한국수학사학회지 제21권 제4호(2008년 11월), 105 - 126

기하와 기하교육과정 변천과 21세기 기하교육의 방향

건국대학교 수학교육과 **장경윤**
kchang@konkuk.ac.kr

본 논문은 교양교육과 수학교육에 필수적인 교과로 여겨오던 학교기하가 20세기 초부터 한 세기 동안 학문적 경향과 사회적 변화에 따라 어떻게 변천되어 왔는가를 역사적으로 개관하고 21세기 기하교육과정의 방향을 조망하였다. 21세기 CAD 등 컴퓨터 소프트웨어와 로봇산업 등은 직업과 전문분야에서 기하의 역할과 학교기하의 지식이나 기능도 바꾸고 있다. 응용과 모델링 측면 강화, 추론과 문제해결 영역 확대, 디자인과 관련된 요소 강화로 요약되는 21세기 기하교육 방향에서 우리나라 중등학교 기하교육에 시사점을 찾고자 하였다.

주제어: 기하교육과정, 역사적 변천, 유클리드, 컴퓨터, 시각화, 공간감각, 응용, 모델링

I. 들어가는 말

수학교육과정은 교육과 수학의 본질에 대한 그 시대의 교육학자와 수학자들의 인식, 사회가 요구하는 인간상과 수학에 대한 기대, 동시대의 학습심리학적 배경과 사회적 환경과 학습 환경 등에 따라 변화되어 왔다([28], [31], [33]). 학문의 발달로 지식의 양이 폭발적으로 팽창하는 시대에 학교수학에서 특정분야의 내용이 첨가 또는 축소의 형태로 반영되거나 접근방식이 달라지거나 상대적인 중요도에 변화가 나타나는 등 연구의 경향이나 사회적 요구가 교육과정에 반영되는 것은 자연스러운 현상이라 할 수 있다.

기하 교육은 오랜 역사를 가지고 있으며 여러 세기 동안 유클리드 기하는 수학교육뿐 아니라 교양교육에도 필수 교과로 간주되어 왔다([36, p.3]). Stamper(1932, [13]에서 재인용)에 의하면 대학에서 가르치던 논증기하로 대변되는 유클리드 기하가 고등학교 교과로 자리를 잡게 된 것은 19세기 중엽 이후이다. 19세기 수학 교수들이 새롭게 발전하는 수학 분야에 관심을 갖게 되면서 대학에서 논증기하의 입지가 축소되고

있던 차에, 사회적으로 일어난 중등교육의 강화 움직임이 고등학교에서 기하교과의 개설을 가능하게 한 것이다.

기하는 20세기 이후 교육과정에 많은 변화가 있었던 교과이다. 20세기 초 유클리드에서의 탈피를 주요 슬로건으로 내건 수학교육의 근대화 운동 이래 유클리드 기하는 학교수학에서 지속적으로 그 영역이 축소되었다. 유클리드 기하의 축소는 내용의 축소뿐 아니라 접근방법에 있어서도 변환, 벡터, 좌표 등 다양한 접근이 전통적인 방식을 대체하였으며 최근에는 컴퓨터 활용을 전제로 한 기하교과서 저술([8], [34])로 연역추론의 상징이던 기하에 관한 시각이 변화하고 있다. 이와 같은 기하교육과정의 변화는 기하 연구의 학문적 경향이나 사회적 환경의 변화와 무관하지 않다. 우리나라의 기하 교육과정도 세계적인 추세와 맥을 같이 하며 변화되어 왔다. 제 7차 교육과정은 중학교 기하 내용과 범위를 경감 또는 상급 학년으로 이동시켰으며, 제 6차 교육과정에서 모든 학생들이 공통적으로 다루었던 포물선 등 일부 내용을 수학 I에서 제외시키고, 고등학교 선택교육과정에서 기하를 수학 II에만 포함시키는 등 기하교육을 크게 약화시켰다. 반면에 내용의 전개와 접근 방식에 있어서 Cabri나 Geometer's Sketchpad와 같은 소프트웨어를 이용한 활동이 교과서에 삽입되면서 소프트웨어를 이용한 시각적 확인이 논증을 대신할 수 있다고 믿는 사례가 나타나는 등 기하교육에서 논증의 입지 역시 약화되고 있다.

이 연구는 수학 교육과정의 변천이 수학의 학문적 경향과 사회적인 변화에서 기인한 것이라는 가정에서 출발하였다. 본 논문은 20세기 직전부터 학교기하 교육과정이 크게 변화해 온 상황에 주목하고 지금까지의 기하교육과정의 변천과정과 그 변화의 배경에 관한 문헌연구의 결과로, 최근 기하교육의 경향을 역사적 흐름 가운데서 이해하고 21세기 기하 교육 방향을 논의할 것이다. 먼저 수학 학문 영역에서 기하학 연구의 변천 과정을 요약하고, 기하교과서 내용 및 구성을 포함하여 시기별 기하교육과정의 특징을 그 변화의 사회적 학문적 원인과 함께 분석하였으며, 마지막으로 최근 동향 분석에 따라 21세기 기하교육의 방향을 조망하기로 한다.

II. 기하학 연구의 변천 개관

Mammana와 Villani([22, p.3])는 ICMI연구에서 기하학 연구의 역사적 변천을 서술하면서 고대 유클리드 기하가 대안적 대수학의 출현, 비유클리드 기하의 출현, 기하의 대수화로 인해 입지가 계속 좁아져오던 기하가 최근 응용의 필요성과 컴퓨터소프트웨어의 개발이라는 수학 외적 요인으로 인해 새로운 도약의 시기에 와 있다고 주장하였다. 기하학 연구의 변천 과정을 Mammana와 Villani([22])를 기초로 요약하였다.

기하의 어원은 "땅(geo-)"과 "측정한다(metry)"는 두 단어의 합성어로서 땅을 서술하는 도구로 기하가 시작되었음은 의미한다. 실용적인 목적에서 비롯된 고대 기하는

기원전 3세기경 유클리드에 의해 논리적인 체계로 다시 태어났다. 우리가 살고 있는 세계를 서술하기 위한 수단으로 발명된 기하는 그리스 시대 『원론』에서 정의, 공준, 공리, 명제 등의 개념을 도입하고 엄밀한 증명을 통한 이론체계의 성립을 시도한 논리적인 체계로 모습을 갖추었고 이러한 기하는 오랜 역사를 통하여 '정의와 공리에 따라 엄밀한 추론으로 구성되는 완전한 논리체계'이자 수학의 핵심으로 인식되어 왔다.

중세 이후 기하연구의 기본 아이디어는 유클리드 기하가 아닌 외부에서 비롯되었다. 15세기 미술에서 소실점을 포함하여 원근화법에 관한 체계적인 연구가 시작되었고, 17세기 기하와 대수의 결합인 해석기하가 등장하였으며 18세기 말에는 몽쥬 등에 의해 3차원 물체의 표현기법에 관한 체계적인 연구인 화법기하(또는 서술기하 descriptive geometry)가 기하학의 새로운 연구 분야로 탄생하였다. 즉 유클리드 기하와 별개로 사영기하, 해석기하, 화법기하가 생겨난 것이다. 그러나 새롭게 탄생한 이러한 기하는 유클리드기하와 우호적이었으며 유클리드의 논제에 대하여 대립관계에 있는 것이 아니었다([22]).

유클리드 기하를 뛰어 넘는 전혀 새로운 기하는 19세기 초 비유클리드 기하의 출현으로 비롯되었다. 비유클리드 기하의 발견은 유클리드 기하학이 더 이상 완전한 논리체계가 되지 못한다는 사실을 입증하였으며, 결과적으로 기하학의 기초에 관한 연구를 촉진하였다. 기하의 기초에 관한 연구 결과는 Klein의 *Erlangen Program*과 Hilbert의 『기하 기초론(*Grundlagen der Geometrie*)』으로 요약할 수 있다.

기하의 기초에 관한 연구에 뒤이어 대수의 기초에 관한 연구가 이루어졌다. 그 결과 Dedekind, Cantor, Weirstrass 등에 의하여 실수의 엄격한 기초가 정립되게 되었는데 여기에서 비롯된 대수체계의 무모순성이 기하의 무모순성을 보장하는 근거가 되었다. 즉 R^2로 표현되는 실수체계의 확실성이 기하의 대상인 2차원의 유클리드 평면의 확실성을 보장하게 된 것이다. Mammana 등은 이를 두고 "그때까지 기하의 확실성을 가정하고 대수의 확실성이 도출되었으나 19세기말에 이르러서는 그 방향이 정반대로 기하의 견고한 모델을 대수가 제공하게 된 것은 주목할 만하다"(([22, p.3])고 기술하고 있다. 또한 기하를 대수체계에 근거하여 이해함으로써 "결과적으로 대수의 추상성이 기하를 감각적인 경험 없이 n차원의 공간으로 확장시키는 역할을 하게 되었다"([22, p.3]). 20세기 초에 발명된 벡터공간 이론은 기하대상을 일반적으로 다룰 수 있게 함으로써 기하가 직관에서 더욱 거리가 멀어지게 되었다.

기하가 대수화되면서 더 이상 발전이 없는 듯 한 기하가 최근 수학 영역 외부로부터 시각적 측면에 관심이 재개되고 있는데 바로 컴퓨터그래픽, 이미지의 재구성과 처리, 패턴인식, 로봇 공학 등의 연구 분야에서 기하 응용에 관한 연구 성과가 그것이다([7], [25]). 컴퓨터 그래픽과 CAD(Computer Aided Design)를 위한 응용기하 교과서(e.g. [23])가 발간되는 등 최근 대학 학부 수준에서 활용과 관련하여 기하가 크게 주목을 받고 있다.

Ⅲ. 학교 기하 교육과정의 변천

기하는 우리가 살고 있는 세계를 이해하고 서술하기 위한 도구인 동시에 연역적인 논증의 도구 역할을 한다. 학교 기하의 목표 또한 이 두 가지 측면이 있으나 시대에 따라 이 두 가지 역할 사이의 상대적인 비중을 달리해 왔다. 20세기 초에 일어난 수학교육의 근대화 운동은 평면기하를 중심으로 논증을 중시하는 유클리드 일변도의 전통적인 기하교육에서 학교수학의 관심을 3차원 공간기하로 분산시켰고 기하의 서술적 측면에도 관심을 갖도록 하였다.

1. 세수학 이전의 학교기하

1892년 미국의 중등학교 교육을 위하여 구성된 10인 위원회는 기하교육의 목적을 '공간의 공리적 서술'([19, p.61])로 규정하고, 고등학교 수업에서 기하를 대수와 병행하여 다루되 고등학교 기하에서 형식논리 사용을 권고하였다([19]). 1895년 대학입학 필수 교과위원회는 구체적 기하(concrete geometry, 7~8학년), 화법기하(descriptive geometry, 9~10학년), 입체기하와 평면 삼각함수(11학년)를 고등학교 기하영역에 포함시켰다.

NEA 등이 기하교수요목을 위해 구성한 15인 위원회는 1911년 "학교 수학과 과학"이라는 보고서에서 기하교육에서 대수적 형태와 풀이를 강조하였는데, 기하의 많은 정리는 대수적 형태로 사용하면 명백해지고 대수개념을 강조하게 되는 이점이 있기 때문이라고 하였다. 이 보고서는 점, 선 등의 존재에 관한 공준의 필요성을 인지하지 않았으며, 입체기하의 유용성과 공간 직관의 함양을 위하여 초등학교에서 비형식적 기하의 필요성을 주장하였다. 이 보고서는 응용이 거의 없이 긴 증명 경향과 책의 마지막에 지나친 양의 연습문제를 두는 것에 주목하면서, 대수적 형태와 실제적 응용을 할 수 있는 문제를 늘리도록 주장하였다. 1911년과 1917년 사이에 수학교육의 주요 경향 4가지 중 하나로 "기하 내용 일부 삭제"([19, p.63])를 지목하였다.

미국수학연합회(MAA)는 1923년 발간한 『중등교육에서 수학의 재구성』(*The Reorganization of Mathematics in the Secondary Education*)([24])에서 수학교육의 1차적인 목표를 양과 공간 관계를 이해하고 분석하는 힘의 개발이라 하고, 산업사회에서 효과적으로 이 힘을 사용하게 하는 사고와 행동 습관 개발을 중시하였다. 이 보고서가 제시한 중등 수학교사의 최소 필수이수 수학교과는 다음과 같다.

a. 평면기하와 구면기하
b. 평면해석기하와 3차원 해석기하의 요소
c. 대학 대수

d. 미적분
e. 종합적 사영기하
f. 기하에서 과학적 훈련(scientific training in geometry)
g 대수에서 과학적 훈련(scientific training in algebra)
h. 이론과 실질 물리
i. 전문교과: 교육사, 교육원리, 교수법, 교육심리, 중등교육의 조직과 기능
h. 중등학교에서의 교육실습(20학점이상)

영국의 기하교과서는 1920년대까지 A, B, C, D, E 다섯 단계의 철학을 바탕으로 구성되어 있었다([15]). A와 B 단계는 물리학의 한 분야로 실질적인 예제와 함께 기하를 소개하며 공리의 형식적 논의는 피하고 물리적 '사실'에 주안점을 두었고, C 단계는 작도, 원, 닮음, 피타고라스의 정리 등 표준정리의 증명 방식을 소개하고, 측량을 목적으로 삼각함수 조기 도입되고 연습문제 다수가 외부세계와 관련되게 제시는 등 수학교육근대화 흐름을 반영하였으며. D단계는 해석기하, 원추곡선, 씨클로이드와 같은 특수 곡선, 약간의 현대기하를. E단계는 엄밀하게 공리적 접근은 아니나 반전기하와 사영기하 등을 포함시키고 있으며 17-18세의 극소수의 학생을 위한 것이었다.

20세기 전반기 중등학교의 기하교육의 특징을 다음과 같이 요약할 수 있다.

- 공간 이해와 공리적 서술을 모두 중시하였으나, 공리적 접근의 점진적 약화
- 학교 기하에서 대수적 형태와 풀이 강조, 함수에 대한 관심.
- 입체기하, 공간기하, 비형식적 직관 기하의 유용성과 필요성 인식.
- 응용 가능한 문제 강조.
- 수학 교사교육에서 기하가 중시: 평면 · 구면기하, 평면해석기하, 사영기하.
- 반전기하와 사영기하 등 극소수의 뛰어난 학생들을 위한 내용 포함.

비형식적 기하의 중요성과 유용성에 관한 인식은 있었으나 20세기 전반의 기하교육의 핵심은 여전히 논증이었으며 기하교과서는 정리와 증명이 주를 이루었다. 논증기하는 학습자들에게 기하의 기본 명제에 친숙하게 하고 비판적이고 반성적인 사고를 형성하고 개발하게 할 것으로 기대된다. 그러나 이 시기의 "논증 기하교과서는 어린 학생들을 대상으로 한 것이 아니라 성인을 대상으로 ... 만들었다"(Young, 1925, Fawcett, 1938에서 재인용)는 비판을 받았으며, 정선된 정리와 증명의 암기로 이어지는 논증기하 강의를 통하여 증명의 본질을 이해하거나 면밀한 추론, 또는 근거에 기초한 비판적 사고 학습이라는 교육목표 달성을 의심스럽게 한다는 문제점이 제기되었다.
이 시기에 논증기하 중심의 기하교육에 대안으로 제시된 연구가 Fawcett([13])의 『증명의 본질(*The Nature of Proof*)이다. Fawcett은 이 연구에서 중등학교 학생들이 기

하 강의 이전에 비형식적 증명 경험을 가지고 있다고 전제하였다. 공식적인 교과서를 사용하지 않고 학생들이 스스로 자기 속도에 맞추어 개인 또는 집단으로 정리를 추측하고 수정하며, 이를 정당화하는 절차를 개발하는데 수업의 초점을 맞춘 이 연구는 오늘날도 증명의 본질을 다룬 핵심적인 저술로 자주 인용된다.

2. 새수학 시기의 학교기하

1960대 학문적 수학을 학교교육과정에 반영한다는 전반적인 개혁의 움직임은 기하교육의 내용과 접근방식에도 큰 변화를 가져왔다. J. Dieudonné([10])는 1958년 OECD 세미나에서 유클리드 기하를 학교 수학에서 추방할 것을 주장하며 새수학이 대수 중심으로 구성되는데 크게 영향을 주었다. 새수학 시대의 기하교육의 특징은 실수체계를 기초로 한 접근과 공간기하의 약화로 요약할 수 있다.

(1) 실수체계를 이용한 접근

유클리드 기하의 논리적 약점을 극복하기 위한 대안이 이미 1900년경 힐버트에 의해 제시된 바 있다. 즉 힐버트가 유클리드 기하의 다분히 직관적인 공리를 엄밀한 공리체계로 대체함으로써 최초로 수정이 이루어진 것이다. 유클리드 기하의 논리적 결함의 또 다른 형태의 수정은 1930년대 Birkhoff가 계량 형태(metric form)로 공리를 재개정함으로써 이루어졌다([3, p.3]). 학문분야에서의 이러한 새수학의 흐름이 학교 기하에도 변화를 가져왔다. SMSG(School Mathematics Study Group) 교과서와 SMG(School Mathematics Geometry) 교과서는 각기 교사용 지도서 서론에서 전통적인 유클리드 기하의 논리적인 결함이 실수체계에 대한 불완전한 이해 때문이며 대수와 통합되지 못한 것에 원인이 있다고 보았다.

> 전통적인 유클리드 기하의 취약점은 수세기 동안 그리스 수학의 불충분한 대수와 실수체계에 대한 한정된 이해에 집착하였다는데 있다. 결국 대수와 산술은 기하와 동떨어져 있었고 대수적 또는 수량적 방법은 거의 적용되지 않았으며 기하 언어가 대수 언어와 통합되지 않았다. 오늘날 충분한 대수가 있고 실수체계에 대한 완벽한 이해가 있는 이상 이러한 약점을 더 이상 두고 볼 필요가 없다. ([36, p.3])

새수학 정신에서 저술된 SMSG 교과서와 SMG 교과서의 기하는 "버코프(Birkhoff)의 공리적 접근에 기초하였으며 기하, 대수, 산술의 통합된 언어로"([36, p.3]) 씌어졌다. SMG 교과서에 수록된 공준의 일부를 열거하면 다음과 같다 ([3, p.44]) .

> 공준 1. 주어진 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 있다.

공준 2 (거리공준)
서로 다른 두 점에 대하여 단 하나의 양수가 대응하여 두 점 사이의 '거리'라고 칭해진다. ([3, p.45])

공준 3. 자(ruler) 공준
한 직선 위에 다음과 같은 방식으로 실수와 대응하는 점들이 있다.
1. 직선 위의 각 점에 단 하나의 실수가 대응하고,
2. 각 실수에 대하여 직선 위의 단 하나의 점이 대응하며,
3. 두 점 사이의 거리는 각 점에 대응하는 두 실수 사이의 차의 절댓값과 같다.

공준 10. 각의 측정 공준
각 각에 대하여 0과 180 사이의 실수 r이 단 하나 대응한다. 이 r을 그 각의 크기(measure) 혹은 각도(degree measure)라 부른다.

위에 열거한 두 점을 지나는 직선의 유일성(공준 1)은 도형 자체를 대상으로 하며 유클리드 『원론』의 공준과 동일하다. 그러나 거리 공준(공준2), 거리측정 공준(공준3), 각의 측정공준(공준 10) 등은 측정 개념을 매개로 기하를 실수체계와 관련시킨다. Birkhoff는 1932년 공준 2 (거리공준), 공준 3 (자 공준), 각의 측정에 관한 공준을 도입하여 실수체계를 기하에서 효과적으로 사용할 수 있게 하였다 ([3]). 버코프에 기초한 기하는 유클리드 기하가 다루는 도형을 대상으로 하나, 도형의 관점에서 구성한 유클리드의 공준과 달리 측정의 개념을 도입하여 실수체계와 관련시킨 공리를 도입하여 전통적인 유클리드 기하의 논리적 결함을 극복하려고 하였다.

(2) 공간기하 약화

이 시기에 중등학교에서 공간기하와 관련하여 두 가지 주목할 만한 변화가 있었다. 하나는 한 학기의 공간기하 강의가 급격히 사라져가고 많은 중학교에서 공간기하를 직관적으로 소개하기 시작하였다는 점이고, 다른 하나는 공간기하 일부가 정규 기하 강의에 포함되었다는 점이다(p.4). 주변세계의 서술 도구로서의 기하(직관기하)가 비계량 수학이라는 이름으로 교육과정에 포함되었다. 2차원의 평면기하는 대수적 기법이 새롭게 강조되면서 동시에 엄밀한 논증과정이 강조되었고 동시에 공간기하는 내용이 약화되어 직관기하로 소개된 것이다.
1966년 5세부터 18세 학생들을 대상으로 하는 개별화된 교육과정으로 제시된CSMP (Comprehensive School Mathematics Program)는 중학교에서는 직관기하(*Intuitive Geometry*)라는 이름으로 점, 선 면 등의 종합기하를, 고등학교에서는 형식기하를 다루었다([4]). 직관기하에서는 합동이나 닮음을 가르치기 위한 수단으로 선대칭, 점대칭

을 다루었으며 평행이동으로 벡터를 도입하고 벡터 평면에서의 성질을 다루는 것으로 중학교 기하를 끝내고 있다. 고등학교 기하는 동서양의 수학의 기원에서 시작하여 2, 3차원의 아핀 기하, 힐베르트 체계를 다루고, 유한 사영기하, 비유클리드 기하를 제 5 공준의 역사에서 출발하여 비형식적으로 도입하였고, 평면 및 공간기하를 선형대수를 이용하여 다루었다([4]). 이 시기의 중등학교 기하 교육을 논의한 2차 CSMP 국제학회의 프로시딩([38])에는 유클리드 기하 외에 위상수학, 대수기하, 변환기하, 유클리드 기하의 변환적 접근, 공리체계 등을 주제로 다룬 논문들이 다수 포함되어 있어 이 시기의 기하 교육에서 대수적 접근과 공리적 체계로서의 양상이 두드러지게 나타나고 있음을 알 수 있다.

(3) 형식성 강화

Bassler와 Kolb([4])은 중등학교 예비 수학 교사들을 위한 교재에서 기하교육을 통해 학생들에게 가르쳐야 할 3가지 측면을 다음과 같이 지적한다(p. 359).

- 공준, 정리, 정의에 관련된 기하학적 내용을 이해하고 적용하기.
- 논리적 주장과 형식적 증명을 발견하고 쓰기.
- 추측을 하고 검증하며 정의를 만들기.

Bassler와 Kolb은 기하학적 내용을 '증명, 그림, 예, 연습문제, 설명이 전혀 없는 기하에 관한 진술의 긴 목록'([4, p.359])이라고 서술하고, 중등학생들에게 이 내용을 증명에 앞서 이해시켜야 하며 이와 같은 교수 능력을 향상시키기 위한 연습문제들을 제공하고 있다. 여기에는 논리체계와 정의의 이해 개발을 위하여 '추측과 검증을 통해 요철(gib)이라는 용어의 정의를 만들도록' 요구하는 연습문제가 포함되어 있다([4, 372]). MacPherson([21])에 따르면, 새수학은 대부분의 학생들은 장래에 결코 만날 기회가 없는 수학을 준비시키기 위하여 고등학문에서나 중요한 의미를 갖는 정리들을 지나치게 초등화하여 중등 수학에 포함시켰으며, 그 결과 배경이 되는 수학을 잘 알지 못하는 교사와 학생들이 수학 내용의 핵심적 의미와 강조점을 왜곡 이해하여 실패하게 되었다.

> 1960년대와 70년대 개혁에서 우리는 연역적 강좌에서 몇 가지 변화를 시켰다. 정확한 정의를 강조하였고 다소 덜 형식적인 증명은 삭제시켰다. 예를 들면, 각을 동일 직선 위에 있지 않은 끝점이 같은 두 반직선의 합집합으로 정의하였으며, 각과 각의 크기를 구분하였다. 그러나 어떤 용어들은 적당히 넘어갔다. 그러나 비형식적인 교육과정에서 결과는 참담했다.([21, p. 66])

Thom([39])은 새수학 시기의 유클리드 기하 추방 움직임을 '기하의 공리체계가 불완

전하고 정교한 기하 학습 결과에 대한 실용성이 의문시된다는 이유 때문에 학교 수학에서 유클리드 기하를 추방하려 한다'며 반박한 바 있다. Thom이 언급한 유클리드 기하의 삭제는 내용 보다는 기하를 다루는 방식을 의미하는 것으로 보아야 할 것이다. 그 이유는 전통적으로 유클리드 기하학이 다루는 내용인 도형을 이 시기의 학교 수학에서 삭제된 것은 아니며 도형을 다루는데 있어서 전통적인 기법대신 대수적 기법이 새롭게 강조되었고 논리전개의 엄밀성과 정확한 용어 사용이 강조되어 기하의 논증 과정은 이전보다 더욱 복잡한 형태를 띄게 되었기 때문이다.

그림1은 Anderson 등([3])이 저술한 *School Mathematics Geometry*의 목차이다.이 교과서의 목차에서 실수체계에 기초한 접근, 공간기하 약화, 형식성 강화라는 이 시기 기하교육의 특징을 발견할 수 있다. 이 교과서에서 주목할 만한 부분이 집합과 집합의 연산(2장), 계량형태의 공리를 기초로 한 수직선, 선분 또는 두 점 사이의 거리의 도입(3장)이다. 또한 공간 기하가 독립과목에서 기하교과에 통합(9, 10, 16장)되어 약하게 다루어지고 있으며, 연역체계(1, 7장)에 대한 설명이 포함되어 있다.

1. 상식과 조직된 지식	11. 공간에서의 평행
2. 집합과 실수	12. 수학적 모델과 응용
3. 거리	13. 다항식 영역의 면적
4. 선, 평면, 분할	14. 닮음
5. 각과 삼각형	15. 평면좌표기하
6. 합동	16. 원과 구
7. 증명 들여다보기	17. 공점(concurrency)과 작도
8. 기하 부등식	18. 원과 관련한 측정
9. 공간에서 수직인 직선과 평면	19. 벡터와 삼각함수 입문
10. 평행에서의 평행선	20. 부피와 입체

그림 1. *School Mathematics Geometry*의 목차

이 시기의 대표적인 다른 중등학교 수학 SMSG 교과서([36])에는 중학교 1, 2학년에서 직관기하로서 평면 기하(1학년), 비계량기하(2학년)를 별도의 장(章)으로 포함시키고 있으며, 중학교 2학년에서 평면과 입체를, 고등학교 1학년에서는 유클리드 평면 및 입체기하학을 주요 내용으로 담고 있으며, 사선과 반직선을 구분하는 등 용어의 정확성을 추구하고 있다.

3. 새수학 이후의 학교 기하: 1980년대를 중심으로

새수학 이후 기하 교육의 특징은 크게 두 가지 방향에서 나타났다. 하나는 중등학교에서 고등수학을 초등화하여 알고리즘이나 정의 등을 앞서서 가르치는 형식적 기하교육 대신에 비형식 기하(informal geometry)를 강조하는 것이고 다른 한 가지는 기하

를 중등 수학의 다른 영역과 통합하거나 기하의 접근 방법에 현대 수학의 기법을 다양하게 적용하는 것이다.

(1) 비형식적 기하 강조

MacPherson(1985)은 비형식적 기하 활동들은 기하 아이디어를 통찰할 수 있게 하고 학습자들에게 친숙한 내용으로 하되 "아이디어와 목표가 형식기하를 위해 충분히 난이도가 있는"(p.68) 것이어야 한다면서, 이러한 기준을 충족시키는 활동 주제로 도형의 불변성, 대칭, 닮음, 최대-최소, 궤적, 합동, 동상(homeomorphism), 극한(limit, squeeze), 좌표를 제안하고 있다.
비형식적 기하 탐구를 형식적 기하 학습의 준비과정으로 정당화시킨 데에는, 1970년대 중반 이후 미국에 소개([40])된 van Hiele 모델이 크게 영향을 끼친 것으로 보인다. P. van Hiele는 연역적 증명이나 수학적 엄밀성을 추구하는 기하 학습의 어려움은 사고수준의 질적 차이에서 온다고 가정하고, 성공적인 기하학습을 위하여 형식적 연역에 앞서 도형에 대한 시각적, 분석적, 관계적 탐구가 선행되어야 한다고 주장하였다. 이 모델을 적용하여 기하 교육을 변화시키려는 노력이 뒤따랐으며, 논증 도입 이전에 비형식적 기하 탐구에 전반부 지면의 상당부분을 할애한 고등학교 기하 교과서([16])가 출판되기도 하였다.

(2) 내용과 접근방식에서 수학적 연결성 강조

기하를 독립과목으로 설정하여 고등학교 1학년에서 1년 동안 가르치는 대신[1] 대수, 기하, 해석을 통합하여 고등학교 전학년에 걸쳐 배우게 하자는 SSMCIS (Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study)([30])의 제안에 따라 Craine([9])은 기하의 여러 접근의 통합하여 1년 동안 기하코스를 개발하였다. 1982-83년 1년 동안의 Caine은 비형식적 접근으로 시작하여, "전통과 현대의 합병"(p.120)을 추구하며 좌표기하, 변환, 추론과 공리체계, 형식적 증명을 통합하여 내용과 접근 방식에서 연결을 강조하였다.

(3) 교과서 저술방식 변화

이 시기 대다수의 기하교과서는 비형식적 접근과 응용을 다소 강조하기는 하였을 뿐 내용구성에 있어서 획기적인 변화는 없었다. Neubrand([30])는 이 시기 독일 기하교과서의 특징에 대하여, 사진 등을 포함시킴으로써 개념 형성을 응용과 관련시켜 다루었고, 동일한 주제라도 열린 문제의 형태로 제시하고 있고, 복잡하고 엄밀한 언어 대신

1) 미국에서의 기하교육은 대체로 10학년에 1년간 이루어짐.

간단하고 상식적인 언어를 사용하는 경향이 있다고 보고하였다. 이와 같은 경향은 우리나라를 포함하여 1980년대 기하교과서에서 일반적으로 발견되는 특징이기도 하다. 그림 2는 van Hiele 모델에 기초한 기하교과서(Hoffer, 1979) '원과 구' 단원에서 시차를 호와 부채꼴의 중심각과 관련시키는 활동으로 기하 내용을 실질적인 상황과 관련시켜 다룬 사례이다.

Make a time dial like the one shown. Use stiff paper or cardboard. The circles are concentric, and the smaller disc of locations may be attached to the larger one with a paper fastener.

1. What is the degree measure of an arc between two consecutive hours?
2. What is the degree measure between Los Angeles and New York?
3. What is the degree measure between Azores and Israel?
4. What places on the dial are four time zones away from Chicago?

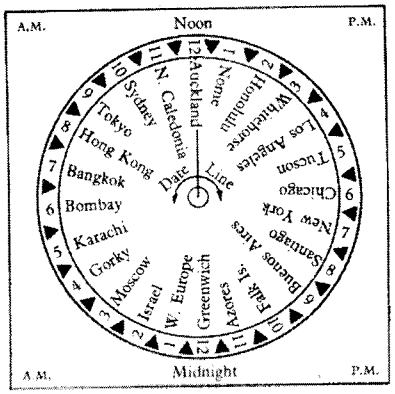

그림 2. 실험실 활동 (Time Zones) (출처: Hoffer(1979, p.187)

4. Standard 시대의 학교 기하: 1990년대

(1) 기하교육의 특징

1990년대 이후 기하교육에 관한 관점이 크게 변화되었다. 이 시기의 수학교육에 크게 영향을 주고 있는 *Curriculum and Evaluation Standards*([28])는 중등학교 기하영역에서 기하 교육과정에서 강조점의 변화를 몇 가지로 요약할 수 있다. 공리체계로서 유클리드기하를 다루기보다는 모든 학년 수준에서 내용 통합에 강조점을 두며, Ceva 정리 등 결합정리나 직선 위의 세 점 사의의 관계에 관한 정리를 증명하기보다 해석적 방법과 변환에 주목하고, 기하를 종합적 관점에서 보기보다는 연역체계로 이해하는데 관심이 증가하고 있다. 또 별도 강좌로 해석기하를 개설하기보다 실생활에서의 응용과 모델링을 강조하며, 다각형이나 할선 등 평면도형에 집중되던 관심을 3차원 기하에도 관심을 두며 여기에 컴퓨터 소프트웨어를 활용할 수 있게 하며, 증명 표현에서 2열(2-column) 증명 대신에 말과 글로 표현하는 방식에 관심이 증대되고 있다. 이러한 변화를 표로 정리하면 다음과 같다.

표 1. 1990년대 중등학교 기하교육과정에서의 강조점의 변화

관심이 증가하는 것	관심이 감소하는 것
· 모든 학년수준에서 내용 통합	· 완벽한 공리체계로서의 유클리드 기하
· 해석적 방법과 변환적 방법	· 결합정리와 betweeness 정리의 증명
· 연역체계	· 종합적 관점에서의 기하
· 연역적 주장을 말과 글로 표현하기	· 2-column 증명
· 컴퓨터를 이용한 2-, 3차원 도형 탐구	· 내접 및 외접다각형
· 3차원 기하	· 할선에 관한 정리
· 실생활에서의 응용과 모델링	· 별도강좌로서의 해석기하학

(NCTM, 1989, p. 179 표 재구성)

NCTM([29])은 이른바 *Standard 2000*에서 1990년대 중등학교 교육과정의 방향을 제시하면서 5-8학년에서의 기하 교육과정은 비형식적 탐구를 중심으로 기하학적 도형의 관계성과 공간감각을 개발하여 이후에 이루어질 형식적 추론을 용이하게 하는 것이어야 한다고 주장한다. *Standard 2000*은 고등학교에서는 기하를 종합적인 동시에 대수적으로 다룰 수 있도록 좌표, 변환, 벡터적 접근과 논증을 함께 고려하도록 하고 있으며 이 과정에서 컴퓨터 소프트웨어를 적절히 효율적으로 사용할 수 있다고 하였다. *Standard 2000*에 나타난 기하교육은 그 초점을 약간 달리할 뿐, 1989년 NCTM의 *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Standard*와 내용과 방향에서 크게 다르지 않다. *Standard 2000*은 10개의 규준(Standard) 중 '기하와 공간감각(Standard 3)'과 '증명과 추론(Standard 7)'을 각기 내용규준(content standard)과 과정규준(process standard)으로 포함시키고 있는데 이것은 논증을 포괄하여 증명(proof)과 추론을 수학교육의 핵심적인 요소로 강조하고 있으며 공간 감각을 비형식적 기하 영역에 포함시킴으로써 비형식적 기하 영역을 중시하고 있음을 알 수 있다.

요약하면, 1990년대의 기하교육은 1980년대의 특징을 유지하면서 실생활에서의 응용과 모델링이 중시되며 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 도형의 탐구에 관심을 보이고 있으며 최근 출판된 대학과정의 교재 *Geometry by Discovery* ([14])나 미국의 중등학교 기하 교과서나 *Geometry in Action* ([18]), *Fractals: A Tool Kit of Dynamic Activities* ([7]) 등의 기하 활동자료집이 이러한 특징을 잘 보여준다.

(2) 사례로 본 1990년대 이후 기하교과서

- *Discovering Geometry: An Inductive Approach* ([5], [34])

*Discovering Geometry*는 "분리된 사실과 절차를 암기를 강조하고 지필고사를 중시하는 교육과정에서 탈피하고 개념적 이해, 다중표현과 연결성, 수학적 모델링, 문제해결

을 강조"할 것을 주장하는 *Standard*([28]) 정신을 구현하기 위하여 개발된 고등학교 기하교과서([6, p.3])로, '귀납적 접근'이라는 부제에 걸맞게 학생들이 컴퓨터나 조작물 등 다양한 도구를 사용하여 관찰과 실험으로 기하학적 성질을 발견하도록 교재를 구성하였다. 여기에서 귀납적 접근이란 "비형식적으로 안내된 발견의 접근"([6, p.2]) 방식이다.

> *Discovering Geometry*는 학생들이 스스로 자신의 학습에 책임을 지도록 격려한다. 이 책은 학생들을 참여하도록 초청하며 참여를 요구한다. 이 책은 스스로 동기 유발되고 독자적으로 사고하게 만든다. 학생들은 표준적인 문제와 비정형 문제를 해결할 뿐 아니라, 자기의 정의를 쓰고 그들 자신의 예술 작품을 창조하고, 자신의 작도를 발명하고, 관계를 발견해낸다. … ([6, p.2])

*Discovering Geometry*는 협동학습을 권고하고 있으며 전체 내용을 그래픽계산기와 소프트웨어 *Geometer's Sketchpad*의 사용과 통합하여 내용을 구성하고 있다. 각각의 목차는 그림 3과 같다.

1장. 기하적 예술	12장. 닮음	1장. 기하 발견하기
2장. 귀납추론	13장. 삼각함수	2장. 추론과 증명
3장. 기하 소개	14장. 연역추론	3장. 평행선과 삼각형
4장. 기하도구사용하기(작도법)	15장. 기하증명	4장. 합동인 삼각형
5장. 직선과 각의 성질	16장. 증명의 계열	5장. 다각형과 사각형
6장. 삼각형의 성질		6장. 닮은 삼각형
7장. 다각형의 성질		7장. 좌표기하
8장. 원		8장. 넓이
9장. 넓이		9장. 원
10장. 피타고라스 정리		10장. 겉넓이와 부피
11장. 부피		11장. 변환기하

그림 3. *Discovering Geometry*(KCP)와 *Geometry*(CORD) 목차

- *Geometry: Mathematics in Context* ([8])

이 책은 '추상적 기하 개념과 실세계 응용 사이의 간격을 연결하는 교량'으로 대수, 확률, 통계, 이산수학과 삼각함수를 통합하는 포괄적인 기하 교과서이다. 개념은 실생활 맥락에서 소개되며, 학생은 개념이 어떻게 작용하는가를 발견하는 적극적인 학습자이며, 학생들은 자신의 개념이해와 응용능력을 끊임없이 보여야 한다.
또 이 책은 학생들로 하여금 수학적 원리를 실생활상황에 적용하고 문제해결기술을 개발하도록 하며, 학생들에게 쌍방형 소프트웨어로 기하개념을 경험하게 한다. 책 전체를 통하여 다양한 세팅에서의 기하 응용이 강조된다. 이 책은 그래픽 계산기와 Geometer's SketchPad 활용이 수업내용, 활동, 실험을 통해 통합되어 있다([8, p.T24])

• *Mathematics in Context* (NCRMSE & Freudenthal Institute, [26])

모두 40권의 소책자들로 구성된 이 시리즈는 대부분의 사람들이 실제로 기하를 사용하는 방식은 연역체계(증명)를 세우는 것 보다 공간감각을 강조하는 것과 관련이 있으며 공간감각을 이해하게 하는 것이 학생들로 실제세계에서 문제를 해결하게 할 것이라는 Freudenthal의 '공간이해'에 기초하여 기하영역을 구성하였다([27, p.54]). 이 책의 모든 기하 단원에서 공통적으로 다루는 주요 요소는 '시각화와 표현'이다. 5학년부터 중 2-3학년까지를 대상으로 저술된 이 시리즈는 기하 영역의 주요 목적을 "학생들로 하여금 보이는 것을 다른 관점에서 서술할 수 있게 하며, 한 지점에서 다른 지점으로 길을 찾는데 방위(orientation)와 나침판을 사용할 수 있게 하는 것"([27, p.54])으로 보고 '방위와 나침반', '모양과 작도'라는 두 가지 소주제에 대하여 모두 9개의 소책자를 시리즈로 제시하고 있다. 기하영역시리즈를 요약하면 다음과 같다([p.54-57]).

표 2. *Math in Context*의 기하 영역 구성

주제 / 학년수준	시 각 화 와 표 현	
	방위와 나침반	모양과 작도
5/6	옆에서 보기 방위(좌표,극좌표,지도)	
6/7		재배치 (면적, 둘레, 부피) 측정단위(신체단위, 표준단위, 단위계)
7/8	각 들여다보기(시선, 보기, 탄젠트)	3차원도형과 다각형 삼각형과 이동(평행, 회전이동, 합동)
8/9		삼각형과 조각잇기(합동,닮은 디자인)
	거리를 가기(다양한 문제해결)	

마지막 단계의 책자 "거리를 가기"에서는 기하 영역을 통하여 학습한 개념과 기능을 연결하고 확장하며 형식화를 요하는 다양한 문제를 해결하게 한다. 두 정점에서 같은 거리에 있는 점의 작도, 피타고라스의 정리, 벡터, 등고선, 기울기 탄젠트 등의 개념을 문제해결에 사용하도록 하는 다양한 상황이 제시되어 있다. 중학교 2-3학년까지 형식적인 증명은 다루지 않게 되어 있다.

• *Connected Geometry*([12])

*Connected Geometry*는 미국 Education Development Center(EDC)가 NSF의 지원으로 개발한 기하교과서로 '정신의 수학적 습관(Mathematical Habits of Mind)'이라 칭한 핵심적인 수학적 사고방식 개발에 초점을 두고 있다([12, xiv]). 이 프로그램이 기하 학습을 통해 추구하고자 하는 핵심적인 정신습관은 다음과 같다([12, xiv-xix]).

○보이는 것과 보이지 않는 것을 그림으로 그리기
○도형을 분석하고 해석하기
○서술과 분석에 정교한 언어 사용하기
○문제를 사색하기
○실험과 연역을 조화시키기
○불변하는 것 찾기
○과정에 관해 추론하기
○연속성있게 추론하기
○증명하기
○다른 체계 사용하기

Ⅳ. 21세기 기하 교육에 관한 견해

1. 기하와 기하교육의 목적 인식

기하와 기하교육에 대한 새로운 시각은 기하의 응용 범위와 관련하여 제기된다. Steen과 Forman([37])은 학교 수학에 대한 전망에서 수학 영역에 대한 사회적 관심을 기술하면서 그 응용의 범위 때문에 대수보다 기하가 더 유용하다고 하였다.

> 직업과 생활에서 작업과 생활에서 수학을 관찰해 보면 인구 비율로 보아 기하를 유용하게 이용하는 인구가 대수를 이용하는 인구보다 훨씬 많다. 기본적으로 실제 대상에 관한 구체적인 수학은 3차원 기하와 삼각함수를 크게 강조할 것을 요구하고 있다. 문제해결 상황에서도 역시 기하가 문제를 진단하고 해석하는데 더욱 가치가 있는 것으로 보인다. 즉 대부분의 실생활 문제에 직면했을 때, 방정식을 푸는 것보다 시각화와 스케치가 더욱 유용하다.…([37, p.236])

1980년 제 4차 ICMI에서 J. Dieudonné는 기하가 "전통적으로 좁은 범위에서 갑자기 튀어나와 […] 그 잠재력과 비범한 다방면에 응용가능성을 드러내왔으며 그래서 수학의 모든 분야에서 가장 보편적이고 유용한 도구가 되었다"(J. Dieudonné: *The Universal Domination of Geometry,* ZMD 13(1), pp.5-7 (1981), [22 p.338]에서 재인용)고 역설하였다. 연역추론의 도구나 도형에 관한 연구로서의 역할을 넘어서 수학의 모든 영역의 응용 분야에서 탁월한 잠재력을 보이는 기하에 주목하고 있는 것이다. J. Dieudonné([10])는 1958년 OECD세미나에서 유클리드 기하를 학교 수학에서 추방할 것을 주장하며 대수 중심의 새수학에 크게 영향을 미친 수학자로 잘 알려져 있다. 그러한 그가 기하의 유용성 때문에 수학의 모든 영역에서 기하의 역할을 중시하고 있

음은 주목할 만하다.
1992년 캐나다 퀘벡에서 열린 제 7차 ICMI에서는 기하교육의 측면이 매우 다양하게 논의되었다([22, p.338]). 기하를 공간의 과학, 형식이론으로 발전 가능한 사고와 이해의 방식, 연역추론교육의 사례, 응용의 도구로 이해할 뿐 아니라 수학과 과학의 개념과 과정을 시각적으로 표현하는 방식이며 이론으로서의 수학과 모델 자원으로서의 수학이 만나는 지점으로서의 역할을 고려하고 있다. 즉 표현양식과 모델링 도구로서의 역할에 관심을 갖는다는 점에서 21세기 기하교육의 중요성은 필연적으로 그 응용과 관련된다고 할 수 있다.

2. 기술공학과 기하교육

기술공학의 발달은 연역적 접근이 주도하던 기하 교육의 접근 방법을 다양화 시켰다. 조작물의 활용, 직관적 접근, 귀납적 접근, 분석적 접근 방식으로 구분하였다. 최근 기하를 정적기하와 역동적 기하로 구분([22, p.339])하기도 하는데 이러한 구분은 전적으로 컴퓨터 소프트웨어의 출현에 의한 것이다.
ICMI연구를 기초로 *Cabri*나 *Geometer's Sketchpad*(GSP)와 같은 탐구형 소프트웨어와 기하교육과의 관계를 살펴보기로 한다.

(1) 시각화 도구 활용

시각적 표현과 해석 능력은 중등학교 수준의 기하학습을 위해 필수적인 능력의 하나이며, 공간적 표현은 고등 수학적 사고의 총체적이고 필수적인 측면이다. 일반적으로 '그림을 그리는 것'은 문제의 재구성이나 정보의 개략적 표현을 가능하게 하며 문제해결을 돕기도 한다. 시각화 도구가 제공되지 않는 환경에서 복잡한 대상과 관련된 기하 문제는 부정확한 그림과 학습자의 정신적 시각화 능력에 전적으로 의존해야 하므로 문제해결이 용이하지 않다.
Brousseau는 학습자가 답을 정교화 하는 과정을 '학습자와 문제를 해결하기 위하여 학습자로 하여금 무언가 행동을 할 수 있게 하며 학습자의 행동에 피드백을 주는 환경 사이의 상호작용'으로 간주하였는데, Laborde는 *Cabri*와 같은 쌍방형 컴퓨터 소프트웨어가 바로 기하교육에서 이러한 환경을 제공한다고 주장한다([20]). 특히 도형을 시각적으로 변화시킬 때 불변의 특징을 인식하는 것이 중요하며 이것이 학생들을 기하 학습으로 안내한다. 컴퓨터 소프트웨어는 기하 문제해결이 가능한 환경을 제공하며 기하 문제해결시 시각적 증거를 제공하고 문제해결과정에서 학습자가 사용하는 전략을 관찰가능하게 한다([20]).

(2) 기하추론 영역 확대: 경험적 추론과 연역적 추론

테크놀러지의 발달은 기하 영역에서 추론의 범위를 확장시키고 있다. 기하추론의 핵심은 연역추론이며, 이는 기하의 핵심을 논증으로 보는 것이다. 그러나 논증의 대상이 되는 성질이나 원리의 발견은 연역추론 보다는 경험에 근거한 귀납추론에에서 비롯된다. *Cabri*나 *Geometer's Sketchpad*와 같은 작도 소프트웨어는 대상의 이동을 용이하게 함으로써 "~이라면 어떨까?" 또는 "~이 아니라면 어떨까?"라는 질문에 관한 탐색환경을 제공한다. 그러므로 컴퓨터소프트웨어는 학습자에게 논증과 연역추론 중심의 기하를 넘어 경험적 추론과 귀납을 통한 발견을 가능하게 한다.
뿐만 아니라 정교한 작도도구는 복잡한 기하대상과 관련된 정리에 대하여 연역적 증명의 단서를 제공하기도 한다. 즉 "왜 그러한가?"라는 질문에 핵심적인 단서를 정확한 그림으로부터 발견할 수 있게 한다([2], [17]). 즉 컴퓨터가 기하의 대상 사이의 관계에 초점을 맞추어 귀납 추측이 가능한 경험의 장을 제공하며 동시에 학습자로 하여금 자신의 추측을 정당화시키도록 증명의 실마리를 제공하는 도구의 역할을 하기도 한다.

(3) 기하 내용의 변화: 공간감각과 디자인

많은 직종에서 활용되며 특히 컴퓨터소프트웨어가 제공하는 정확하고 세밀한 그래픽 표현은 컴퓨터보조디자인(CAD: Computer Aided Design) 소프트웨어의 개발을 가능하게 하였으며 CAD 소프트웨어를 효율적으로 활용을 위한 근간은 학교 기하교육을 통해 습득된다. 그러므로 학생들이 새로운 도구를 성공적으로 사용하는데 도움이 되도록 기하교육과정을 제공해야 한다([32]). 이러한 변화의 하나가 기하의 응용과 관련하여 공간감각에 주목하게 된 것이며 Standard 2000에서 공간감각을 학교 수학의 주요 규준으로 포함된 것은 이러한 경향과 무관하지 않은 것으로 보인다.
CAD는 3차원 도형을 시각화하고 해석하고 변환시키는데 어려움을 보이는 학습자들을 도와서 공간감각의 학습을 가능하게 한다. 뿐만 아니라 도형의 변환과 이동, 공간채우기(테셀레이션)도 *Cabri* 등 소프트웨어의 지원으로 디자인과 연결되어 기하에서 학습의 범위와 깊이를 용이하게 확장시킬 수 있는 주제로서 1990년대부터 학교기하에서 주목을 받고 있다.

V. 맺는 말

교육과정의 역사적 변천 과정과 그 배경을 이해하는 것은 미래 교육의 방향 설정을 위하여 숲을 바라보는 것과 같다. 유클리드를 중심의 논증기하가 중등학교 교과가 된 19세기 이래, 대수와 실수체계를 중심으로 하며 공간기하의 약화, 형식성을 강조하던

새수학의 기하는 1980년대 이후 비형식기하가 강조되고, 내용과 접근방식에서 수학적 연결성과 모델링이 강조되는 방향으로 흐르고 있다. 21세기 기하교육은 공간의 과학, 형식이론으로 발전 가능한 사고와 이해의 방식, 연역추론교육의 사례, 응용의 도구로서의 역할 뿐 아니라 수학과 과학의 개념과 과정의 시각적 표현방식, 그리고 이론수학과 응용이 만나는 모델링 도구로서의 역할이 중요하게 고려되는 방향으로 발전하고 있다.

Standard 2000([29])이 증명과 추론을 수학교육의 핵심 요소로 강조하는 외에, 공간감각을 비형식적 기하 영역에 포함시킴으로써 비형식적 기하 영역을 중시하는 등 공간감각을 수학교육의 중시한 것은 시각적 표현양식으로서의 기하 역할 인식을 반영한 사례라 할 수 있다. 새로운 시대의 기하는 응용과 모델링의 도구로서의 측면이 강화될 것과 추론과 문제해결의 영역과 디자인과 관련된 요소들이 크게 강화될 것을 요구한다는 ICMI 연구는 우리나라 기하교육에도 시사하는 바가 크다.

지금까지 우리나라의 중등학교 기하교육과정은 교육과정 변천의 세계적 경향을 반영하여 기존 교육과정을 근간으로 하여 삭제, 약화, 첨가, 학년조정, 내용범위조정을 거듭하며 조금씩 변형을 해 왔기 때문에 내용에 있어서 제 3차와 4차 교육과정의 차이를 제외하고 이후부터는 그 이전과 크게 다르지 않다. 제 7차 교육과정([1])은 국민공통기본교육과정의 '도형' 영역 지도에서 도형의 기초적인 성질을 이해하고 연역추론을 완성할 수 있도록 지도해야 하며, 도형의 성질을 알기 위하여 직관, 조작물, 컴퓨터 소프트웨어의 사용을 명시([1, p.56])하고 있으며, 제 7차 교육과정에 따른 중학교 교과서 대부분은 컴퓨터 소프트웨어를 사용하는 화면이 삽입되어 있다. 그러나 광범위한 응용가능성으로 인해 학문과 사회에서 그 적용범위가 시각화와 모델링 도구로서의 역할을 변화를 반영하는 수준과는 거리가 멀다고 할 수 있다. 기하 교과에 대한 사회적 요구를 조사하여 교육과정에 반영하는 등 내용 영역별로 21세기를 위한 교육과정의 흐름을 큰 틀에서 재고할 필요가 있으며 아울러 이러한 변화의 방향이 중등학교 교사양성기관의 교육과정에도 적극적으로 반영되어야 할 것이다.

참고 문헌

1. 교육부. (제 7차) 수학과 교육과정, 교육부고시 제 1997-15호. [별책 8]. 서울: 대한교과서주식회사, 1997.
2. 장경윤, 황우형, 이중권. "탐구형기하소프트웨어 활동자료 개발 및 그 효과", 수학교육학연구. 11(1) 대한수학교육학회 (2001) 193-206.
3. Anderson, R., Garon, J. & Gremillion, J.*School Mathematics Geometry. Teachers' Manual.* New York: Houghton Miflin Co. 1966.
4. Bassler, O. & Kolb, J. *Learning to teach secondary school mathematics.* New

York: Intext Educational Publishers. 1971 .
5. Bergez, J. *Discovering Geometry. An Inductive Approach Teachers' Guide and Answer Key*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press. 1997.
6. Block, S. (ed.) *Discovering Geometry. Teacher's Guide and Answer Key. 2nd ed.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press. 1997.
7. Choate, J., Devaney, R. & Foster, A. *Fractals: A Tool Kit of Dynamic Activities*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press. 1999.
8. CORD. *Geometry: Mathematics in Context* Waco, TX: CORD Communications. 2004.
9. Craine, T. (1985). "Integrating Geometry into the Secondary Mathematics Curriculum." In C. Hirsh & M. Zweng (eds.) *The Secondary School Mathematics Curriculum: 1985 Yearbook*, pp. 119-133. Reston, VA: NCTM.
10. Dieudonné, J. "New thinking in School Mathematics," In H. Fehr (ed). *New Thinking in School Mathematics*. (pp.16-19) OECD. 1961.
11. Dieudonné, J. "The Universal Domination of Geometry" *ZMD* 13(1), (1981) pp.5-7.
12. Education Development Center (EDC). *Connected Geometry*. 2000.
13. Fawcett, H. (1995) *The Nature of Proof. Thirteenth Yearbook*. (originally published in 1938) Reston, VA: NCTM. 장경윤, 류현아, 한세호 (역). 증명의 본질. 경문사: 서울. 2006.
14. Gay, D. *Geometry by Discovery*. New York: John Wiley & Jones, Inc. 1998.
15. Griffs, B. "The British Experience." In C. Mammana & V. Villani. (eds.) *Perspectives in teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study*. pp. 194-203. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.
16. Hoffer, *A. Geometry: A Model of the Universe. Reading*, MA: Addison-Wesley Publishing Co. 1983.
17. Hoyles, C. & Jones, K. "Proofs in Dynamic Contexts." In C. Mammana & V. Villani. (eds.) *Perspectives in teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study*. pp. 121-128. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.
18. Kimberling, C. *Geometry in Action*. Emeryville, CA: Key Curriculum Publishing. 2003.
19. Krulik, S. & Weise, I., *Teaching Secondary School Mathematics*. PA: W.B. Saunders Co. 1975.
20. Laborde, C. "Visual phenomina in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment." In C. Mammana & V. Villani. (eds.)

Perspectives in teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study. pp. 113-121. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.

21. MacPherson, E. D.. "The Themes of Geometry; Design of Nonformal Geometry Curriculum." In C. Hirsh & M. Zweng (eds.) *The Secondary School mathematics Curriculum: 1985 Yearbook*, pp.65-80. Reston, VA: NCTM. 1995.
22. Mammana, C. & Villani, V. (eds.) *Perspectives in teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.
23. Marsh, D. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD: Springer Undergraduate Mathematics Series.* (2nd ed.), New York: Springer. 2005.
24. Mathematical Association of America (MAA). *The Reorganization of Mathematics in the Secondary Education.* In J. Bidwell & R. Clason (Eds.), Readings in the History of masthematics Education, (pp. 382-459). Reston, VA: NCTM. 1923.
25. Meyer, W. "Recent Applications of Geometry." In C. Mammana & V. Villani. (eds.) *Perspectives in teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study.* pp. 100-105. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.
26. National Center for Research in Mathematical Science Education(NCRMSE) at the University of Wisconsin-Madison & Freudenthal Institute of the University of Utrecht. *Mathematics in Context.* (Vols. 1-40). Chicago, IL: Encyclopedia Britannica Educational Corporation. 1998a.
27. _____. *Mathematics in Context. Teacher Resources and Implementation Guide.* Chicago, IL: Encyclopedia Britannica Educational Corporation. 1998b.
28. NCTM. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM. 1989.
29. _____. *Principles and Standard for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM. 2000.
30. Neubrand, M. "Tendencies in Changes on a German Textbook Page." In C. Mammana & V. Villani. (eds.) *Perspectives in teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study.* pp. 108-213. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.
31. NRC(National Research Center). *Reshaping School Mathematics: A Philosophy for Framework for Curriculum.* Washington, D.C.: National Academy Press. 1990.
32. Osta, CAD Tools and the teaching of geometry. In Mammana, C. & Villani, V.

(eds.) *Perspectives in teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study*. pp.128-143, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.

33. Seeley C. "Changing the Mathematics We Teach" In I. Carl (ed.) *Seventy-Five Years of Progress: Prospects for School Mathematics*. pp. 242-260. Reston, VA: Mathematics Trust of Education of NCTM. 1995.
34. Serra, M. *Discovering Geometry. An Inductive Approach. 2nd ed.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press. 1997.
35. Sitomer, H. "Geometry in an Integrated Program", In K. Henderson (ed.) *Geometry in the Mathematics Curriculum*. Thirty-sixth Yearbook. (pp.303-333), Reston, VA: NCTM. 1973.
36. SMSG(School Mathematics Study Group).. Mathematics for Junior High school, Vol. 1 & Vol. 2. (1960, 1961) New Haven: Yale University Press. 한국수학교육연구원(역). 중학교 SMSG 수학: 학생용 교과서 제 1권, 제 2권. 문교부. 1970.
37. Steen, L.A. & Forman, S. "Mathematics for Work and Life." In I. Carl. (ed.). *Prospects for School Mathematics*. pp.219-241. Reston, VA: NCTM Trust. 1995.
38. Steiner, H. (ed.) *The teaching of geometry at the pre-college level: Proceeding of the 2nd CSMP International conference co-sponsored by Southern Illinois University and Central Midwestern Regional Educational Laboratory*. Dordrechet, Holland: Reidel Pub. Co. 1971.
39. Thom, R. 'Modern' Mathematics: An Educational and Philosophical Error?", *American Scientist*, Vol. 59, No. 6., November-December, pp. 695-99. 1971.
40. Wirzup, I. "Breakthoughts in the psychology of learning and teaching geometry" In L. martin 9ed.), *Space and geometry*. (pp.75-98). Columbus, OH: Eric Center. 1973.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 21 No. 4 (Nov. 2008), 105 - 126

The New Directions of Secondary Geometry Curriculum on Historical Perspectives

Konkuk University **Kyung Yoon Chang**

This article summarizes the historical changes of the secondary school geometry to give insights into the new direction of geometry education for the 21th century. Geometry has been considered as an essential subject in high school since mid-nineteen century in accordance with the social changes. Since the development of computer softwares such as CAD effects on the role of geometry in work and professional societies, the knowledge and skills the contemporary world require to school geometry have being changed. More focus on applications and modeling aspects, expansion of reasoning and problem solving, emphasis on design-related elements are features of the school geometry for the new century.

Key Words : geometry curriculum, historical change, computer, application, modeling, visualization, spatial sense,

2000 Mathematics Subject Classification : 97C90

ZDM Subject Classification : D30

접수일 : 2008년 7월 10일 수정일 : 2008년 9월 10일 게재확정일 : 2008년 10월 20일