건을 갖는 P_l 방정식과 같게 되고 이 경우에는 중성자속에 대한 해석해가 존재하며 이는 Morel과 McGhee⁽⁵⁾에서

$$\phi(x) = 1 - \frac{\exp[\sqrt{6}(1-x)] + \exp[\sqrt{6}x]}{1 - 1/\sqrt{2} + (1 + 1/\sqrt{2})\exp[\sqrt{6}]} \quad (33)$$

로 소개된 바 있다. 계산된 SAAF 수송 방정식의 해를 기존의 우성(EP) 및 기성(OP) 수송 방정식을 사용하여 구한 해, 식(33)으로 계산된 해석해(analytic solution)와 함께 Figure 2와 Table 1에 나타내었다.

본문에서 언급한 바와 같이 SAAF에서는 한 번의 계산으로 격자 모서리의 중성자속(SAAF-V)과 격자 중앙의 중성자속(SAAF-C)을 모두 생산하며 SAAF-V는 기존의 우성 수송해법의 결과(EP)와 같고 SAAF-C는 기존의 기성 수송해법의 결과(OP)와 동일함을 확인할 수 있다. 전 영역에 걸친 해의 정확도를 검증하기 위하여 매질 전체에서의 중성자 흡수율(absorption rate, $\int_0^{0.5} \sigma_a \phi dx$)을 해석해를 기준으로 비교하였다. EP의 경우는 격자 모

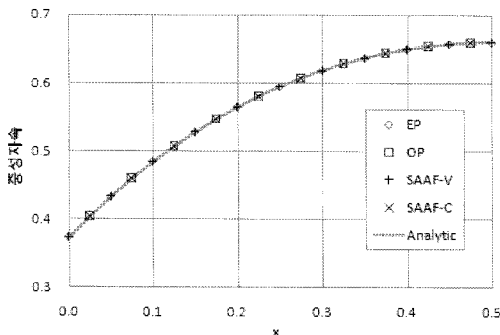


Figure 2. Scalar Flux Distribution by EP, OP and SAAF

서리의 중성자속을, OP의 경우는 격자 중앙의 중성자속을 이용하였으며 SAAF의 경우는 격자 모서리와 중앙의 중성자속을 모두 사용하여 그 값을 Table 1에 나타내었다. 이론적으로 예상한 바와 같이 SAAF의 결과로 계산된 중성자 흡수율이 해석해로 계산한 값에 가장 근접함을 알 수 있다. SAAF를 포함한 모든 수송해의 S_2 계산에서 확산 가속법을 사용하지 않은 경우(SI)에는 반복회수가 공히 13회인 반면에 확산 가속법을 사용한 경우(DSA)의 반복회수는 1회로 나타나 개발된 확산 가속법이 올바르게 수행됨을 보인다.

본 연구는 1차원 수송해법에 국한된 것으로 방향 중성자속 또는 중성자속 계산을 위한 행렬의 형태가 단순한

Table 1. Comparisons of Scalar Fluxes, Absorption Rates and Number of DSA by EP, OP and SAAF

x	EP	OP	SAAF		Analytic
			V	C	
0.000	0.3733		0.3733		0.3729
0.025		0.4047		0.4047	0.4041
0.050	0.4333		0.4333		0.4330
0.075		0.4603		0.4603	0.4598
0.100	0.4847		0.4847		0.4845
0.125		0.5077		0.5077	0.5073
0.150	0.5284		0.5284		0.5283
0.175		0.5478		0.5478	0.5475
0.200	0.5651		0.5651		0.5650
0.225		0.5811		0.5811	0.5809
0.250	0.5952		0.5952		0.5952
0.275		0.6082		0.6082	0.6079
0.300	0.6193		0.6193		0.6193
0.325		0.6293		0.6293	0.6291
0.350	0.6376		0.6376		0.6376
0.375		0.6449		0.6449	0.6448
0.400	0.6505		0.6505		0.6506
0.425		0.6552		0.6552	0.6550
0.450	0.6582		0.6582		0.6582
0.475		0.6603		0.6603	0.6601
0.500	0.6608		0.6608		0.6608
Absorption Rate	0.2845	0.2850	0.2847		0.2846
Relative Error	0.05%	0.12%	0.03%		
No. of SI	13	13	13		N/A
No. of DSA	1	1	1		

3-대각행렬이 되어 직접 계산법(반복계산이 불필요한)을 이용하므로 행렬 계산을 위한 계산량이 크게 요구되지 않고 실제 계산시간은 프로그램의 출력문, 조건문에 매우 민감하게 나타난다. 따라서, 우성 및 기성 수송해법에 비해 동일한 행렬 계산수로 약 두 배의 미지수 값을 생산하는 SAAF 수송해법에 대한 직접적인 계산 시간의 비교는 생성되는 행렬의 형태가 복잡하여 행렬 계산량이 크게 영향을 미치게 되는 다차원 문제에서 다루어야 할 것이다. 따라서, 본 연구에서는 SAAF의 계산 효율성에 대해 이론적으로만 설명하고 수치적인 직접비교는 추후 다차원 문제에서 수행하고자 한다.

6. 논 의

과거에는 2계 자기 수반형 중성자 수송 방정식에 대한 연구가 주로 우성 수송 방정식에 의존되어 왔다. 기성 수송 방정식의 경우 계산된 기성 방향 중성자속을 이용하여 중성자속을 계산하는 과정이 복잡하고 이로 인해 적절한 확산 가속법 채택에 어려움이 있었기 때문이다. 본 논문의 식(12)는 기존의 우성 수송 방정식의 격자 모서리에서의 차분식과 형태가 동일하며 식(26)은 기존의 기성 수송 방정식의 격자 중앙에서의 차분식과 형태가 동일하다.⁽⁴⁾ 본 SAAF 수송 해법 연구를 통해 격자 중앙에서의 SAAF 확산 가속법이 결국 기성 수송 방정식의 확산 가속 문제와 일치함을 보임으로써 기성 수송 방정식의 확산 가속 문제가 해결되었고 SAAF 수송 해법이 우성 또는 기성 수송 해법에 비하여 거의 동일한 계산 시간으로 위치 변수에 대해 두 배나 많은 수치 결과를 생산함을 이론적, 수치적으로 보임으로써 기존의 우성 및 기성 수송 방정식의 유용성은 사라진다고 보아도 무방할 것이다. SAAF 수송 방정식이 제안된 이후로 기존의 우성 및 기성 수송 방정식과의 관련성과 그 응용에 대한 관심이 높았는데, SAAF 수송 방정식에 대한 해법을 명확히 한 본 연구는 앞으로의 SAAF 관련 연구에 기초가 될 것이며, 복사수송(radiative transfer) 계산⁽⁹⁾ 등에 응용 가능성이 매우 높다.

감사의 글

본 연구는 2006년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. E. E. Lewis and W. F. Miller, Jr., *Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley & Sons (1984).
2. M. L. Adams, "Even- and Odd-Parity Finite Element Transport Solutions in the Thick Diffusion Limit", *Proc. Int. Topl. Mtg.*, Pittsburgh, Pennsylvania, Vol. 5, ANS (1991).
3. Taewan Noh, W. F. Miller, Jr, and J. E. Morel, "The Even-Parity and Simplified Even-Parity Transport Equations in Two-Dimensional x-y Geometry", *Nucl. Sci. & Eng.*, **123** (1996).
4. 노태완, "우성 및 기성 중성자 수송 방정식의 차분법 (Differencing Methods for the Even- and Odd-Parity Neutron Transport Equations)", 2002 한국원자력학회 추계학술발표논문집, 용평리조트 (2002).
5. J. E. Morel and J. M. McGhee, "A Self-Adjoint Angular Flux Equation", *Nucl. Sci. & Eng.*, **132** (1999).
6. C. J. Gesh, M. L. Adams, "Finite Element Solutions of Second-Order Forms of the Transport Equation at the Interface between Diffusive and Non-Diffusive regions", *Proceedings of ANS meeting*, Salt Lake City, Utah (2001).
7. Private Communications with J. E. Morel, et. al. at Los Alamos National Lab. (2003).
8. E. W. Larsen, "Unconditionally Stable Diffusion Synthetic Acceleration Methods for the Slab Geometry Discrete Ordinates Equations. Part 1 : Theory", *Nucl. Sci. & Eng.*, **82** (1982).
9. J. E. Morel, B. T. Adams, Taewan Noh, et. al., "Spatial Discretizations for self-adjoint forms of the Radiative Transfer Equations", *J. of Comp. Phy.* **214** (2006).