대수 발달의 단계에 관한 드모르간의 관점 연구

동대문 중학교 유미경
sofiayu72@hanmail.net

서울대학교 대학원 김재홍
masshong@hanmail.net

경인교육대학교 권석일
steinein@ginue.ac.kr

한국교육과정평가원 박선용
polya@paran.com

중흥중학교 최지선
everii@hanmail.net

경인교육대학교 박교식
pkspark@dreamwiz.com

이 연구에서는 대수 발달의 단계에 관한 드모르간의 관점을 그가 사용한 용어를 바탕으로 산술, 보편산술, 기호대수, 의미적 대수의 순서로 나누어 논의한다. 드모르간은 즉각적으로 계산 결과를 얻는 산술과 문자기호를 사용하는 보편산술을 구분하였다. 그에 의하면, 보편산술은 산술에서 대수로 이행하는 과도기적 단계인 바, 이 단계에서 이상하고 불합리한 현상들이 발생하기에 대수가 필요하게 된다. 대수 발달의 단계에 관해 드모르간이 가진 관점의 특징은 기호의 의미가 사라진 규칙 체계 즉, 기호적 계산법을 얻은 후, 이 기호적 계산법 자체를 논리적으로 만들기 위해 기호에 확장된 의미를 부여하여 의미적 계산법으로 만든다는 것이다. 단일대수는 -1에 확장된 의미를 부여함으로써 만들어지고, 이중대수는 $\sqrt{-1}$에 확장된 의미를 부여함으로써 만들어진다. 드모르간에 의하면, 대수 발달에서는 앞에서 제시된 체계의 불완전성에 주목하여 다음 체계를 이끌어낸다.

주제어 : 대수, 대수 발달, 산술, 보편산술, 산술대수, 기호대수, 의미적 대수

0. 서론

수학의 모든 개념이 그렇듯 대수 역시 오랜 발달의 과정을 거쳐 오늘에 이르렀을

것이다. 대수가 산술로부터 시작되었다는 것은 분명해 보이지만, 산술에서 대수로의 발달에 대한 분석은 여전히 분분하다([17]). 수학자나 수학사학자들만이 산술에서 대수로의 발달에 관심을 갖는 것은 아니다. 수학교육학자들도 대수의 교수·학습을 위해 그것의 발달에 관심을 갖는다([8], [9], [13]). 수학자로 수학교육에 지대한 관심을 가졌던 드모르간(Augustus De Morgan, 1806-1871)은 선도적으로 산술과 대수의 교수·학습을 위해 노력했고, 그 과정에서 자연스럽게 대수의 발달에 관심을 가졌다([2], [3], [4], [5], [6], [7]). 사실상 드모르간이 활동하던 당시에는 가우스(C. F. Gauss, 1777-1855), 아벨(N. H. Abel, 1802-1829), 갈루아(E. Galois, 1811-1832), 코시(A. L. Cauchy, 1879-1857) 등이 대수학 분야에서 상당한 업적을 이루고 있었다([1]). 드모르간 역시 기호대수학의 창시자 중 한 사람으로 간주되기도 하지만([10], [14], [15], [16]), 그는 주로 대수의 교수·학습에 관심을 가지고 있었다.

이 연구에서는 드모르간이 산술과 대수의 교수·학습을 위해 집필한 《Elements of arithmetic(1830)》(이하, 간단히 ARI), 《Elements of algebra(1837)》(이하, 간단히 ALG), 《Trigonometry and double algebra(1849)》(이하, 간단히 TDA)를 중심으로, 드모르간이 산술과 대수의 교수·학습이라는 입장에서 대수 발달의 과정을 어떻게 대별하고 있는지에 관해 논의한다. Pycior([14])에 의하면, 드모르간은 처음에는 대수에 관해 전통적인 경험주의자적 생각을 가지고 있었지만, 1835년 이후에는 대수학자인 피콕(G. Peacock, 1791-1858)의 추상적 대수에 동의했고, 1830년대 후반부터는 추상적 대수도 중요하지만, 의미충실한 대수도 중요하다는 생각을 가지고 있었다. 드모르간의 이러한 관점 변화는 ARI, ALG, TDA에 그대로 반영되어 있다. 예를 들어 그는 ALG의 전반부에서는 문자가 자연수와 분수를 의미하는 것을 대수로 간주하는 반면에, 그 책의 후반부에서는 대수에 음의 양(quantity)까지 포함시키지만, 이 둘을 명확히 구별하지 않고 '대수'라고 통칭했다. 또한, TDA에서는 이 둘을 각각 보편산술(universal arithmetic)과 단일대수(single algebra)라 하고 있다. 산술로부터 대수로의 발달에 관한 드모르간의 관점은 TDA에서 극명하게 드러난다. 그는 TDA에서 대수의 발달을 산술, 보편산술, 대수로 나누어 설명하는 동시에, 대수를 다시 기호대수(symbolic algebra)와 의미적 대수(significant algebra)로 나누어, 그리고 의미적 대수를 다시 단일대수와 이중대수로 나누어 설명한다. 이 연구에서는 대수 발달의 단계에 관한 드모르간의 관점을 TDA에서 드러나고 있는 대로 산술, 보편산술, 기호대수, 의미적 대수의 순서로 논의한다.

1. 산술의 발달

드모르간이 산술을 명시적으로 정의하고 있는 것은 아니지만, ARI에서 취급한 내용에 따르면, 그가 자연수, 분수, 소수를 다루는 계산 방법과 그것을 응용한 문제해결을

산술로 보고 있다는 것을 알 수 있다. 수는 양을 나타내는 개념으로 계산법의 기초가 된다. 드모르간은 수 개념을 두 대상들의 집합 사이의 일대일대응을 관찰하는 맥락인 말과 기수(騎手)와의 일대일대응을 관찰하여 수를 인지하는 것으로 도입하고 있다([2, p.1]). 이러한 수 개념은 세기 활동과 관련된다. 조약돌, 손가락, 언어적 수 등을 이용하여 더 큰 양을 세는 효율적인 세기 방법들이 개발되며, 점차로 숫자와 십진법이 큰 양을 세는 효율적 방법으로 제시된다. 세기 활동의 효율성은 드모르간이 기수법이라고 말한 수 표현 방법에 의존한다. 드모르간은 산술 계산에서 효율성의 근원이 십진법 자체보다는 자릿값을 이용한 표현 방법에 있다고 보았다([2, p.10]).

드모르간에 의하면, 산술에서 사칙계산은 길고 지루한 세기 활동이 요구하는 계산을 간단히 하기 위해 개발된 것이다([2, p.14]). 분수는 나누어 떨어지지 않는 나눗셈의 결과를 표현하는 방법으로 제시되었고, 십진분수로서의 소수 개념과 그 계산 방법은 분수 계산을 용이하게 하기 위해 도입되었다. 산술의 계산 규칙과 방법들은 여러 문제를 해결하는데 이용되는 바, ARI에서는 제곱근을 구하는 방법, 등차수열, 등비수열, 순열, 조합 등의 문제를 사칙계산을 사용하여 해결하는 방법을 제시하고 있다. ARI에서 드모르간이 취급한 내용을 보면, 그는 산술이 세기 활동을 간단히 하기 위해 개발된 산술기호와 계산, 그리고 계산 방법으로서 실제 문제해결에서의 응용까지 포함하고 있는 것으로 보고 있다. 산술에서 수를 표현하는 기호로 제곱근 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하지만, 모든 제곱근을 수로 인정하지는 않는다. 예를 들어, 5는 자연수 제곱근, 분수 제곱근을 가지지 않는다. 산술의 여러 가지 제한조건 때문에 드모르간은 보편산술과 대비해서 산술을 특정산술(specific, particular arithmetic)이라고 부르기도 한다([2, p.90]).

드모르간은 ARI, ALG, TDA에서 산술기호의 사용에 대해 꾸준히 강조하고 있다. 산술기호는 양을 의미하는 기호와 양과 양 사이의 관계를 나타내는 기호로 구분된다. 양을 의미하는 기호는 숫자와 분수, $\sqrt{\ }$ 이고, 양과 양 사이의 관계를 나타내는 기호는 사칙계산의 기호(+, - ×, ÷)이다. 이 기호들은 계산을 간편하게 하기 위해 산술의 언어를 단축한 것이다. 예를 들어, '7과 5는 12를 만든다'는 기호 7+5=12로 표현된다([2, pp.10-11]). 숫자들의 의미는 단위 1의 의미에 의해 결정되는 바([6, p.i]), 1을 제외한 나머지 숫자들은 단위 1과 사칙계산에 의해 조합된다. 이때 사칙계산의 기호는 숫자의 의미인 양에 관한 추론 즉, 양적 추론의 기호이다. 예를 들어 +를 양의 두 양 사이에 놓음으로서, 두 양을 한데 모아놓은 양을 나타내는 기호로 사용하며, 나머지 숫자들의 의미는 단위 1을 한데 모아놓은 양이 된다. 즉, 선분 '__________'를 기호 1로 표현하면 1+1의 약어 2는 선분 '____________________'을 의미한다([6, p.i]).

이와 같이 산술에서 숫자들은 양을 의미하고, 사칙계산의 의미는 수의 의미인 양으로부터 파생된 것으로, 덧셈은 두 양을 한데 모아놓는 것, 뺄셈은 한 양에서 다른 양이 제거되는 것, 곱셈은 한 양이 반복되는 것, 나눗셈은 한 양을 동일한 부분으로 잘라내는 것이다([6, p.ii]). 그러나 드모르간의 산술은 구체적 양에 관한 것이기보다는

수 자체에 관한 것이다. 드모르간은 TDA에서 산술의 주제는 양이 아닌 수이며, 그 기본 조작은 세기라고 명확히 진술하고 있다([7, p.115]). 그는 수를 구체적 수와 추상적 수로 구분한다([6, p.ii], [6, p.8]). 구체적 수는 숫자가 구체적인 양의 의미를 지닌 것이다. 예를 들어 1, 2, 3이 1마일, 2마일, 3마일을 의미하는 것이다. 추상적 수는 1, 2, 3의 구체적인 의미가 사라진 단위의 반복 혹은 단위가 반복되는 횟수를 의미한다. 따라서 산술에서는 추상적 수를 도입함으로써 숫자로 표현되는 모든 양에 대해 성립하는 성질을 조사할 수 있다. 즉, 산술기호의 의미의 종류와 무관하게 산술기호들은 명확한 관계를 가지게 된다([6, p.iii]). 예를 들어 2+2는 숫자가 마일, 피트, 에이커 등의 어느 것을 의미하던지 4가 된다.

산술에 대한 드모르간의 견해는 피콕의 견해와 크게 다르지 않다. 피콕에게도 산술의 대상은 수이다. 이때 수는 영과 자연수 및 분수를 의미한다. 그에 의하면, 수는 그 기본 단위에 어떠한 성질도 부여되지 않은 추상적 수와 그렇지 않은 구체적 수로 나뉜다. 그러나 이 두 종류의 수를 표현하는 표기법 사이에는 아무런 차이도 없다([11, p.52]). 추상적 수 사이에서 또는 같은 종류의 양을 나타내는 단위를 가지는 수 사이에서만 덧셈과 뺄셈이 이루어질 수 있다. 그 이외의 경우에서는 연산이 이루어지지 않으며, 곱셈과 나눗셈에서 승수와 제수는 일반적으로 추상적 수이다([11, pp.52-53]).

드모르간은 ARI에서 제곱근 기호 $\sqrt{\ }$를 사용하지만, 기호 $\sqrt{\ }$를 산술기호로 보기보다는 대수기호로 보는 것이 더 적절할 것이다. 앞에서 이미 언급했듯이, 예를 들어, $\sqrt{5}$는 자연수도 분수도 아니기 때문에 산술의 대상이 되지 않기 때문이다. 실제로 기호 $\sqrt{\ }$를 다루는 장의 주요 관심사는 제곱근을 가지지 않는 수에 대해 제곱해서 그 수와 원하는 만큼의 오차를 지닌 수를 계산하는 방법에 집중되어 있다. 기호 $\sqrt{\ }$는 대수기호로서 볼 수 있는 또 다른 이유로 드모르간이 ARI 전반에 걸쳐 계산 방법과 계산값을 구하는 데 집중하고 있다는 것을 들 수 있다. 그에게 산술의 문제는 수의 증가와 감소에 관한 것으로([2, p.14], [2, p.24]), 수와 조작이 주어지고 주어진 조작이 주어진 수에 수행되면 어떤 수가 나오는가를 묻는 것이다. 이를테면, 어떤 수의 제곱근에 대해 그 제곱근이 자연수나 분수가 되지 않을 때는 제곱근이 존재하지 않지만, 제곱해서 원하는 수와 원하는 만큼의 오차를 지닌 수를 구하는 방법을 소개하고 있으며([2, p.90]), 산술에서의 모든 계산은 즉각적으로 수행이 이루어지거나 불가능한 조작으로 판단되어 기각된다([7, p.95]).

산술에서는 수를 이용하여 모든 양에 대해 성립하는 성질을 탐구하는데, 이 과정을 거치다보면 모든 수에 대해 성립하는 일반적인 성질에 대한 탐구가 요구된다. 예를 들어 "어떤 두 수가 주어졌을 때, 두 수의 차는 두 수에 어떤 수를 더한 후의 차와 같다."는 명제는 두 수에 어떠한 수를 대입해도 성립하는 명제이다. ARI에서는 모든 수에 성립하는 성질에 대한 언급은 있으나, 이것을 일반적인 경우로 확장하는 경우는 찾기 어렵다. 오히려 계산 방법을 개발하는 데 한정적으로 이용될 뿐이다. 예를 들어, 61274와 39628의 차를 구하기 위해 각 자리에 있는 수끼리 빼려고 할 때, 일의 자리

는 4에서 8을 빼야 하므로, 앞의 명제를 이용하여 10을 61274의 일의 자리의 수에, 39628의 십의 자리의 수에 더하여 뺀다. 즉, 60000+1000+200+70+14에서 30000+9000+600+30+8을 빼는 것이다([2, p.21]).

모든 수에 대해 성립하는 성질을 탐구하기 위해 숫자 대신에 문자를 사용하는 것은 바로 산술과 산술 이후의 것을 구분하는 중요한 특징이 된다. 즉, 산술과 산술 이후의 것을 구분하는 기준은 수 일반을 표현하는 문자를 사용하여 모든 수에 대해 성립하는 결론을 조사하느냐 하지 않느냐 하는 것에 있다([6, p.iii-vi]).

2. 보편산술의 발달

자연수와 분수를 포함하는 수를 나타내는 기호로서 문자는 모든 수에 성립하는 성질을 연구하기 위해 임의의 수를 지칭하는 맥락에서 도입된다. 예를 들어, 임의의 두 수에 대해 두 수를 각각 '첫째 수', '둘째 수'로 지칭하고, 첫째 수가 둘째 수보다 크다고 하면 다음과 같은 일반적 성질이 성립한다.

(첫째 수 + 둘째 수) + (첫째 수 - 둘째 수) = 첫째 수의 두 배

여기서 임의의 수를 '첫째 수', '둘째 수'로 지칭하는 것을 간략하게 문자 a, b로 표현하게 된다([2, pp.11-12]). 임의의 수를 표현하는 문자는 상황에 따라 어떠한 수도 될 수 있다. 미지수, 기지수의 약어로서의 문자는 수는 아니지만 정확하게 표현할 수 없는 어떤 계산 결과를 표현하기도 한다. 예를 들어, 3.141592…는 π로 2.718281…는 e로 표현된다.

보편산술에서의 사칙계산은 산술의 추상적 수에 대한 사칙계산의 의미 즉, 단위에 의한 증가와 감소의 의미를 그대로 지니고 있지만([6, p.vii]), 문자는 임의의 수를 나타내기에 확정된 관계를 가지고 있지 않다([6, pp.iii-iv]). 따라서 보편산술에서는 계산을 실제로 수행하여 계산값을 구할 수 없으며, 문자의 값이 주어질 때까지 실제 계산은 지연되고, 단지 수치적 계산을 지시하는 것이 된다([7, p.95]). 바로 이점이 보편산술에서의 조작과 산술에서의 조작 사이의 차이이다. 산술에서 수 1과 2는 더하면, 수가 무엇을 의미하던 3이 되지만, 보편산술에서는 수를 나타내는 기호 a와 b를 더하여 어떤 수가 되는지를 결정할 수 없다. 드모르간([6, p.xvi])은 이와 같은 보편산술에서의 조작을 대수적 조작이라고 지칭하며 산술에서의 조작과 구분한다. 보편산술에서의 문자 조작은 산술에서의 숫자 조작과는 다른 의미를 가진다. 예를 들어, $8a+5a$는 a의 값을 알기 전까지는 대답할 수 없는 조작이며, $8a+5a$의 가장 단순한 대수적 형식은 무엇인가를 묻는 질문에 대해, 그것은 $13a$라고 답할 수 있을 뿐이다. 이런 식으로 드모르간은 덧셈, 뺄셈, 곱셈 등의 대수적 조작을 대수적 식을 좀 더 단순한 형태의 식으로 변경하는 방법으로 정의하게 된다.

대수식 자체는 문제의 해가 아니지만 그것은 답을 표현하기 위해 선택된 방법이다.

$ma-na$에 a가 몇 번 포함되는가를 묻는 질문에 대해서 m, n의 값을 알기 전까지는 그것을 완벽하게 숫자로 답할 수는 없지만, 대수적 나눗셈으로서 식

$$\frac{ma-na}{a}$$

를 제시함으로써 산술적 답에 가까운 대수적 답인 $ma-na$에 a가 $m-n$번 포함되었다고 답할 수 있다. 대수적 식은 산술적 해와 가까운 계산 형식을 의미하는 것으로, 그리고 대수적 식에 대한 조작은 대수식을 간단하게 하는 것으로, 보편산술에서의 계산 법칙들은 계산 형식에 대한 계산법이 된다.

한편, 피콕이 말하는 산술대수와 드모르간이 말하는 보편산술은 그 기호와 부호가 가지는 의미와 다루는 내용에 있어서는 큰 차이를 보이지 않는다. 그러나 피콕은 산술대수를 학문(science)으로 표현([11, p.1])하고 있는데 반하여, 드모르간은 앞에서 살펴본 바와 같이 보편산술을 계산법으로 표현하고 있다. 이것은 형식과 의미를 동시에 중시하는 드모르간의 학문에 대한 견해에 기인한다. 이에 대해서는 다음 절에서 다시 논의한다. 피콕은 산술대수를 기호와 부호가 각각 수와 연산을 나타내도록 하고, 수 내지는 그 표현, 그리고 그에 부여되는 연산이 산술에서와 같은 의미와 같은 한계를 가지도록 함으로써 이루어지는 학문으로 정의하고 있다([11, p.1]). 산술대수는 산술과 구분된다. 예를 들어, 산술대수에서는

$$a+b-(c-d)=a+b-c+d$$

와 같은 규칙이 존재한다([11, p.13]). 한편, 산술대수는 기호대수와도 구분된다. 산술대수에서는 "$a-b$라는 표현에서 a가 b보다 크다는 것이 가정되어 이 조건이 만족되지 않으면 a에서 b를 뺄 수 없다([11, p.7])"는 것과 같은 제한조건이 바로 그것을 말해준다. 기호대수는 이와 다르다. 기호대수에서는 기호가 그 표현에서 완벽하게 일반적이고, 그 값에 제한이 없으며, 어떤 식으로 표시되던, 그것에 주어지는 연산이 그 응용에서 보편적이다. 그러나 피콕은 산술대수의 원리, 일반적인 결론 내지는 규칙이 기호대수의 원리에 대한 어떤 암시를 제공하고, 어떤 면에서는 그것을 결정짓기 때문에, 산술대수를 기호대수에 대한 적절한, 어떤 측면에서는 필수적인, 도입으로 제시하는 것이 편리하다고 말하고 있다([11, p.1]).

앞에서 살펴본 바와 같이 보편산술은 기지수이든지 미지수이든지 수 일반을 나타내는 문자 기호와 그것을 사용하여 수치적 계산을 실제로 수행하는 대신, 필요하면 각 단계에 제한 조건이 부과되어 지시되기만 하는 계산 형식들에 대한 계산법을 의미한다([7, p.95]). 문자는 처음에는 모든 자연수에 대해 성립하는 일반적인 성질을 조사하기 위해 도입되지만, 모든 자연수에 대해 성립하는 일반적인 성질인 공식들은 자연수 대신에 분수로 대치해도 성립한다. 예를 들어, $(m+n)a=ma+na$에서 m, n, a를 각각 $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{b}{c}$로 대치해도 공식은 성립한다. 즉, 다음과 같다([2, p.64])

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)\frac{b}{c}=\frac{p}{q}\times\frac{b}{c}+\frac{r}{s}\times\frac{b}{c}$$

보편산술과 산술대수는 문자 기호를 사용하고 계산을 완전히 마무리하지 않는 식이 존재한다는 점에서 산술과 구분되며, 제한조건이 붙어 완전히 일반적이지 않다는 점에서 상위의 대수와 구분되지만, 이때 성립하는 규칙이 상위 대수에서도 그대로 성립하게 됨으로 대수 규칙에 대한 발견적 힘을 가진다. 보편산술에서는 수 개념이 확장된다. 산술에서 수는 자연수만을 의미하고 분수는 보통 수라고 불리지 않지만, 보편산술에서는 자연수와 분수, 0까지 수로서 인정된다([6, pp.vi-vii]). 따라서 보편산술의 문자는 자연수, 분수, 0을 의미한다. 드모르간은 특히 대수에서 언급하는 문자가 자연수뿐만 아니라 분수까지 포함한다는 것을 강조한다([6, pp.xxii]).

산술에서의 몇몇 용어들이 보편산술에서 그 의미가 확대, 변화되기도 하고 새로운 용어들이 출현하기도 한다. 그 중 중요한 것은 등호 개념의 의미 변화이다. 산술에서 =는 '무엇을 만들다(make)'라는 의미를 가진다([2, p.11]). 반면에 보편산술에서의 등호는 등가의 개념을 지녀 수 사이의 일반적인 성질을 표현하는데 사용되어, =는 그것의 앞의 것과 뒤의 것은 동일한 수라는 것을 나타내는 기호가 된다([6, p.v]). 등호 개념의 변화는 보편산술에서 중요하게 취급하는 등식(equation)의 출현을 가능하게 한다. 보편산술에서 연구되는 모든 수 사이에 성립하는 일반적 성질에 대해 드모르간은 =를 사용하여 등식으로 정의한다. 그는 대수적 상징의 모든 집합을 식(expression)이라고 하고, 두 식이 기호 =로 연결될 때, 그 전체를 등식이라고 하였다. 또한, 그는

$$\frac{a+1}{\frac{1}{a}+1}=a$$

와 같이 양변의 문자가 어떤 수를 나타내건 양변이 항상 동일한 등식을 항등식이라고 하였다. 그에 의하면, 등식에는 항등식 이외에도 특정 수 값에 대해서만 참이 되는 조건등식(equation of condition)이 있다([6, pp.ix-x]).

등식이라는 용어는 산술을 다루는 ARI에서 두 수 혹은 수들의 집합이 동일할 때, 기호 =에 의해 두 수 혹은 두 수의 집합이 연결되어 있는 것으로 정의되기도 하여([2, p.11]), 등식을 산술의 용어로 이해할 수도 있다. 그러나 여기서 등식은 수 사이의 일반적 성질을 도입하는 맥락에서 정의된다. ALG에서는 두 대수적 식이 =에 의해 연결된 것으로 등식이 다시 정의되었다는 점과 드모르간의 대수 개념이 뚜렷해지면서 그가 보편산술을 산술과 구별하여 수 사이의 일반적 성질을 조사하는 것으로 보았다는 점을 고려할 때, 등식을 보편산술의 용어로 보는 것이 합당하다. 보편산술에서 조건등식은 새로운 연구 대상이 된다. 연구 대상으로서 조건등식은 미지의 값을 의미하는 문자가 포함되어 있는 것으로, 등식을 참이 되게 하는 수는 몇 개이고 그 수는 무엇이며, 등식을 참이 되게 하는 수가 존재하지 않을 때는 그 이유에 대해 조사하게 된다([6, p.2]). 조건등식에 대한 조사는 등식을 조작하는 새로운 대수적 조작을 요구한다. 이 새로운 대수적 조작은 기호 =의 등가 개념을 바탕으로 하는 것으로, 등식의 양변에 동시에 어떤 양을 더하고 빼고 곱하고 나누어서 새로운 등식을 만드는 조작이며, 약어 $(+)a$, $(-)a$, $(\times)a$, $(\div)a$로 표현된다. 드모르간은 새로운 조작을 이용하여 등

식을 만족하는 문자의 값을 구하는 방법을 제시하고, 문자의 값을 구해 등식의 미지 문자에 대입하여 구한 수가 등식을 참이 되게 하는지 검증한다([6, pp.3-4]).

보편산술은 산술에서 대수로 이행하는 과도기적 단계로 이상하고 불합리한 현상들이 발생하는 바, 불합리한 현상은 등식의 해를 구한 다음 해를 검증하는 과정에서 발생한다. 예를 들어, 등식

$$x+\frac{x-2}{3}-\frac{x}{6}=\frac{1}{6}-\frac{x}{2}$$

를 풀면 $x=\frac{1}{2}$의 해를 구할 수 있으며, 검증하기 위해 $x=\frac{1}{2}$을 등식에 대입하여야 한다. 그런데 등식 좌변의 둘째 항 x-2에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면 x-2는 작은 양에서 큰 양을 빼는 것을 의미하는 불가능한 조작이 된다([6, p.12]). 이러한 불가능한 현상들을 귀납적으로 조사해 보면, 문제의 진술이나 그것을 등식으로 변환하는 과정에서 하나의 양이 구하고자 하는 양과 정반대의 성질을 가진 것으로 가정되었음을 발견할 수 있다([7, p.95]). 드모르간은 불가능한 현상을 해결하는 방법으로 두 가지를 제시한다. 하나는 문제를 수정하여 새로운 등식을 만들어 문제를 해결하는 것이고, 다른 하나는 문제를 수정하지 않고 불합리한 결과를 합리적인 것으로 보고 불합리한 결과에 대한 규칙이 존재하는가를 탐구하는 것이다([6, p.44]). 드모르간에 의하면 이러한 대수 규칙의 조사가 가능한 이유는 대수 규칙의 타당성은 그 결과로부터 오는 것이 아니어서 수에 적용되는 대수 규칙을 불가능한 것에 적용할 수 있기 때문이다([6, p.xxxii]). 따라서 참으로 증명된 조작 규칙을 불가능한 뺄셈을 의미하는 기호에 적용하여 그 결과를 살펴봄으로써 탐구할 수 있는 것이다([6, p.44]). 이것은 문자의 의미와는 무관하게 조작 규칙의 기호적 성질을 탐구하는 것을 의미하는 것인 바, 바로 대수로의 서막을 알리는 것이다.

3. 대수의 발달

드모르간은 TDA에서 기예(art)로서의 대수에서 학문으로서의 대수를 구성하고자 하였다([7, p.iv]). 그에 따르면, 학문으로서의 대수는 기호과학(symbol science)([7, p.89])인 바, 그것은 고유 기호와 그 의미, 조작 규칙으로 이루어지며, 이 세 가지 중 어느 한 가지라도 충분히 진술되지 못하면 불완전한 기호과학이 된다. 완전한 기호과학이 되기 위해서는 다음의 세 질문에 답할 수 있어야 한다. 첫째, 고유 기호들은 서로 구별되는가? 둘째, 기호들의 의미는 명확하게 이해될 수 있는가? 즉, 기호의 의미는 오직 하나이거나, 아니면 이해 가능한 의미를 기호에 줄 수 있는가? 셋째, 조작 법칙들은 주어진 기호의 의미의 필연적 결과인가?([7, pp.89-90]) 드모르간에 의하면, 기호과학으로서의 대수에 이르는 가장 확실하고 논증적인 방식은 고유 기호의 의미를

버리기 전까지 기호 사이의 결합에 관한 법칙을 모은 다음, 고유 기호에서 의미를 버리고 고유 기호 자체와 조작 규칙의 집합만을 얻은 후, 고유 기호에 확장된 의미를 주는 것이다([7, pp.97-98]). 그는 이러한 과정에서 의미가 사라진 고유 기호와 기호 사이의 결합에 관한 법칙으로 이루어진 집합을 기호적 계산법(symbolic calculus) 혹은 기호대수라고 하였으며, 기호적 계산법의 기호에 의미를 준 것을 의미적 계산법(significant calculus) 혹은 의미적 대수(significant algebra)라고 하였다([7, pp.92-93], [7, p. 101]).

드모르간은 TDA에서 '산술 → 보편산술 → 단일대수 → 이중대수'의 산술에서 대수로의 발생적 구분을 사용한다. 여기서 '기호대수'와 '의미적 대수'라는 용어는 보편산술에서 단일대수 혹은 단일대수에서 이중대수로의 이행 과정을 설명하기 위해 제시한 개념이다. 보편산술에서 문자는 수를 의미하기 때문에 뺄셈 조작에 문자의 제한 조건이 부가되며 부주의로 인하여 불가능한 뺄셈이 발생할 수 있다. 이때 기존의 규칙을 불가능한 뺄셈에 적용하여 불가능한 뺄셈에 대한 새로운 규칙을 모으게 되며, 불가능한 뺄셈, 좀 더 정확히 말하면 불가능한 뺄셈의 축약어로서의 기호 -1을 포함한 기호의 의미가 사라진 규칙 체계를 얻게 된다. 드모르간은 이것을 기호적 계산법이라고 하였으며, 이 기호적 계산법 자체를 논리적으로 만들기 위해 기호에 확장된 의미를 부여하여 의미적 계산법으로 만든다. 이 의미적 계산법이 단일대수이다. 이와 같은 과정은 단일대수에서 이중대수로 이행하는 과정에서도 이해되지 않는 기호 $\sqrt{-1}$에 의해 반복된다. 이때 $\sqrt{-1}$을 포함한 의미가 사라진 기호 규칙의 집합이 기호대수이고, 그것에 확장된 의미가 부여된 의미적 대수가 이중대수이다([7, pp.92-93], [7, pp.95-100]).

3.1 기호대수

기호대수는 기호과학의 세 요소 중 의미가 없기 때문에 불완전한 기호과학이다. 그러나 기호대수는 대수가 기호과학을 형성하는 문법으로 드모르간은 이를 기예라 하고 있다([7, pp.92-93]). 기호대수의 기본 기호(fundamental symbols)는 0, 1, +, −, ×. ÷, ( )[1], 그리고 문자로, 그 의미가 존재하지 않는다. 여기서 단 한 가지 예외가 =이다. =는 두 기호 사이에 놓여, 그것들이 서로 다른 단계에 의해 얻어지는 것이지만 동일한 의미를 가진다는 것을 의미한다. 드모르간의 기호대수에서 기호로서의 숫자는 단위 기호 1의 순수 조합의 약어로서 나타난다. 즉, 2는 단위 기호의 조합인 1+1의 약어이고 3은 2+1의 약어가 된다. 또, 드모르간은 편의를 위해 문자 사용에 제한을 둔다. 즉 a, b, c와 같은 소문자는 단위 기호 1의 순수한 조합들을 의미할 때 사용하고, 그 밖의 경우에는 대문자를 사용하며 ϵ을 제외하고 그리스 문자들은 각도를 의미하는데 사용한다. 드모르간의 기호대수에서는 아홉 개의 기호 용어와 10개의 규칙이 제시된다. 그것을 현대적 용어로 표현하면 다음과 같다.

> 사칙계산의 부호(규칙 II), 항, 인수, 밑, 지수(규칙 III), 항등원, 역원(규칙 IV-V), 사칙계산에 관한 분배법칙(규칙 VI-VII, XI), 부호 규칙(규칙 IX) 교환법칙(규칙 X), 지수법칙(규칙 XII-XIV).

드모르간은 기호대수를 기호들과 이러한 기호들의 조합의 약어로서 개발된 새로운 기호들로 이루어져, 기호들이 주어진 규칙과 주어진 규칙의 조합에 의해 형성된 규칙만을 따르는 기호 체계라고 정의한다([7, p.104]). 이러한 기호대수는 대수의 문법으로서 작용하며, 이것은 일반적인 대수의 모든 기호 조합들이 앞선 기호와 규칙에 의하여 생성됨을 의미한다. 예를 들어 (A-B)(C-D)는 다음과 같이 전개 된다.

규칙 XI에 의하여 (A-B)C-(A-B)D
규칙 XI에 의하여 AC-BC-(AD-BD)
규칙 VII에 의하여 AC-BC-(+AD)-(-BD)
규칙 IX에 의하여 AC-BC-AD+BD

한편, 피콕은 기호대수를 산술대수에서 기호의 값에 걸린 제한조건을 없앤 것으로 명쾌하게 정의한다([12, p.59]). 이렇게 되면, 산술대수에서는 다룰 수 없었던 $3a-5a=-2a$([12, p.3])와 같은 식을 다룰 수 있게 된다. 이때 연산은 사칙계산, 제곱, 제곱근 구하기를 의미한다. 이것은 오늘날 형식불역의 원리로 알려져 있으며, 산술대수에서 성립하는 규칙을 그대로 기호 대수로 확장한다는 의미이다. 형식불역의 원리에 대한 피콕의 모든 생각은 다음 문장에 압축되어 있다.

> 기호의 형식은 일반적이고 그 값은 제한적인 경우(산술대수)에서 서로 동등한 대수형식이라면 어떠한 것이건, 기호의 형식과 값이 모두 일반적인 경우(기호대수)에도 동등하다([12, p.59]).

앞에서 살펴본 바와 같이 드모르간은 기호대수를 의미가 사라진 기호적 계산법으로 보았으며, 이것은 드모르간이 말하는 보편산술과 기호대수 사이의 관계가 피콕이 말하는 산술대수와 기호대수 사이의 관계와 서로 유사하다는 것을 말해준다. 그러나 실제로는 이 두 사람의 견해 사이에서 차이가 존재한다. 드모르간은 다음 절에서 살펴볼 의미적 대수를 하나의 학문으로 보았으나, 피콕은 대수에 대한 기하학적 해석을 대수에 대한 하나의 응용으로 보았다.

3.2 의미적 대수

대수가 기호과학이 되기 위해서는 기호대수의 문자에 의미가 부여되어야 하지만,

의미가 부여된 것만으로는 불충분하다. 기호에 너무 제한된 의미를 부여하거나 너무 넓은 범위의 의미를 부여한다면, 이해할 수 없는 기호 결합이 나타나기 때문이다([7, p.93-94]). 일반적인 대수에서의 사정도 이와 유사하여 기호에 부여된 의미가 모든 결과를 의미 있게 만들지는 않는다([7, p.104]). 대수가 기호과학이 되기 위해서는 모든 기호 결합이 논리적 결과가 되게 하는 의미를 기호에 부여해야 한다([7, p.93]). 드모르간은 이를 위해 기하적 기반 위에서 확립되는 의미를 기호에 부여하여 완전한 의미적 대수를 구성하려고 한다([7, p.iii]).

드모르간의 완전한 의미적 대수의 구성은 대수를 기예에서 기호과학으로 위상을 격상시키려는 목적이 있을 뿐만 아니라 기예로서의 기호대수 사용에 있어서 그 효율성을 추구하려는 목적도 있다([7, p.93]). 기호대수를 문제에 적용할 때, 기호에 문제 상황에 알맞은 의미를 부여하여야 하며, 드모르간은 이를 '변형(transformation)'이라고 말하였다([7, p.113]). 그런데 일반적인 대수는 불완전한 의미적 대수이므로 -1, $\sqrt{-1}$ 과 같은 의미가 불분명한 기호 결합들이 발생하게 되며, 이러한 결합들이 발생할 때마다 그 의미가 무엇인지를 조사해야 하는 불편함이 발생하게 된다. 드모르간은 완전한 의미적 대수를 구성함으로써 대수를 사용하기에 앞서 의미가 불분명한 모든 기호 결합을 없애고 처음 나타나는 기호 결합들에 대해 따로 해석할 필요가 없게 만들려고 하였다([7, p.89]).

여기서 기호 의미 변환에 따른 문제가 발생할 수 있다. 예를 들어 시간에 대한 문제를 대수로 해결할 때, 기호의 의미는 시간이 된다. 그렇다면 기하적 의미를 지닌 의미적 대수로 문제를 해결하는 것이 시간에 대한 문제의 풀이가 될 수 있는가 하는 문제가 발생한다. 드모르간은 이에 대해 대수는 하나의 의미적 대수 안에서 참인 의미를 지닌 진술이 다른 맥락 즉 다른 의미적 대수 안에서도 동일하게 참인 의미를 지닐 수 있다고 언급한다([7, p.94]). 따라서 기호대수를 문제에 적용할 때, 그 문제의 의미를 따르는 의미적 대수를 기하적 기반의 의미적 대수로 전환하여 문제를 해결할 수 있다. 또한 이러한 의미의 전환에서 문제의 모든 조건과 풀이 형식이 유지되므로([7, pp.113-114]), 문제가 주어지고 대수로서 문제를 해결하려할 때 완전한 의미적 대수로 전환하여 문제를 해결하여 해를 구한 다음, 다시 원래 문제의 맥락으로 전환하여 해를 구할 수 있게 되는 것이다.

피콕 역시 직선을 위치와 양으로 나타내는 방식 즉, 드모르간이 생각하는 이중대수와 비슷한 체계를 알고 있었고, 다루고 있었다. 그러나 그는 직선을 위치와 양으로 나타내는 체계에 대해 설명하면서도, 그것을 대수 자체라기보다는 대수의 응용으로 보았다([12, p.232]).

3.2.1 단일대수

단일대수는 보편산술에서 발생한 불가능한 뺄셈에 확장된 의미를 제공하기 위해 개발된 의미적 대수이다. 보편산술에서 기호는 양과 수를 의미하였기 때문에 작은 수에

서 큰 수를 뺀다는 조작의 의미는 이해가 되지 않는 것이다. 이에 드모르간은 불가능한 조작이 발생하는 원인을 귀납적으로 조사하여 문제 진술이나 방정식에서 하나의 양이 원래의 것과 정반대되는 성질을 가진 것으로 잘못 설정된 것임을 밝혔다. 예를 들어, 주어진 직선의 기준점에서 10피트를 측정하라고 할 때, 측정 방향을 명확하게 제시하지 않으면 불가능한 뺄셈이 발생할 수 있다([7, p.95]). 드모르간은 기호에 이러한 정반대되는 성질을 가진 양의 의미를 부여하기 위해 직선을 사용한다. 단일대수는 기호와 기호의 결합의 의미가 직선 위에 단위선분으로 측정되는 선분인 의미적 대수이다. 즉 단일대수에서는 '기호'와 '기호 결합'이 직선 위의 '선분'과 '선분 조작'으로 해석된다. 직선상에 기준이 되는 임의의 한 점을 잡고 그것을 영점(zero-point)이라고 하며, 어떤 양이 영점의 오른쪽에 위치한 단위선분의 배수가 되는 선분으로 표현되면 그 양과 정반대되는 성질의 양은 영점의 왼쪽에 위치한 단위선분의 배수가 되는 선분으로 표현된다([7, p.96-97]).

단일대수에서는 정반대되는 성질의 양을 표현하기 위해서 기호가 개발되는데 정반대되는 성질의 양을 표현하는데 있어 기존의 수는 부적절하게 된다. 왜냐하면 구체적 크기가 표준 단위로 표현되는 수치적 양으로서 반대되는 성질의 양을 표현할 수가 없기 때문이다([7, p.96]). 드모르간은 정반대되는 성질의 양을 표현하기 위해 표준단위 +1 이외에 또 다른 단위를 도입하고 그 단위 기호로서 -1을 사용한다([7, p.96]). 예를 들어 -4는 4를 표현하는 단위와 반대되는 단위의 네 배가 된다. 양을 나타내는데 있어 +, -의 사용은 단일대수에서 +, -가 방향과 결합의 두 가지 의미로 사용되게 한다. 예를 들어, +(-3)은 손실 3이 증가된 것으로 번역될 수 있다. 문자가 부호와 결합되어 주어진 양과 반대되는 성질의 양까지 표현할 수 있게 됨으로서 단일대수에서는 양 개념이 확장된다. 산술에서의 양은 모든 수 혹은 분수였다면 단일대수에서의 양은 계산 규칙으로부터 나온 모든 기호를 의미하며 양(陽)과 음으로 구분된다([6, p.59]).

양 개념이 확장됨으로서 양의 대소 개념 또한 형식적으로 확장된다. 산술에서 양 개념은 구체적 크기(concrete magnitude) 개념에 의존하게 되는데, 드모르간은 양을 명확하게 정의하고 있지는 않지만 양을 단위로 구성되는 수로 보고 있다. 이것은 무게, 길이와 같은 구체적 크기에 대한 측정 맥락에서 자연수 혹은 분수로 표현된다([2, p.124], [7, p.96]). 따라서 산술에서 대소 관계는 구체적 크기 개념을 바탕으로 하게 된다. 그러나 단일대수에서 양 개념은 음의 양까지 포함하기 때문에 수 사이의 대소 관계는 더 이상 구체적 크기 개념에 의존할 수 없게 된다. 드모르간은 산술에서의 대소 관계를 단위 +1에 정렬되는 수들과 분수들의 위치로서 형식화하여 단일대수의 크기 개념으로 확장한다. 산술기호인 숫자와 분수들은 0, 1, 2, 3, …과 같이 단위 +1에 의해 좌측에서 우측으로 배열되며 임의의 두 기호 중 더 큰 것이 오른쪽에 위치한다. 이것을 대수 숫자들에 적용하면 대수 숫자들은 +1의 대수적 덧셈에 의해 … -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, … 와 같이 배열되며, 임의의 두 양에서 오른쪽에 있는 것이 더 '크고' 왼쪽에 있는 것이 더 '작다'고 정의된다. 그리고 $<$, $>$를 도입하여 기호

로 표현한다([6, pp.62-63]).

의미적 대수로서의 단일대수는 불완전한 의미적 대수이다. 왜냐하면 단일대수에서는 이해되지 않는 기호인 $\sqrt{-1}$이 출현하기 때문이다. 그러나 $\sqrt{-1}$을 사용하면 여러 가지 참인 사실이 도출되며, 이것은 $\sqrt{-1}$에는 어떠한 논리가 있음을 말해준다([7, p.100]). 단일대수에서 지수는 동일한 양의 연속적으로 곱해진 것의 약어 기호에서 곱해진 횟수를 뜻하는 수를 의미한다. 예를 들어 x를 세 번 연속해서 곱하면 기호대수의 규칙에 의하여 xxx라고 기호로 표현되며 x^3으로 축약된다. 이때 3이 x의 지수가 된다. 드모르간은 이 지수를 자연수에서 음의 양으로 다시 분수로 확장시켜 나가며 지수 계산 법칙을 조사하게 되는데, 이때 분수 지수를 가진 x는 산술의 제곱근이 확장된 것임을 발견한다. 즉 $x^{\frac{1}{2}}$을 제곱하면 지수 계산 규칙에 의하여

$$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x$$

가 되고 $x^{\frac{1}{2}}$은 산술의 제곱근 개념인 제곱해서 x가 되는 수임을 발견하게 되며 $x^{\frac{1}{3}}$을 x의 세제곱근으로 정의하게 된다. 그런데 음의 양의 제곱근 $\sqrt{-1}$은 단일대수에서 이해가 불가능한 것이다. 정의에 의하면 $\sqrt{-1}$은 제곱하면 -1이 되는 양인데 부호규칙에 의하여 그것이 양(陽)의 양이건 음의 양이건, 제곱하면 양(陽)의 양이 나와야 하는데 -1이라는 음의 양이 나오기 때문이다([6, p.110]).

3.2.2 이중대수

기호대수가 완전한 의미적 대수가 되기 위해 즉, 기호과학이 되기 위해서 만족해야 할 조건 중 한 가지는 조작의 규칙은 기호 의미의 필연적 결과이어야만 한다([7, pp.89-90])는 것이다. 따라서 단일대수에서 이해 불가능한 결합으로 나타난 기호 $\sqrt{-1}$에 부여되는 의미는 그것으로 인해 $\sqrt{-1}$에 관한 모든 규칙이 참이 되게 만들도록 해야 한다([7, p.109]). 이중대수에서는 이러한 의미가 기호 $\sqrt{-1}$에 부여되는데 이 과정에서 드모르간은 기존의 의미 체계의 확장이 되도록 즉, 단일대수가 확장되어 새로운 체계의 부분이 되도록 의미를 부여하려 한다([7, p.109]). 그러므로 +1과 -1은 여전히 정반대의 단위를 의미해야 하며, 대수의 문법이 되는 기호대수의 규칙

$$-1 = \sqrt{-1} \times \{ \sqrt{-1} \times 1 \}$$

에 의해 기호 $\sqrt{-1}$는 단위 1에서 정반대의 단위 -1이 되는 매개적 단계의 의미를 지녀야 한다([7, p.109]). 드모르간은 $\sqrt{-1}$에 단일대수의 직선 모델에서 +1에 의해 표현되는 선분에 수직인 단위선분인 의미를 주게 된다. 이러한 의미는 드모르간으로 하여금 기호가 표현하는 것이 선분의 길이뿐만 아니라 선분 방향까지 포함한다는 것을 인식하게 하여 기호대수의 문자에 평면 위의 선분의 의미를 부여하게 한다.

이중대수는 모든 기호가 길이와 방향을 가진 선분을 의미하는 완전한 의미적 대수이다([7, p.117]). 현대적 용어로 표현하면 모든 기호는 임의의 점을 원점으로 하는 위

치벡터이고 기호 조작은 위치벡터의 조작의 의미를 지니는 대수가 이중대수이다. 이중대수는 단일대수의 단위선분 +1, -1을 위치벡터로 가지고 있어서 단위선분으로부터 생성되는 모든 기호들과 기호들의 결합들은 이중대수의 규칙을 따르면서 동시에 단일대수의 규칙을 따르게 된다([7, p.121]). 이중대수의 문자 조작은 산술, 보편산술, 단일대수의 문자 조작과 다르게 형식적으로 구성된다. 산술, 보편산술, 단일대수에서의 문자 조작은 단위의 증가와 감소라는 아이디어를 기반으로 정의된다. 예를 들어 산술과 보편산술에서 덧셈 3+5는 단위의 증가에 의한 이어서 세기로서 그 과정은 3부터 시작하여 3 이후의 다섯 개의 수를 세어 8을 만들고([7, p.115]), 단일대수에서의 덧셈은 단위선분의 증가로서 3+(-2)는 단위선분 +1이 세 번 증가한 것에서 단위선분 -1이 두 번 증가한 것이다([6, pp.59-60], [7, p.97]). 단위의 증가와 감소로 정의되는 문자 조작은 수가 단위의 배수로 표현된다는 점에서 조작 대상인 수와 결합되어 있다. 드모르간은 완전한 의미적 대수가 되는 의미를 문자에 부여하기 위해, 조작 형식과 조작 대상을 분리한다. 즉, 덧셈 $a+b$는 b가 0으로부터 시작되어 형성되는 것과 동일한 방식으로 먼저 형성된 a로부터 시작하여 b를 형성한다([7, pp.115]). 이러한 덧셈의 정의는 형식적인 것으로 a, b가 수이면 단위의 증가로 형성된 것으로서 앞선 조작 형식이 적용되고, 위치벡터이면 평면상에서 시점에서 종점을 이어서 형성된 것에 형식적으로 적용된다.

드모르간은 이중대수를 구성하면서 단순히 문자에 위치벡터의 의미만을 부여한 것이 아니다. 이중대수가 기호과학이 되기 위해서는 조작의 규칙이 기호에 부여된 의미의 필연적 결과가 되는지에 대한 증명이 요구된다. 이 작업은 문자에 의미를 부여하면서 동시에 문자 조작에 문자의 의미로부터 파생되는 논리를 부여하는 것이다. 드모르간은 단일대수의 기호들과 기호 $\sqrt{-1}$을 이용하여 이중대수의 문자 의미인 길이와 방향을 표현함으로서 문자 조작에 논리를 부여한다. 문자는 그것이 나타내는 위치벡터의 길이와 방향의 순서쌍으로 표현되며 여기서 방향은 단위벡터와 위치벡터가 이루는 각으로 표현된다. 예를 들어 1은 (1, 0)으로 $\sqrt{-1}$은 $(1, \frac{\pi}{2})$로 표현된다. 또한 문자의 조작은 문자 의미인 위치벡터의 조작으로부터 다음과 같이 표현된다.

$\mathrm{A}=(a,\ \alpha)$, $\mathrm{B}=(b,\ \beta)$라면

$$\mathrm{A}\pm\mathrm{B}=\{\sqrt{\{a^2+b^2\pm 2ab\cos(\beta-\alpha)\}},\ \tan^{-1}\frac{a\sin\alpha \pm b\sin\beta}{a\cos\alpha \pm b\cos\beta}\}$$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=(ab,\ \alpha+\beta)$$

$$\mathrm{A}\div\mathrm{B}=(\frac{a}{b},\ \alpha-\beta)$$

드모르간은 이중대수가 기호과학임을 보이기 위해 조작 규칙, 기호대수의 규칙들이 문자 의미에 따른 논리적, 필연적 결과임을 위 표현법을 이용하여 증명하고 기호대수

가 완전한 의미적 대수가 됨을 주장한다([7, p.125]).

4. 결론

드모르간은 산술을 자연수, 분수, 소수를 다루는 계산 방법과 그것을 응용한 문제해결로 보았다. 산술에서는 모든 계산이 즉각적으로 수행되며, 문자 기호는 사용하지 않는다. 보편산술은 수 일반을 나타내는 기호와 문자 기호를 사용하며 수치적 계산이 실제 수행되지 않고, 필요하면 각 단계에 제한 조건이 부과되어 지시되기만 하는 계산 형식들에 대한 계산법을 의미한다. 보편산술은 산술에서 대수로 이행하는 과도기적 단계인 바, 이 단계에서 이상하고 불합리한 현상들이 발생한다. 드모르간이 말하는 보편산술은 피콕이 말하는 산술대수와 같이 문자 기호를 사용하고 계산을 완전히 마무리 하지 않는 식이 존재한다는 점에서 산술과 구분되며, 제한조건이 붙어 완전히 일반적이지 않다는 점에서 상위의 대수와 구분되지만, 대수 규칙에 대한 발견적 힘을 가진다.

드모르간은 TDA에서 '산술 → 보편산술 → 단일대수 → 이중대수'라는 발생적 구분을 사용하였다. 기호의 의미가 사라진 규칙 체계 즉, 기호적 계산법을 얻은 후 이 기호적 계산법 자체를 논리적으로 만들기 위해 기호에 확장된 의미를 부여하여 의미적 계산법으로 만든다는 것이 드모르간의 관점의 특징이다. 단일대수는 -1에 확장된 의미를 부여함으로써 만들어지고, 이 같은 과정은 단일대수에서 이중대수로 이행하는 과정에서도 이해되지 않는 기호 $\sqrt{-1}$에 의해 반복된다. 이때 $\sqrt{-1}$을 포함한 의미가 사라진 기호 규칙의 집합을 기호대수라고 하며, 기호대수에 확장된 의미가 부여된 의미적 대수가 이중대수이다.

드모르간의 대수에 대한 관점의 특징은 의미와 형식 사이의 균형을 포기하지 않으려고 하였다는 점이다. 현대적인 의미의 대수학은 형식에서 그 의미를 비워냄으로써 일반성을 확보하는 것을 그 특징으로 하는 반면, 드모르간은 그렇지 않았다. 이것은 직선을 위치와 양으로 나타내는 방식을 다루고 있으면서도 이를 대수의 응용으로 본 피콕의 견해와 구분된다([12, p.232]). 드모르간의 관점은 그가 선도적으로 산술과 대수의 교수·학습을 위해 매진하는 과정에서([2], [3], [4], [5], [6], [7]) 탄생하였다고 볼 수 있다. '산술 → 보편산술 → 단일대수 → 이중대수'의 발생적 순서는, 산술에서 출발하여 산술로 충분하게 해결할 수 없는 문제점을 지적하면서 그 문제점을 해결하는 맥락 속에서 다음 체계로 넘어가는 전략을 사용한다. 앞에서 지적된 문제의식을 바탕으로 연속적으로 다음 체계로 넘어가는 그의 교재 진술 방식은 교수·학습에 대한 그의 고민의 산물이다.

참고 문헌

1. Bashmakova, I. G. & Rudakov, A. N., *The evolution of algebra 1800-1870*, The American Mathematical Monthly, 102 (1995) 266-270.
2. De Morgan, A., *Elements of arithmetic*, London: Walton, 1830/1846.
3. De Morgan, A., *On the study and difficulties of mathematics*, Chicago: The open court publishing company, 1831/1910.
4. De Morgan, A., *On teaching arithmetic*. The Quarterly Journal of Education, 5 (1833a) 1-16.
5. De Morgan, A., *On the method of teaching fractional arithmetic*. The Quarterly Journal of Education, 5 (1833b) 209-222.
6. De Morgan, A., *Elements of algebra: preliminary to the differential calculus*, London: Taylor, Walton, 1835/1837.
7. De Morgan, A., *Trigonometry and Double Algebra*, London: Taylor, Walton & Maberly, 1849.
8. Katz, V. J., *Algebra and its teaching: an historical survey*, The Journal of Mathematical Behaviour, 16(1) (1997) 25-38.
9. Katz, V. J., *Stages in the history of algebra with implications for teaching*. Educational Studies in Mathematics, 66 (2006) 185-201.
10. Macfarlane, A., *Lectures on ten British mathematicians of the nineteen century*. In M. Merriman & R. S. Woodward, Mathematical Monographs (No.17). Oxford, MS: project Gutenberg Archive Foundation, 1916.
11. Peacock, G., *A treatise on algebra vol. I: arithmetical algebra*, Cambridge university press, 1842a.
12. Peacock, G., *A treatise on algebra vol. II: on symbolic algebra and its applications to the geometry of position*, Cambridge university press, 1842b.
13. Puig, K, & Rojano, T., *The history of algebra in mathematics education*, In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, The future of the teaching and learning of algebra (The 12th ICMI Study) 187-223, Kluwer Academic Publishers, 2004.
14. Pycior, H. M., *Augustus De Morgan's algebraic work: the three stage*. Isis, 74(1) (1983) 211-226.
15. Rice, A., *Augustus De Morgan: Historian of science*, History of Science, 34 (1996) 201-240.
16. Richards, J. L., *Augustus De Morgan, the history of mathematics, and the foundations of algebra*, Isis, 78(1) (1987) 6-30.

17. Sfard, A., *The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives.* The Journal of Mathematical Behaviour, 14(1) (1995) 15-39.

De Morgan's view on the development of algebra

Dongdaemun middle school **Mi Kyung Yu**
Graduate School of Seoul National University **Jae Hong Kim**
Gyeongin National University of Education **Seok Il Kwon**
Korea Institute for Curriculum and Evaluation **Sun Yong Park**
Jungheung Middle School **Ji Sun Choi**
Gyeongin National University of Education **Kyo Sik Park**

In this paper, we discuss about De Morgan's view on the development of algebra according to following distinctions: arithmetic, universal arithmetic, symbolic algebra, significant algebra. De Morgan thought that the differences between arithmetic and universal arithmetic lie in the usage of letters and the immediate performance of computation. In his viewpoint, universal arithmetic is a transitional phase, in which absurd phenomena occur, from arithmetic to algebra and these absurd phenomena call for algebra. The feature of De Morgan's view on the development of algebra is that symbolic calculus which consist of symbol system without symbol's meaning is acquired, then as extended meanings are furnished to symbols, symbolic calculus become logical so significant calculus is developed. For example, Single algebra is developed, as an extended meaning is furnished to a symbol -1, and double algebra is developed, as an extended meaning is furnished to a symbol $\sqrt{-1}$. According to De Morgan, a symbol system is derived from the incompleteness of a prior symbol system.

Key words : Algebra, Algebra development, Arithmetic, Universal arithmetic, Arithmetic algebra, Symbolic algebra, Significant algebra

2000 Mathematics Subject Classification : 97-03, 97D20

ZDM Subject Classification : H23

접수일 : 2008년 8월 11일 수정일 : 2008년 9월 30일 게재확정일 : 2008년 10월 14일