한국수학사학회지 제21권 제4호(2008년 11월), 141 - 152

복소수 개념의 교수학적 분석

경북대학교 사범대학 수학교육과 **유윤재**
yjyoo@knu.ac.kr

본 연구는 복소수의 교수학적 분석인데 주로 문제해결에 필요한 지식의 연결성에 초점을 맞추고 있으며 복소수 개념이 학교수학에서 핵심적 역할을 한다는 것을 보이고 있다.

주제어: 복소수, 교수학적 분석, 연결성, 문제해결

I. 서론과 문제제기

본 논고에서 상세하게 논하겠지만 복소수 개념은 수체계의 완성이라는 측면을 넘어 학교수학의 여러 개념들을 연결하고 있는 중요한 개념이다. 교육과정에 제시된 바에 의하면 복소수를 다룰 때는 대수적 구조를 지나치게 강조하지 않기를 권고하고 있지만 현행 교과서를 보면 복소수의 대수적 구조 외 다른 측면을 다루지 않기 때문에 결과적으로 복소수 단원의 학습은 복소수체의 대수적 구조만 부각되어버렸다는 인상을 준다. 교육과정이 복소수의 대수적 구조 이상의 성질을 간략하게 다룰 것을 제안하고 있다는 점은 복소수 개념의 난해성보다는 학교수학을 위한 교수학적 분석이 충실하게 이루어지지 않았다는 점에 일차적인 원인이 있고 그것이 교육과정을 설계하는데 영향을 주었다고 본다. 실제로 교수학적 분석에 관한 연구 결과([1])를 보면 6개 영역에 대한 교수학적 분석만 이루어져 있으며 각 영역을 지탱하고 있는 세부적인 하위 수준의 개념에 대한 분석은 미미하다는 것을 볼 수 있다. 이에 여기서 시도하려는 복소수의 교수학적 분석도 이런 동기에서 출발한다.

2008년도 교육과학기술부 검정을 통과한 교과서의 메타분석 결과에 의하면 허수 단위 i의 등장에 관련된 인식론적 문제를 재현하기 위한 흔적과 이에 따른 고민은 각 교과서마다 나타나 있지만 그렇다고 해서 수학사에서 나타난 인식론적 문제를 학생들이 충분히 인식할 수 있을 만큼 충분하게 기술되어 있지도 않으며 오히려 애매한 진술들로 인하여 혼란만 야기하고 있다. 그리고 이러한 현상은 7차 교육과정에 의거해

집필된 교과서와 그 이전의 교과서에도 별다른 차이점을 보이지 않는다. 실제로 현행 교육과정에 의거한 교과서에서 나타난 바에 의하면 복소수 개념의 도입은 먼저 허수 단위의 도입 i, 함수 $(a,b)\rightarrow a+ib$가 1-1이 됨을 대변하는 복소수의 상등의 소개, 이어 복소수의 연산과 관련 개념으로 조직의 순으로 전개되어 있다.

어떤 개념을 도입할 경우 논리적 방법과 발생적 방법이 있는데 여기서 발생적 방법을 강조하다보면 논리적 허점이 드러나게 됨을 볼 수 있는데 이런 허점은 학교수학이라는 교육적 상황에서는 어느 정도 용인될 수 있는 사안이다. 그러나 수학적 지식은 엄격해야 한다는 관점이 현대 수학 철학의 주장과 부합하지 않는다는 주장과([3]), 그런 엄격성이 문제해결 과정의 필요조건은 아니라는 점을 인정하더라도 발생적 도입과정에서 나타난 논리성을 점검해본다는 것은 비판적인 동시에 반성적 사고를 함양한다는 점에서 중요한 학습 주제가 된다. 본 연구는 이런 맥락에서 교과서를 교사의 역할로, 비판자를 학생의 역할로 재구성한 상황을 만들어 교과서에서 복소수의 도입 과정의 논리성 문제의 제기함과 동시에 이에 대한 대안을 제시하였다. 이 점이 의도하는 바는 위에서 언급했다시피 학생들에게 수학적 사고의 건전성을 고취하는 동시에 그것을 해결하는 과정에서 얻는 '아하'를 경험하기 위한 기회를 제공하기 위함이다.

그러나 본 교수 분석의 초점은 주로 복소수와 관련된 개념간의 연결성에 맞추고 있다. 실제로 본 연구에 의하면 복소수 개념은 실수, 벡터, 좌표계, 삼각함수, 일차변환, 방정식, 등 다양한 수학적 개념들과 연결되어 있을 뿐만 아니라 그러한 관련 개념을 이해하기 위한 풍부한 학습 자료를 제공한다. 이러한 연결성은 직간접적으로 문제해결을 위한 힘으로 작용하기 때문에 문제해결과 수학적 힘을 지향하는 현대 수학교육에서는 매우 중요한 요소이다. 한편 본 분석을 위한 기초 자료는 복소수의 연산과 관련된 초보적 개념에서 추출한 것들로 이루어졌기 때문에 본질적으로 학교수학의 범위를 벗어나지 않는다.[1)]

II. 본론

1. 도입 과정의 문제

교과서에서 기술된 복소수 개념의 도입 방법은

1) 허수 단위의 정의
2) 복소수 $a+bi$의 정의

1) 그러나 여기서 말하는 범위란 교육과정이 지시하는 내용 안에 있다는 것을 의미하지는 않으며 단지 교육과정에서 제시된 개념에 의하여 즉각적으로 확장이 가능한 범위를 의미한다.

3) 복소수의 연산 정의

의 순서로 진행되고 있다. 여기서 보다 엄격한 방식으로 도입하는 경우는 복소수를 실수의 순서쌍으로 정의하는 경우를 생각할 수 있는데 이 방법을 적용한다면 2)가 먼저 도입되고 이어 1)과 3)이 제시되는 순서가 논리적이라고 볼 수 있다. 그러므로 교과서에서 제시된 순서는 논리적 방법은 아니다. 그러나 허수 단위를 역사적 의미와 관련짓고자 하는 의도라면 위의 순서도 용인할 수 있다. 그러므로 복소수 개념을 도입할 때 i를 가장 먼저 도입하는 방법을 문제시할 필요는 없다고 본다.

도입의 순서가 야기하는 개념적 오류를 확인하기 위하여 2008년도 검정을 통과한 교과서에서 제시된 내용을 중심으로 필요한 부분만 발췌하였다. 다음 사례들은 현행 교과서의 내용을 따랐지만 내용을 보다 명확하게 하기 위하여 약간의 수정을 통하여 재구성한 것이나 내용이 의미하는 바는 본질적으로 동일하다.

1) 도입 순서의 전도

교사: 방정식 $x^2=2$의 해를 실수의 범위에서 구하면 $x=\pm\sqrt{2}$이다. 그러나 임의의 실수 a에 대해서 $a^2 \geq 0$이므로 방정식 $x^2=-2$의 근은 실수의 범위에서 존재하지 않는다. 이 방정식이 근를 갖도록 수의 범의를 실수의 범위에서 다시 확장해보자. 제곱하여 1이 되는 수를 기호 i로 나타내고 이 i를 허수 단위라고 한다. 즉, $i^2=-1$. 이 때, i를 $\sqrt{-1}$로 나타내기로 한다. 이와 같은 수 i를 생각하면 $(\pm\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2$이므로 $x=\pm\sqrt{2}i$는 방정식 $x^2=-2$를 만족시킨다. 즉 -2의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}i$이다.

학생 1: $(\pm\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2$에서 첫째 등식에서 $\sqrt{2}i$는 무엇을 의미하며 어떤 연산 법칙이 먼저 제시되었습니까? 우리는 아직 연산 규칙을 모르며 책에서는 뒤편에 소개되어 있습니다.

여기서 나타난 교사의 진술은 앞으로 전개될 복소수의 곱에 대한 연산이 어떤 규칙을 수용해야 할 것인가에 대하여 사전에 어떤 암시를 주고 있다고 볼 수도 있다. 그러나 교과서는 실제로 이런 암시를 직시하고 있는가에 대한 판단을 위의 글로는 결정할 수 없다고 본다. 보다 분명하게 문제점을 제기하여 위의 진술이 복소수 단원의 도입을 위한 선행조직자의 역할을 기대하면 좋을 것 같다.

2) 정의 대상이 전도된 경우

(전제: 복소수의 연산이 도입된 후의 상황)

교사: 임의의 양수 a에 대하여 $(\sqrt{a}i)^2 = ai^2 = -a$, $(-\sqrt{a}i)^2 = ai^2 = -a$이므로, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다. 여기서 $\sqrt{a}i = \sqrt{-a}$로 나타낸다.
학생: 지금 이 정의 $\sqrt{a}i = \sqrt{-a}$에서 어느 항이 피정의 대상입니까? 앞에서 $\sqrt{a}$은 이미 의미있는 수이고 i도 방금 소개받았는데 그렇다면 $\sqrt{a}i$는 의미가 있고 따라서 여기서는 $\sqrt{a}$와 i로부터 $\sqrt{-a}$를 정의해야 하는 것이 논리적으로 타당한 것이 아닐까요?

$\sqrt{-a}$의 정의는 $\sqrt{a}i = \sqrt{-a}$로 되어 있는데 교과서를 보면 $\sqrt{-a}$를 정의하는 것이 아니라 $\sqrt{a}i$를 정의하는 것처럼 보이게 한다.

3) 모호한 진술

(교사의 진술은 복소수 연산 규칙을 도입한 후에 나타난 질문으로 간주한다.)

교사: 이 때, 제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 i로 나타내고 이를 허수 단위라 한다. 즉, $i^2 = -1$이다. 한편, 제곱하여 -1이 된다는 뜻으로 $i = \sqrt{-1}$과 같이 나타내기도 한다.
학생: 그렇다면 $-i$도 제곱하면 -1이 되기 때문에 $-i = \sqrt{-1}$이 됩니까?

이 글상자에 의하면 학생은 $\sqrt{-1}$를 형식적으로 이해하고 있게 될 수 있으며 i는 $\sqrt{-1}$의 단순한 약정 기호로 간주할 수 있다. 이러한 생각은 더 나아가서 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$가 임의의 실수에 대해서 성립할 것이라고 간주하게 된다.

4) 모호한 진술(설명없는 진술의 등장)

교사: 실수를 제곱하면 항상 0 이상의 수가 되므로 방정식 $x^2 = -1$의 해는 실수의 범위에서 존재하지 않는다. 이 방정식이 해를 갖도록 하려면 제곱해서 음수가 되는 새로운 수를 도입하여 수의 범위를 확장해야 한다. 이제, 제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 기호 i로 나타내기로 한다. 곧, $i^2 = -1$ $(i = \sqrt{-1})$ 이다. 이 때, i를 허수 단위라 한다. 그리고 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타낼 수 있는 수를 복소수라고 한다.
학생: 여기서 괄호 안의 $i = \sqrt{-1}$은 아무런 설명이 없는데 무엇을 의미합니까?

위의 글상자에서 괄호안의 의미에 대해서 아무런 언급이 나타나지 않는다.

5) 개념적 혼란

교사: 임의의 양수 a에 대하여 $(\sqrt{a}\,i)^2 = ai^2 = -a$, $(-\sqrt{a}\,i)^2 = ai^2 = -a$이므로, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다. 여기서 $\sqrt{a}\,i = \sqrt{-a}$로 나타낸다.

학생: 만약에 $(\sqrt{a}\,i)^2 = ai^2$ 계산이 가능하다면 그것은 지수법칙에 의한 것이겠군요. 그렇다면 마찬가지로 $\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{(-2)^2} = 2$이므로 따라서 $-2 = 2$가 되겠군요?

6) 일의성의 혼란

교사: 복소수 $a+bi=0$라면 $a=b=0$이다. 그러므로 복소수의 상등은 필요하지 않다. 그 이유는 $0=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 당연히 $a=b=0$가 되기 때문이다.[2)]

학생: $a^2+b^2=0$이라는 것은 실수에서 말하는 것이 아니라 복소수에서 말하는 것이므로 실제는 $a^2+b^2+0i=0$가 아닌가요. 그러므로 $a^2+b^2+0i=0$에서 먼저 복소수의 상등이 전제되어야 위의 결론이 도출되는 것이 아닌가요?

이 경우는 순환논리에 빠져있다.

7) 혼란스런 위계성

교사: 복소수로부터 수는 다음과 같은 체계를 가진다.

$$\text{복소수}\begin{cases}\text{실수}\begin{cases}\text{유리수}\\\text{무리수}\end{cases}\\\text{허수}\end{cases}$$

학생: 복소수와 허수는 다른 것입니까?

위계성을 다룰 때는 포함관계로 제시하는 것이 나을 것 같다.

2. $\sqrt{-a}$ 도입에 대한 타당성 문제

이차 방정식의 문제는 이미 고대 그리스 시대에 해결되었는데 그 당시에는 이차 방정식의 풀이를 기하학적 방법으로 접근했기 때문에 허근 개념이 나타나지 않았다. 그

2) 이 사례는 실제 교사에 의한 오류이다.

러나 방정식을 대수적 기법으로 풀게 되는 과정에서 $\sqrt{-a}$와 같은 기존의 지식으로는 설명할 수 없는 존재가 등장하였다. 실제로 16세기 경 3, 4차 방정식의 연구에서 이러한 이상한 양은 방정식을 푸는 과정에서 흔히 나타났으나 실수 체계와 모순되는 것으로서 무시당했으며 복소수가 실수만큼 실재적으로 간주된 것은 19세기 Gauss에 의한다는 것을 수학사로부터 알고 있다.

이차 방정식이 실근을 가지는 경우를 유추하여 $a \geq 0$에 대한 이차 방정식 $x^2 = -a$을 푼다면 그 근은 형식적으로 $x = \pm\sqrt{-a}$가 되는데 이것은 실체가 분명하지 않는, 따라서 기호만으로 존재하는 어떤 대상이 된다. 다음 <표 1>에서 보이는 바와 같이 이런 무비판적 접근은 $x^4 = -1$과 같은 방정식을 푸는 과정에서 일견 모순된 결과를 보게 된다.

방법	풀이 과정
풀이 I	$(x^2)^2 = x^4 = -1$로부터 $x^2 = \pm\sqrt{-1}$이다. 그러므로 $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$가 된다.
풀이 II	$x^4 = -1$로부터 $x = \pm\sqrt[4]{-1}$이다. 그러므로 지수법칙을 이용하면 $x = \pm\sqrt{\sqrt{-1}}$이다.

<표 1> $x^4 = -1$의 풀이

여기서 음의 a에 대하여 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$로 정의한다고 한다면 방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$는 $(x+1)^2 = -2$이고 이것으로부터 $x+1 = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$에 의하여 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$를 얻는다. 이런 의미에서 정의 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$가 가지는 의의를 생각할 수 있다. 그러나 방정식 $x^4 = -1$을 풀 때 위의 표와 같은 방법을 적용하다면 여전히 $\sqrt{i}$라는 존재의 인식론적 문제를 낳는다. 실제로 위의 표 1에서 보인 혼란은 실수 체계에서 적용된 규칙, 예를 들면 실수계에서 성립했던 지수법칙을 복소수체에 무비판적으로 적용한 결과에 기인한다. 그러므로 정의 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$는 이차방정식이면 몰라도 방정식 $x^4 = -1$과 같이 경우는 전혀 만족스런 답을 제공해주지 않는다. 결과적으로 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$와 같은 정의는 이차 방정식을 위한 임시방편적 정의일 뿐 본질적인 정의는 아니다. 또 이차방정식의 경우라도 다음 글상자가 보여주는 바와 같이 정의 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$는 불필요하다.

방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$을 변형하면 $(x+1)^2 = -2$이고 이것을 다시 정리하면 $(\frac{x+1}{2})^2 = -1$인데 이것으로부터 i의 정의를 적용하면 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$이다.

정의 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$가 수학적으로 무의미하다면 교육적 관점에서는 어떤 의미를 가질까? 이차방정식이 실근을 가지지 않을 경우, 위의 글상자에서 제시된 것과 같이 항상 '올바른' 방법으로 방정식을 풀기를 강요하는 것은 아니다. 복소수에 대한 개념적 지식이 없더라도 이차방정식을 위에서 언급한 바와 같이 기계적으로 풀 수도 있고 한편 복소수에 대한 지식을 가지고 체계적으로 접근하더라도 나중에 절차적 지식으로서 자동화가 되면 결과적으로는 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$을 사용하는 것과 동등하게 된다. 이런 현상들은 현행 교육과정이 복소수에 대해서 간단하게 지도할 것을 주문한 결과, 개념적 이해를 요구하는 수준과 그렇지 않는 경우가 명확하게 구분되어 있지 않기 때문에 나타난 결과로 본다. 더욱이 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이 가지는 문제점은 이 정의가 가지는 비생산적 측면에 있다. 예를 들면 대부분의 교과서는 $\sqrt{-a}$의 도입하면서 $a \leq 0$이고 $b \leq 0$일 때 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$와 같은 공식을 학습 요목에 포함시키고 있다. 그런데 복소수 단원에서 도대체 이런 지식이 어디에 필요할까? 이런 공식은 $\sqrt{-1}$을 i로 대체함으로써 원천적으로 제거되며 따라서 $\sqrt{-a}$는 교육적으로도 의미가 없다고 본다. $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$의 정의와 관련된 제안을 한다면 이 정의에 수학적 의미를 부여하기보다는 역사적 의미만 부여하여 가볍게 처리하는 편이 바람직하다.

이런 모든 문제점을 고려한다면 복소수 개념에 대한 대안적 지도는 어떻게 주어져야 할까? 다음은 전통적인 복소수 지도에서 부가되어야 할 내용이다.

i) $\sqrt{-1}$이 가진 문제점 제기와 대안으로서 i의 소개

ii) 대수방정식의 복소수체 기반에 의한 풀이법과 전통적 방법의 비교를 통한 복소수체가 가진 수월성 확인

3. 연결 매체로서 복소수

1) 교과서에서 복소수 단원의 성격

철학자 G. Ryle은 지식을 개념적 지식과 절차적 지식으로 구분한다. 개념을 알고 이해한다는 것이 중요한 학습이라는 것은 개념의 습득과 같은 개념적 지식들이 문제해결과 같은 절차적 지식을 위한 기반이 된다는 사실에 있다. 동시에 하나의 수학적 주제는 수학의 다양한 영역에 기초를 둔 표상으로 구현될 수 있을 때 이해의 수준도 그만큼 높아진다. 이 점은 ([4])에 의하여 제안된 수행성 관점에 의한 이해의 개념과 부합한다. 이 점을 분명히 하기 위하여 복소수와 동일한 기하학적 표상을 가지는 평면 좌표기하의 예를 들어보자. 7차 교육과정에 의거한 대부분의 교과서에는 평면 좌표기하의 개념적 지식의 소개와 함께 원과 직선에 관련된 문제들과 관련된 문제를 통하여 문제해결을 다루고 있다. 예를 들면 교과서에서는 원점을 중심으로 하고 반경이

1인 원주위의 한 점 (x_o, y_o)에 접하는 직선의 방정식이 좌표기하학으로는 $x_0x+y_oy=1$로 주어짐을 소개하고 있는데 이 예는 모든 교과서에서 공통적으로 나타난다. 그런데 여기서 $z_o=x_o+y_oi$라고 하면 복소수에 의한 접선 방정식은 $Re(\overline{z_o}z)=1$가 되는데 이러한 결과는 어떤 교과서에서도 보이지 않는다. 결국 교과서가 보여주는 복소수 단원의 학습 목표는 대수적 구조의 수직적 완성에 의미를 둘 뿐 관련 실제 이해 또는 문제해결에 강력한 도구가 될 수 있는 지식간의 연결성을 간과하고 있다는 것을 보여주는 셈이다.

2) 학교수학에서 복소수의 역할

학교수학에서 복소수는 어떤 역할을 하는가? 복소수 개념은 교육과정에서 제시된 내용만으로도 다음과 같은 개념적 연결성을 제공한다.

i) 복소수는 Gauss 평면에 의하여 평면 좌표기하와 연결되어 있다. 복소수체는 그것이 가지고 있는 다양한 연산 법칙에 의하여 수학적 대상의 대수적 조작이 좌표기하의 그것에 비하여 유연하다.

ii) 복소수의 덧셈은 벡터 개념과 연결된다. 복소수로부터 4원수, 8원수 등의 확장은 결국 벡터 개념을 낳게 한 동인이 되었다. 이러한 결과는 복소수 개념이 벡터 개념의 학습을 위한 개념적 연결 고리를 만들어준다는 것을 시사한다. 여기서 개념적 연결 고리라 함은 Ausubel의 관련 정착의미(anchored meaning)를 말한다.

iii) 복소수의 곱셈은 회전 변환과 연결된다. 즉 두 복소수 $e^{i\theta}$와 z의 곱에 의하여 정의된 함수 $f_\theta(z)=e^{i\theta}z$는 평면상의 어떤 변환을 의미한다. 여기서 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$라고 두고 $z=x+iy$라고 두면

$$f_\theta(x+iy)=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\cos\theta+y\sin\theta)$$

이므로 이것을 직교 좌표로 번역하면

$$f_\theta(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

가 된다. 이 사실로 부터 복소수의 곱셈이 점의 회전 이동을 표상한다는 것을 배운다. 한편 복소수의 곱셈은 삼각함수의 가법 정리와 연결된다.

iv) 복소수 개념은 좌표 표상으로서 극좌표에 의하여 연결되어 있기 때문에 복소수 개념은 삼각함수의 개념과 연결된다. 이 점은 일변수 Fourier 해석의 방법론이 복소해석 이론에 기반을 둔 것과 무관하지 않다.

v) 결레 복소수 개념은 복소 좌표계라는 새로운 좌표계를 낳는다. 즉 $z=x+iy$는 복소 좌표로서 $(z,\bar{z})$를 가진다. 학교수학에서도 단위원 $|z|=1$ 위의 한 점에 접하는 직선의 방정식이 $Re(\overline{z_o}z)=1$으로 주어진다는 것은 복소 좌표계에 의한 표상이다. 일

반적으로 복소 좌표계는 학교수학에서는 암묵적 지식에 불과하지만 전문적인 영역에서는 중요한 역할을 한다. 예를 들면 복소함수가 해석적이라는 점은 소위 복소 좌표계에 의한 Cauchy-Riemann 방정식인 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$으로서 나타난다.(이 사실로 부터 복소 해석적인 함수는 $\bar{z}$의 변수를 포함하지 않는다는 것을 알 수 있다.)

vi) 이상으로 본 바와 같이 복소수체를 표상하기 위한 좌표계는 직교 좌표계, 극 좌표계, 복소 좌표계가 있는데 복소수 개념의 학습은 좌표 변환에 대한 개념과 연결된다. 한편 앞에서 언급한 세 좌표계는 다음과 같은 좌표 변환을 가진다.

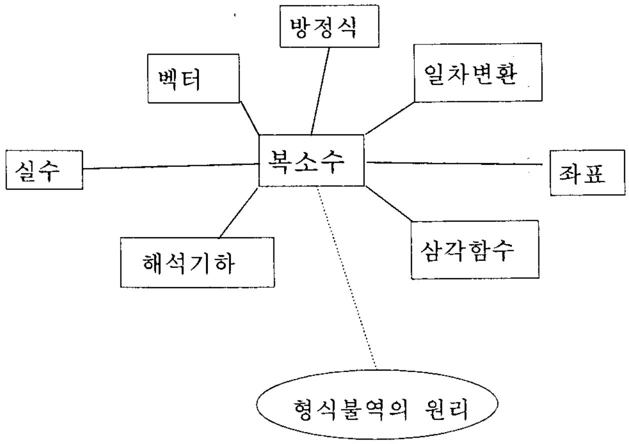
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}, \qquad \begin{cases} z = re^{i\theta} \\ \bar{z} = re^{-i\theta} \end{cases}$$

vii) 평면 위의 수학적 대상에 대하여 좌표기하에 의한 표상, 복소수에 의한 표상, 벡터에 의한 표상을 생각할 수 있는데 이 세 표상 간 비교를 통하여 각 표상이 가지는 장단점을 비교할 수 있다.

viii) 이항 방정식의 풀이를 제공한다. 이 점은 드 므와브르 공식에 의한다.

ix) 실수체로부터 복소수체의 확장은 G. Peacock이 말하는 형식 불역의 원리에 대한 자연스런 사례로서 수학의 지식의 확장 과정에서 나타난 특징을 이해한다.

다음 표는 복소수와 관련 지식 간의 연결성을 나타낸 도표이다.



<표> 복소수와 연결된 개념

이상의 성질은 복소수의 연산과 관련된 지식들을 연결한 것이다. 그밖에도 복소함수의 이론으로 나아가면 학교수학에서 필요한 어떤 것들에 대한 배경 지식을 얻는다. 예를 들면 유리식의 분해 공식3)과 그 일의성을 통하여 유리함수의 적분 계산을 용이

하게 한다.

III. 결론과 제언

위의 표에 관련된 설명에 의하면 복소수 개념이 학교수학에서 평면에 관련된 지식으로서 중추적인 역할을 하고 있다는 점을 확인하게 해준다. 사실 학교수학에서 복소수 개념만큼 다양한 연결을 가능하게 하는 개념도 드물다고 생각한다. 단순한 연산 규칙을 알고 간단한 계산문제를 풀기 위해서 복소수 개념을 배운다면 그것은 기계적 학습에 지나지 않으며, 적어도 교육과정이 문제해결을 지향한다면 복소수 단원을 간단하게 취급할 수 없다고 본다. 그러므로 복소수 개념의 학습 목표는 체라는 수 체계의 대수적 구조의 완성에 있는 게 아니라 연결성을 위한 학습 목표로 전환되어야 함이 바람직하다. 그러면 수학적 연결성을 강화하기 위한 교육은 어떻게 설계해야 할까? 현재와 같이 6개 기본 영역의 학습을 완결한 후 문제를 통하여 연결성을 강화하는 학습도 대안이 될 수는 있겠지만 이것도 한계가 있으며 수학적 연결성을 고려한 지식의 학습은 교육과정에 의하여 명시적으로 제공될 때 가장 조직적이라고 본다. 현 교육과정을 문제해결을 언급하지 않을 때의 교육과정과 비교해볼 때, 현 교육과정이 내용 부분에서 약간의 수정과 학습자 중심으로 개편되었다는 판단을 제외한다면 과거의 교육과정과 본질적으로 변한 것은 없다고 본다. 교과서마다 Polya의 문제해결 기법을 소개하고 있지만 대개 피상적 수준에서 머물고 있다. Polya의 문제해결 전략이 정말 바라는 것은 그러한 절차가 아니라 표상 간 전환 기법이며 이것은 지식의 연결성을 다른 말로 표현한 것이다. 이런 면에서 현행 교육과정이 문제해결을 위한 전략을 충분히 담고 있는가를 심각하게 고민할 시기이다. 물론 복소수 단원의 내용 추가가 학습량의 증가라는 문제를 야기할 수도 있다. 그러나 여기서 복소수 단원 학습 내용을 추가하지 않으면서도 내용의 연결성을 고려하여 조직한다면 이 글의 요구에 긍정적으로 답할 수 있다고 본다.

참고 문헌

1. 김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤. **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사. 2006.
2. 우정호. **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부. 1998.
3. Hersh, R. *What Is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press.

3) 이것은 Laurent 전개 또는 보다 일반적으로 Mittag-Leffler 전개로 알려져 있다.

1997.

4. Reigeluth, C. M. *Instructional-Design Theories and Models* (vol II). New York: Erlbaum. 1999.

On the didactical analysis of complex numbers

Department of Mathematics Education, Kyungpook National University **Yoon Jae Yoo**

In this article, the didactical analysis of complex numbers was explored in the context of mathematical connection. The result of the analysis can provide the useful tools for problem solving. The article shows that the complex numbers system plays the key roles in the school mathematics.

Key Word : complex numbers, didactical analysis, connection, problem solving

2000 Mathematical Subject Classification. 01A20, 97C90

ZDM Subject Classification : U24, H14, F54, G78

접수일 : 2008년 9월 30일 수정일 : 2008년 11월 10일 게재확정일 : 2008년 11월 21일