

월쉬 단일항 전개를 이용한 비선형 확률 시스템의 상태 추정

論 文
57P-2-9

States Estimation of Nonlinear Stochastic System Using Single Term Walsh Series

林潤植[†]
(Yun-Sik Lim)

Abstract -The EKF(Extended Kalman filter) method which is the state estimation algorithm of nonlinear stochastic system depends on the initial error and the estimated states. Therefore, the divergence of the estimated state can be caused if the initial values of the estimated states are not chosen as approximate real state values. In this paper, the demerit of the existing EKF method is improved using the EKF algorithm transformed by STWS(Single Term Walsh Series). This method linearizes each sampling interval of continuous-time system through the derivation of an algebraic iterative equation without discretizing continuous system by the characteristic of STWS, the convergence of the estimated states can be improved. The validity of the proposed method is checked through comparison with the existing EKF method in simulation.

Key Words : STWS(Single Term Walsh Series), EKF(Extended Kalman Filter), Nonlinear Stochastic State Estimation

1. 서 론

제어기 설계시 제어기의 고유한 강인 특성을 인정하는 확정계에서의 설계가 대부분이나, 실제로는 플랜트 잡음이나 관측 잡음에 의한 시스템의 변동을 고려해야 한다. 플랜트 잡음이나 관측 잡음에 왜곡된 비선형 확률 시스템을 제어하기 위해서는 먼저 그 시스템의 상태를 정확히 알아야 하는데 확률계에서는 모든 상태를 정확히 알 수 없으므로 상태를 추정할 수밖에 없다. 이를 위해 주로 사용되는 방법으로는 LKF(Linearized Kalman Filter)와 EKF(Extended Kalman Filter)가 있으며 주로 EKF를 적용하고 있다. LKF는 선형화 과정에서 공칭계적에 의해 칼만계인 값을 미리 구할 수 있으나 실 상태와 공칭상태의 오차와 실 상태와 추정상태 사이의 오차가 포함되므로 테일러 급수 전개시 고차항의 영향이 커져 이를 무시 할 수 없다. 그러나 EKF는 추정 상태에 의해 칼만계인 값을 구함으로써 추정 상태와 실 상태 사이의 오차만 존재하여 LKF의 오차보다는 작기 때문이다. EKF는 항해(navigation), 유도(guidance), 레이더 추적(radar tracking)등 다양한 분야에 적용되고 있다. EKF는 이산계로 표현되어 디지털 컴퓨터의 적용이 매우 용이한 알고리즘이지만 비선형계의 선형화 과정에서 추정된 상태를 기준으로 미소 구간 선형화하기 때문에 초기 오차와 추정 상태에 크게 의존하는 단점이 있어 초기 오차가 큰 경우 추정된 상태가 발산하는 경우가 생기게 된다. 이와 같은 계산상의 문제를 개

선하기 위해 수정된 알고리즘들이 제시되고 있다. RF(square root filter)[1], MGEKF(modified gain extended Kalman filter)[2] 그리고 Chandrasekhar form[3] 등이 개선된 알고리즘들이다. 본 연구에서는 비선형 확률 시스템을 월쉬 단일항 전개(이하 STWS)를 이용하여 선형화 하는 방법을 이용하였다. 적응형 해석 방법을 구현하기 위해선 반복 연산이 요구되고 이 반복 연산은 대수적 처리가 가능해야하므로 STWS를 이용하면 미분 방정식으로 표현되는 시스템을 대수 방정식으로 변환하여 처리할 수 있어 적응형 해석 방법을 적용하는데 매우 용이하기 때문이다. 이 방법은 STWS의 특성에 의해 연속계 시스템을 이산화시키지 않고 대수 반복식을 유도하여 구간에서 연속인 해[4]를 얻을 수 있어 선형화 과정이 간단하고 전 단계에서 구한 상태가 다음 구간의 초기 상태로 이용될 때 이 값은 STWS의 계수 값인 구간에서 평균인 값이라 임의의 미소 구간에서 비선형성이 크더라도 어느 정도 강인성이 있어 선형화 과정에서 선형화 오차의 누적을 줄여 수렴성을 높일 수 있어 기존의 EKF 보다는 덜 민감하다. 또한 샘플링 구간에서 연속이므로 연속계를 이산계와 같이 연산할 수 있어 디지털 컴퓨터 연산에 직접 적용할 수 있는 방정식을 유도함으로써 계산을 보다 간단하게 할 수 있는 장점이 있다[5].

2. STWS를 이용한 적응형 선형화 과정

STWS의 이론은 월쉬 유한급수 전개시 정의구간 $t \in [0, 1)$ 에서 m 항의 월쉬 함수를 이용한 결과는 m 개의 부분적으로 연속인 이산값으로 나타나므로 이들 값은 각 세부구간에 대해 기저가 "1"인 값들로 구성된 월쉬 함수의 첫 번째 항만을 이용하여 연속적으로 m 번의 수행에 의해 얻어진 결과와 같다는 논리이다[6].

일반적인 비선형시스템은 다음과 같이 표현된다.

[†] 교신저자, 正會員 : 驪州大學 放送映像製作科 教授 · 工博

E-mail: elecys@hanmail.net

接受日字 : 2008年 4月 18日

最終完了 : 2008年 5月 13日

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1b)$$

R^n 차의 비선형 동적 시스템인 식(2.1a)을 Pearson이 제시한 방법에 따라 표현하면 다음과 같다[7].

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{x}(t) \quad (2.2)$$

식(2.2)의 비선형 시스템에 m 항 전개한 STWS를 이용하여 해를 구하기 위해 먼저 $t = \frac{t_f}{m}\tau$ 와 같이 시간에 대한 크기 조절

후 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x}(\tau) = \frac{t_f}{m}\mathbf{A}(\mathbf{x}(\tau), \tau)\mathbf{x}(\tau) \quad (2.3)$$

식(2.3)이 상태벡터 $\mathbf{x}(\tau)$ 의 함수가 아니라고 가정하면 선형 시변계의 형태로 처리된다. 식(2.1)의 비선형 시스템을 선형 시변계로 처리하기 위한 가정을 성립시키기 위해 다음과 같은 적응형 접근 방법을 적용한다[8]. 현시점 t_i 에서 \mathbf{A} 에 포함된 상태 벡터를 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(i-1)$ 인 일정한 상수 값으로 가정하면 식(2.3)은 선형계로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x}(\tau) = \Delta t \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, \tau)\mathbf{x}(\tau) \quad (2.4)$$

단, $i = 1, 2, 3, \dots, m$

여기서 $\tau \in [0, 1)$ 구간 즉, $t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 구간이며, $\Delta t = t_f/m$ 이다.

임의의 미소 구간 $t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 에서 $\frac{d}{d\tau}\mathbf{x}(\tau), \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, \tau)$,

$\mathbf{x}(\tau)$ 를 각각 STWS에 의해 급수 전개하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{S}_i \omega_0(\tau) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_i, \tau) = \mathbf{A}_i \omega_0(\tau) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{X}_i \omega_0(\tau) \quad (2.7)$$

여기서 $\mathbf{S}_i, \mathbf{A}_i, \mathbf{X}_i$ 은 STWS의 계수 행렬이고, $\omega_0(\tau)$ 는 윌쉬 함수의 첫째 항을 의미한다. 현시점 t_i 즉 i 번째 구간에서 식(2.5)의 양변에 적분을 취하고 적분연산자[4]를 도입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{X}_i \omega_0(\tau) - \mathbf{x}(i-1) \omega_0(\tau) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_i \omega_0(\tau) \quad (2.8)$$

위 식의 양변에 $\omega_0^T(\tau)$ 를 곱하면 $\omega_0(\tau) \times \omega_0^T(\tau) = 1$ 이 되어 i 번째 구간에서 연속인 함수 $\mathbf{x}(\tau)$ 의 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{X}_i = \frac{1}{2} \mathbf{S}_i + \mathbf{x}(i-1) \quad (2.9)$$

$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x}(\tau)$ 의 STWS의 계수인 \mathbf{S}_i 는 $\tau \in [0, 1)$ 구간에서 다음과

같고

$$\mathbf{S}_i = \int_0^1 \frac{d}{d\tau}\mathbf{x}(\tau) \omega_0(\tau) d\tau = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) dt$$

$$= \mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(i-1) \quad (2.10)$$

따라서 $\mathbf{x}(i) = \mathbf{S}_i + \mathbf{x}(i-1)$ 의 관계가 성립한다.

이제 식(2.4)에 식(2.5),(2.6),(2.7)을 대입하고 양변에 $\omega_0^T(\tau)$ 를 곱하여 정리하면 $\omega_0(\tau)$ 는 기저가 '1'인 값으로 구성되므로 그 곱은 '1'의 값이 되므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{S}_i = \Delta t \mathbf{A}_i \mathbf{X}_i \quad (2.11)$$

식(2.11)에 식(2.9)을 대입하여 정리하면

$$\mathbf{S}_i = [\mathbf{I}_{n \times n} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}_i]^{-1} [\Delta t \mathbf{A}_i \mathbf{x}(i-1)] \quad (2.12)$$

와 같이 된다. (단, $\mathbf{I}_{n \times n}$ 는 단위행렬)

식(2.5)과 식(2.7)에서 \mathbf{S}_i 와 \mathbf{X}_i 는 $\tau \in [0, 1)$ 구간 즉,

$t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 인 구간에서 $\frac{d}{d\tau}\mathbf{x}(\tau)$ 와 $\mathbf{x}(\tau)$ 의 STWS 계

수이며 초기값이 $\mathbf{x}(i-1)$ 일 때의 결과 값이다.

다음의 반복식에 의해 전체 구간에서의 시스템 상수 행렬을 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(\tau), \tau)|_{\mathbf{x}_i} = \mathbf{A}_i \quad (R^{n \times n} \text{ 공간}) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{S}_i = [\mathbf{I}_{n \times n} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}_i]^{-1} [\Delta t \mathbf{A}_i \mathbf{x}(i-1)] \quad (2.14)$$

$$\mathbf{X}_i = \frac{1}{2} \mathbf{S}_i + \mathbf{x}(i-1) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{S}_i + \mathbf{x}(i-1) \quad (2.16)$$

단, $i = 1, 2, 3, \dots, m$

여기서 \mathbf{X}_i 는 i 번째 구간의 평균 상태값이고, $\mathbf{x}(i)$ 는 $\mathbf{x}(i) = \mathbf{x}(i\Delta t)$ 를 의미함. $\mathbf{x}(i)$ 는 $t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t)$ 구간의 초기값으로 이용된다. 이 구간에서 $\mathbf{x}(i) = \mathbf{x}(i\Delta t)$ 로부터 $\mathbf{A}(\mathbf{x}(\tau), \tau)$ 에 포함된 $\mathbf{x}(\tau)$ 값이 새롭게 수정되고 $\mathbf{A}(\mathbf{x}(\tau), \tau)$ 의 계수 \mathbf{A}_i 가 계산되어 식 (2.14)에 이용된다. 이러한 과정을 m 번 반복 수행함으로써 결국 전체 정의구간 $t \in [t_0, t_f)$ 에서의 구간 상수화 된 시스템 행렬을 결정할 수 있다.

3. STWS를 이용한 적응형 칼만 필터 설계

3.1. 필터설계

일반적으로 비선형 확률시스템은 다음과 같은 동적 시스템으로 모델링된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{G}(t)\eta(t) \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.1b)$$

여기서 $\mathbf{x}(t), \mathbf{G}(t), \mathbf{C}(t)$ 는 각각 $R^n, R^{n \times m}, R^{p \times n}$ 의 공간을 갖으며 편향되지 않는 상태 추정을 위해 평균과 분산의 초기값은 다음과 같이 정의한다[9].

$$E[\mathbf{x}(t_0)] = \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (3.2)$$

$$\text{var}[\mathbf{x}(t_0)] = E\left\{[\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}_0][\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}_0]^T\right\} = \mathbf{P}_0 \quad (3.3)$$

플랜트 잡음 $\eta(t)$ 와 측정잡음 $\mathbf{v}(t)$ 는 각각 영 평균 백색 잡음 들로서 서로 상관성이 없고, 다음과 같은 강도를 갖는다.

$$\begin{aligned} E [\eta(t)\eta^T(t+\tau)] &= \mathbf{Q} \delta(\tau) \\ E [\mathbf{u}(t)\mathbf{v}^T(t+\tau)] &= \mathbf{R} \delta(\tau) \\ E [\eta(t)\mathbf{v}^T(t+\tau)] &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

\mathbf{Q} : 양의 반한정 (positive semidefinite)

\mathbf{R} : 양의 한정 (positive definite)

비선형인 식(3.1)을 미소 구간 $t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 에서 STWS을 이용하여 선형화한 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}(t)\eta(t) \quad (3.4)$$

식(3.4)의 필터링 문제는 상태추정 오차의 분산을 최소화하는 원리로부터 얻어진다.

상태 추정 방정식은 다음과 같다[10].

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (3.5)$$

실 상태와 추정된 상태 사이에 추정 오차와 오차 공분산 행렬은 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{P}(t) = E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)] \quad (3.7)$$

미소 구간의 분산 행렬 리카티 방정식과 필터 이득은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i, t) \\ &\quad - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}\mathbf{G}(t)^T \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1} \quad (3.9)$$

식(3.8)을 행렬 분해하여 다음과 같이 표현하였다[11].

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{M}^{-1}(t) \quad (3.10)$$

여기서 $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ 는 다음과 같은 동차 선형 미분방정식을 만족하는 $n \times n$ 차의 행렬이다.

$$\dot{\mathbf{M}}(t) = -\mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i, t)\mathbf{M}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{N}(t) \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathbf{N}}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}\mathbf{G}^T(t)\mathbf{M}(t) + \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t)\mathbf{N}(t) \quad (3.12)$$

식(3.11), (3.12)을 해밀토니안(Hamiltonian) 형태로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{M}}(t) \\ \dot{\mathbf{N}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i, t) & \mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(t) \\ \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}\mathbf{G}^T(t) & \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{N}(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

단, 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(t_0) \\ \mathbf{N}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

식(3.13)을 m 항 전개한 STWS를 이용하여 해를 구하기 위해

먼저 $t = \frac{t_f}{m}\tau$ 로 시간에 대한 크기 조절 후 미소 구간

$t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 에서 다음과 같이 치환하여 나타내면

$$\frac{d}{d\tau}\zeta(\tau) = \Delta t \mathbf{F}(\tau)\zeta(\tau) \quad (3.15)$$

여기서,

$$\zeta(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\tau) \\ \mathbf{N}(\tau) \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\tau) = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T(\mathbf{x}_i, \tau) & \mathbf{C}^T(\tau)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(\tau) \\ \mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{G}^T(\tau) & \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, \tau) \end{bmatrix}$$

와 같고, $\frac{d}{d\tau}\zeta(\tau)$, $\zeta(\tau)$, $\mathbf{F}(\tau)$ 를 각각 STWS로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{d\tau}\zeta(\tau) = \mathbf{W}_i\omega_0(\tau) \quad (3.16)$$

$$\zeta(\tau) = \zeta_i\omega_0(\tau) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}_i\omega_0(\tau) \quad (3.18)$$

따라서 다음과 같은 반복연산[6]에 의해 식(3.15)의 해를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{W}_i = \left[\mathbf{I}_{2n \times 2n} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{F}_i \right]^{-1} [\Delta t \mathbf{F}_i \zeta(i-1)] \quad (3.19)$$

$$\zeta_i = \frac{1}{2}\mathbf{W}_i + \zeta(i-1) \quad (3.20)$$

$$\zeta(i) = \mathbf{W}_i + \zeta(i-1) \quad (3.21)$$

단, $i = 1, 2, 3, \dots, m$

여기서 ζ_i 는 i 번째 구간에서 연속인 상수 값이며 $\zeta(i)$ 는 $i+1$ 번째 구간의 초기값이다. i 번째 구간에서 부분적으로 연속인 STWS의 계수는 $\zeta_i = [\mathbf{M}_i \mathbf{N}_i]$ 이고, 각각의 세부 구간에서 계수 행렬 ζ_i 을 얻으면 각 세부 구간에서 분산 행렬과 칼만 필터 이득의 STWS의 계수는 각각 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{M}_i^{-1} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{C}_i^T \mathbf{R}^{-1} \quad (3.23)$$

3.2. 상태 추정

임의의 미소 구간 $t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 에서의 상태 추정 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \\ &= [\mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{C}(t)]\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

여기서 $\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{C}(t)$ 로 치환하면

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{U}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{z}(t) \quad (3.25)$$

와 같이 된다. 식 (3.24)은 일차 미분 방정식의 형태이므로 STWS에 의해 다음과 같은 i 번째 구간의 반복식[6]을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{S}_i = \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{U}_i \right]^{-1} [\Delta t \mathbf{U}_i \hat{\mathbf{x}}(i-1) + \Delta t \mathbf{K}_i \mathbf{Z}_i] \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{2}\mathbf{S}_i + \hat{\mathbf{x}}(i-1) \quad (3.27)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(i) = \mathbf{S}_i + \hat{\mathbf{x}}(i-1) \quad (3.28)$$

단, $i = 1, 2, 3, \dots, m$

여기서 $\hat{\mathbf{X}}_i$ 는 $t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 에서 추정된 상태의 평균값이고, $\hat{\mathbf{x}}(i)$ 는 $t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t)$ 구간의 초기값이다. 미소 구간 $t \in [(i-1)\Delta t, i\Delta t)$ 에서 전개항수 m 만큼 분할하여 한 구간씩 선형화하고 다음 구간의 초기 상태 $\mathbf{x}(i)$ 와 추정 상태의

STWS의 계수 \hat{X}_1 를 구할 수 있다.

4. 시뮬레이션 및 결과

본 연구 방법과 기존의 EKF를 이용하여 레이더 추적 시스템의 상태를 각각 추정하여 비교하여 보았다. 이 문제에서 추정하려는 상태는 고도(altitude), 속도(velocity), 그리고 수직으로 떨어지는 물체의 탄도계수(ballistic coefficient) 이다[12].

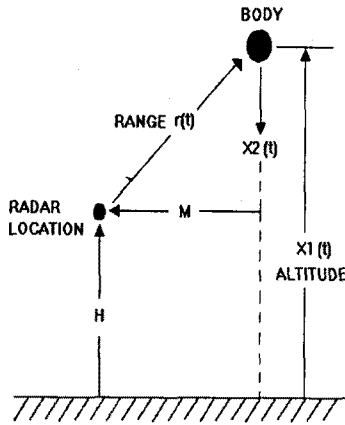


그림 1 자유낙하 물체의 추적
Fig. 1 Tracking a free-falling body

정의

- $x_1(t)$: 고도(altitude), $x_2(t)$: 속도(velocity)
 - m : 질량(상수), C_D : 마찰계수
 - A : reference area for drag evaluation(상수)
 - ρ : 대기의 질량 밀도, H : 레이더 고도
 - M : 수직 거리, $r(t)$: 실제 거리
- 중력의 영향을 무시한 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\frac{C_D A \rho}{2m} x_2^2(t)$$

여기서 공기 밀도 ρ 는 Allen과 Eggers에 의해 지수함수로 근사화되었다.

$$\rho = \rho_0 e^{-\gamma x_1(t)}, \quad \gamma = 5 \times 10^{-5}$$

$x_3 \triangleq C_D A \rho_0 / 2m$: 탄도계수인 상수

가정에 의한 전체적인 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = -e^{-\gamma x_1} x_2^2 x_3, \quad \dot{x}_3 = 0$$

출력 $r(t)$ 와 관측 방정식은 다음과 같다.

$$r(t) = \sqrt{M^2 + (x_1(t) - H)^2}$$

$$z(t) = \sqrt{M^2 + (x_1(t) - H)^2} + v(t)$$

$v(t)$ 는 영 평균 백색 정규 잡음이며 분산은 다음과 같다.

$$E\{v(t)v(\tau)\} = R(t)\delta(t-\tau)$$

문제 구성의 시나리오(scenario)는 다음과 같다.

$$P(t_0) = \text{diag}(10^6 \text{ (ft)}^2, 4 \times 10^6 \text{ (ft/s)}^2, 10^{-4}),$$

$$m = 50/1\text{sec}, \quad t_0 = 0(\text{sec}), \quad t_f = 30(\text{sec}), \quad \Delta t = \frac{1}{1500},$$

$$H = 10^5 \text{ (ft)}, \quad M = 10^5 \text{ (ft)}, \quad R = 10000 \text{ (ft)}$$

실험 1) 초기 실 상태값과 추정 상태값을 다음과 같이 주었다.

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^5 \text{ (ft)} \\ 2 \times 10^4 \text{ (ft/s)} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t_0) \\ \hat{x}_2(t_0) \\ \hat{x}_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^5 \text{ (ft)} \\ 2 \times 10^4 \text{ (ft/s)} \\ 3 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

표 1은 전체 구간에서 고도와 속도에 대한 오차 값을 본 연구 방법과 EKF 방법을 비교하여 나타낸 표이다.

표 1 고도와 속도에 대한 오차 값 비교

Table 1 Comparison of altitude error and velocity error

Time (sec)	고도의 오차 값		속도의 오차 값	
	본 연구 방법	EKF 방법	본 연구 방법	EKF 방법
1	174	150	375	300
2	252	249	200	195
3	97	94	21	22
4	94	95	12	16
5	48	51	18	19
6	175	175	181	178
7	353	336	380	361
8	26	105	45	43
9	790	853	775	820
10	513	510	357	378
11	1223	1510	880	1063
12	582	583	203	221
13	438	405	109	115
14	265	278	26	58
15	151	173	7	20
16	96	154	1	13
17	88	141	1	7
18	24	89	1	3
19	124	165	1	5
20	95	119	1	3
21	24	54	1	1
22	26	54	1	1
23	54	95	1	1
24	32	55	1	1
25	32	55	1	1
26	98	110	1	1
27	94	108	1	1
28	92	107	1	1
29	98	110	1	1
30	96	109	1	1

본 연구 방법과 EKF 방법의 상태에 대한 최소자승 오차를 비교하여 표 2에 실었다. 고도와 속도에 대한 오차로서 그 값이 크므로 인하여 소수점 이하는 반올림하여 계산하였다.

표 2 최소자승 오차
Table 2 Least square error

	본 연구 방법	EKF 방법
고도	6254	7092
속도	3604	3850

결과 : 그림 2 - 그림 4 는 본 연구 방법과 EKF 방법의 실 상태와의 오차 비교이다. 초(sec)당 하나의 오차(즉, 30개) 만 을 그림으로 나타냈다. 또한, 표 1과 표 2에서 보듯이 본 연구 방법이 각 구간에서의 오차와 최소자승 오차가 기존의 EKF 방법에 비해 작음을 알 수 있다.

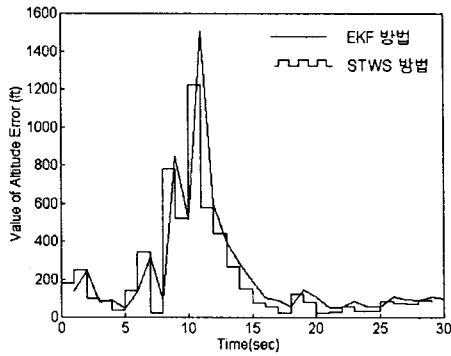


그림 2 고도의 오차 값
Fig. 2 Value of altitude error

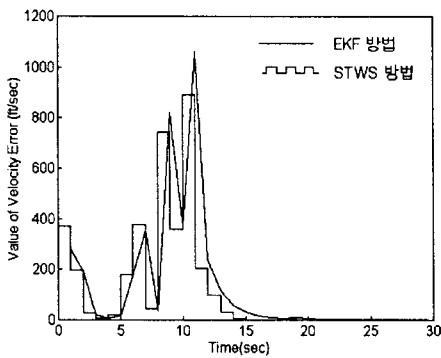


그림 3 속도의 오차 값
Fig. 3 Value of velocity error

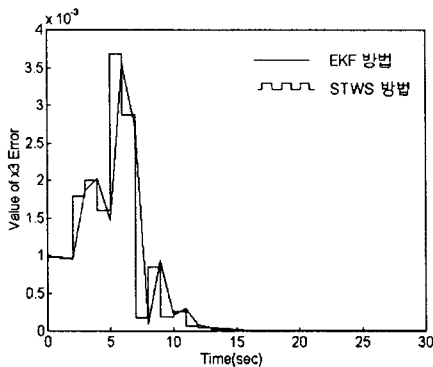


그림 4 상태 $x_3(t)$ 의 오차
Fig. 4 Value of state $x_3(t)$ error

실험 2) 초기 실 상태 값과 추정 상태 값을 다음과 같이 주었다.

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 10^5 \text{ (ft)} \\ 2 \times 10^4 \text{ (ft/s)} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t_0) \\ \hat{x}_2(t_0) \\ \hat{x}_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 \times 10^5 \text{ (ft)} \\ 2.1 \times 10^4 \text{ (ft/s)} \\ 3 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

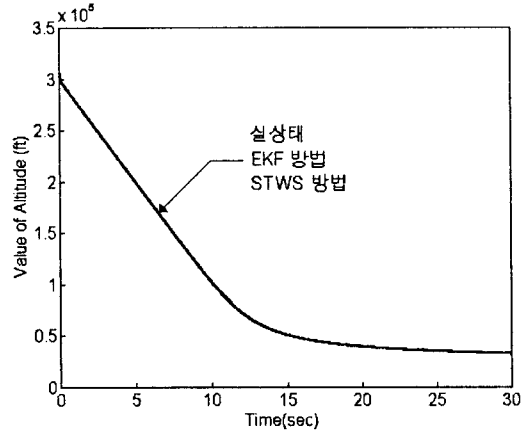


그림 5 상태 $x_1(t)$ 에 대한 실 상태와 추정 상태
Fig. 5 Real state and estimated state of $x_1(t)$

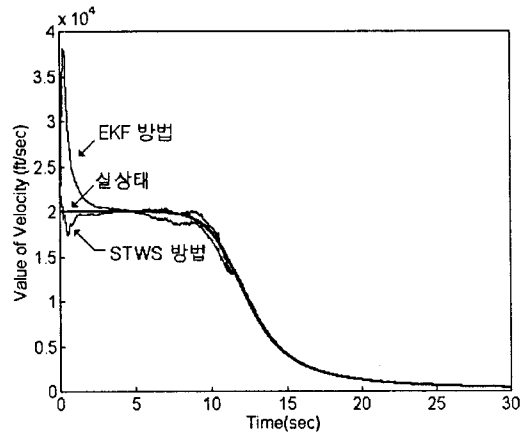


그림 6 상태 $x_2(t)$ 에 대한 실 상태와 추정 상태
Fig. 6 Real state and estimated state of $x_2(t)$

결과 : 이 실험에서는 초기 오차를 변화시킨 경우로 그림 5와 그림 6에서 볼 수 있듯이 본 연구 방법의 추정 상태가 실 상태에 가까움을 알 수 있다. 그 이유는 상태 추정시 적응형 해석 기법을 이용함으로써 초기 오차에 대한 영향을 줄일 수 있었고, EKF 방법이 어느 샘플링 구간의 초기 시점에서의 추정 상태값을 다음 구간의 초기 상태로 취하는데 반해 본 연구 방법은 샘플링 구간의 평균 상태값을 다음 구간의 초기 상태값으로 취하기 때문이다.

5. 결론

비선형 확률 시스템의 상태 추정에 대한 근본적인 문제는 선형화 과정과 반복적인 상태 추정의 문제이다. 따라서 선형화

오차를 줄이는 문제와 추정된 상태의 수렴성이 보장되는지가 가장 중요한 문제로 대두된다.

본 연구에서는 비선형 시스템의 해석 방법인 적응형 접근 방법에 STWS를 적용하여 연속계로 주어지는 시스템을 이산계로 바꾸지 않고도 디지털 컴퓨터에 직접 적용할 수 있는 대수 반복식을 유도함으로써 이산화 과정의 번거로움을 피할 수 있고, 기존의 수치 해석적인 연산에 비해 연산 과정이 간단한 알고리즘을 제시하였다. 이 방법은 전 단계에서 구한 상태가 다음 구간의 초기 상태로 이용될 때 STWS의 계수 값인 구간에서 연속인 값을 이용함으로써 임의의 미소 구간에서 비선형성이 크더라도 선형화 과정의 오차를 최소화할 수 있어 기존의 EKF 방법에 비해 수렴성이 개선됨을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] J. E. Potter and R. G. Stern, " Statistical filtering of space navigation measurements", Proc. 1963 AIAA Guidance Contr. Conf., 1963.

[2] T. L. Song, and J. L. Speyer, "A stochastic analysis of a modified extended Kalman filter with applications to estimation with bearing only measurements", IEEE. Trans. Automat. Contr., Vol. AC-30, No. 10, pp.940-949 1985.

[3] T. Kailath, " Some new algorithms for recursive estimation in constant linear systems", IEEE. Trans. Inform. Theory., Vol. IT-19, pp. 750-760, 1973.

[4] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "A State-Space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems ", Int. J. Systems Sci., Vol. 6 , No. 9, pp. 833-858, 1975.

[5] N. S. Hsu, and B. Cheng, " Analysis and Optimal control of time-varying linear Systems via block-pulse functions ", Int. J. Contr., Vol. 33, No. 6, pp. 1107-1122, 1981.

[6] K. R. Palanisamy, "Analysis of Nonlinear System via Single Term Walsh Series Approach", Int. J. Systems. SCI., Vol. 13, No. 8 , pp.929-935, 1982.

[7] J. D. Pearson, "Approximation Methods in Optimal Control ", J. Electron. Control., Vol. 13 , pp. 435-469, 1962.

[8] J. P. Matuszewski , "Suboptimal Terminal Feedback Control of Nonstationary Nonlinear Systems ", IEEE. Trans, Automat. Contr., Vol. 18, pp. 271-274, 1973.

[9] A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1991.

[10] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems ", Journal of Basic Engineering., pp. 35-45, 1960.

[11] M. S. Grewal and A. P. Andrews, Kalman filtering theory and practice, Prentice Hall, 1993.

[12] M. Athans, " Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Discrete Noisy Measurements. " IEEE. Trans. Automat. Contr., Vol. AC-13, No. 5, pp. 504-514, 1968.

저 자 소 개



임 윤 식 (林潤植)

1966년 1월 4일생. 1991년 성균관대 전기공학과 졸업. 1993년 동 대학원 전기공학과 석사학위취득, 1998년 동 대학원 전기공학과 박사학위취득, 1998년 ~ 현재 여주대학 방송영상제작과 부교수
 Tel : 031-880-5196
 E-mail : elecys@hanmail.net