한국수학사학회지 제21권 제4호(2008년 11월), 1 - 10

洪吉周의 代數學

서강대학교 수학과 **홍성사**
sshong@sogang.ac.kr
숙명여자대학교 수학과 **홍영희**
yhhong@sookmyung.ac.kr

이 논문은 洪吉周(1786~1841)의 幾何新說에 들어 있는 대수학 분야를 조사하여 洪吉周의 대수학을 구조적으로 분석한다. 雙推臆筭은 數理精蘊의 疊借互徵으로 이에 대한 문제를 추가한 것이고, 開方蒙求에서 완전제곱수부터 완전다섯제곱수를 급수로 나타내는 等式을 얻어내었다. 雜碎隨鈔에서, 整數環 Z의 商環 Z/(9)를 도입하여 합동방정식을 해결하고, 마지막으로 黃金比의 성질을 기하적으로 규명하였다.

주제어 : 洪吉周, 幾何新說, 雙推臆筭, 開方蒙求, 雜碎隨鈔, 數理精蘊

0. 서론

19世紀 朝鮮의 句股術([7])에서 우리는 洪吉周(1786~1841)의 句股術을 연구하였다. [7]에서 언급한 대로 그가 남긴 史料는 **孰遂念**([4]) 제14觀에 들어 있는 **幾何新說** 50쪽과 이의 補 4쪽과 **沆瀣丙函**([5]) 제10권에 들어 있는 弧角演例 136쪽 밖에 없으므로, 그의 수학에 대한 연구가 제한적일 수밖에 없다. 弧角演例는 球面三角法에 대한 산서이고, **幾何新說**은 雙推臆算(15쪽), 開方蒙求(15쪽), 雜碎隨鈔(20쪽)로 이루어져 있는데, 雜碎隨鈔는 두 문항을 제외하고 모두 句股術에 관한 문항들로 이들에 대한 연구는 [7]에 포함되어 있다. 나머지 雙推臆筭, 開方蒙求와 雜碎隨鈔의 두 문항은 모두 대수적 문항들이다.

洪吉周의 수학적 업적에 대한 연구를 완결하기 위하여 그의 대수적 문항들을 연구하는 것을 이 논문의 목적으로 한다.

이 논문은 雙推臆筭, 開方蒙求, 雜碎隨鈔 세 부분으로 나누어 연구를 진행한다.

첫째 절에서 雙推臆筭을 취급한다. 洪吉周가 **數理精蘊**(Shu li jing yun, 1723)의 下

編 卷9에 들어 있는 疊借互徵(die jie hu zheng)을 연구하여 이를 雙推臆筭이라는 이름으로 바꾸고, 疊借互徵에 들어 있지 않은 예제를 주로 **數理精蘊**에서 발췌하여 疊借互徵과 같은 방법으로 해결하고 있다. 疊借互徵(=雙推臆筭)은 2중가정법(Rule of Double False Position)의 특별한 경우이므로, 雙推臆筭이라는 명칭도 적절한 것으로, 洪吉周가 이를 정확히 이해하고 있음을 엿볼 수 있다.

둘째 절은 開方蒙求를 다룬다. 洪吉周는 완전제곱수에서 완전다섯제곱수를 유한급수를 사용하여 표현하였다. 이는 매우 의미 있는 것이지만, 전통적인 산서와 마찬가지로 증명은 포함하지 않고 있다. 다만 저자는 이들을 이용하여 제곱근부터 5제곱근의 정수해를 구하는데 응용하려 하였다. 增乘開方法도 간단한 연산으로 근을 구할 수 있는데, 저자는 이를 정확히 이해하지 못한 것으로 보인다. 일반 2차방정식의 풀이법도 같은 방법으로 접근하였다.

마지막 절은 雜碎隨鈔에 들어 있는 대수학 분야를 알아본다. 저자는 合同式의 문제를 해결하는 과정에서, 整數環 Z의 商環 Z/(9)를 도입하여 문제를 해결하였지만, 그의 방법은 일반적으로 적용될 수 없다. 商環을 도입한 것은 수학사적으로 매우 의미있는 것이다. 끝으로, 黃金比의 성질을 기하적으로 얻어내었다.

조선 산학에 관한 史料는 **韓國科學技術史資料大系 數學編**([3]), 중국 산학은 **中國科學技術典籍通彙**(Zhong guo ke xue ji shu dian ji tong hui) **數學卷**(Shu xue juan, [1])과 **中國歷代算學集成**(Zhong guo li dai suan xue ji cheng, [2])을 사용한다.
朝鮮과 中國의 算書로 참고문헌의 번호가 없는 경우 이들에 들어 있는 것을 뜻한다.

1. 雙推臆筭

雙推臆筭은 모두 13문항으로 이루어져 있다. **數理精蘊**의 下編 卷9의 疊借互徵을 洪吉周가 雙推臆筭이라는 새로운 이름을 붙이고, 이에 대한 예제가 13문항이다. 같은 卷9에 들어 있는 借衰互徵, 즉 단순가정법을 뜻하는 용어로 疊借互徵을 취급하기 전에 도입한 방법인데, 이 절의 第5問을 第9問으로 다루고 있다. 이로 보아 洪吉周가 疊借互徵을 연구하지 않았을 가능성은 전혀 없다고 본다. 疊借에 비하여 현재 우리가 사용하고 있는 2중가정법에 雙推라는 단어가 더 적합한 것은 틀림없다.

전술한 대로 이는 2중가정법인데, 2중가정법으로 잘 알려진 盈朒法과 비교하여 보자. 두 경우 모두 1차방정식 $ax=b$의 문제를 해결하는데, a, b가 주어지지 않고, 조건 (*) $ax_1=b+y_1$, $ax_2=b+y_2$로부터 근을 구하는 것이다. 이 때 y_1, y_2의 부호에 따라

盈(+), 朒(−)이 주어지고, 이에 따라서 근 x_0을 구하는데, 盈朒法은 위의 조건 (*)에서 a, b를 구하여 $x_0 = \frac{b}{a}$를 구하는 것이다. 특히 b를 구하기 위하여 a를 소거하는 과정에 維乘(**九章算術**(Jiu zhang suan shu), 盈朒章, 第4問 術 참조)이 필요하다. 疊借互徵을 현재 우리가 사용하는 일차함수의 graph를 가지고 설명하면 다음과 같다.

아래 그림에서 직선 AC는 $y = ax$, AB는 $y = b$이고, A의 좌표는 (x_0, b) (x_0는 방정식의 구하는 근), B, B′의 좌표는 각각 (x_1, b), (x_2, b)를 나타내고 BC, B′C′의 길이가 y_1, y_2의 절대값인데 이들을 각각 b_1, b_2로 나타내기로 하자.

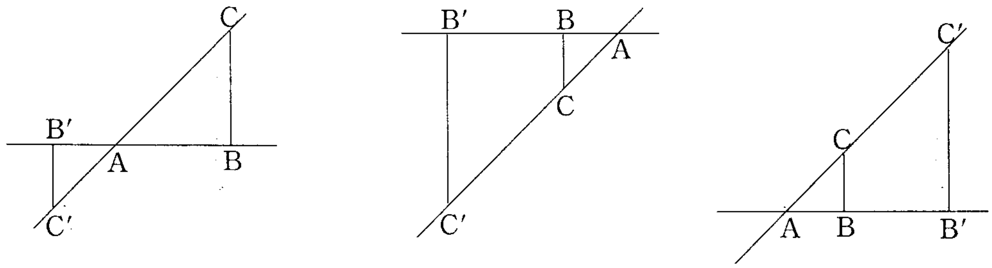


그림 1　　　그림 2　　　그림 3

이들 세 경우 모두 △ABC, △A′B′C′이 닮은삼각형이 되므로 다음 비례식을 얻게 된다.

그림 1의 경우 $(x_1 - x_0) : (x_0 - x_2) = b_1 : b_2$가 되므로,

$(x_1 - x_0) : (x_1 - x_2) = b_1 : (b_1 + b_2)$ 혹은 $(x_1 - x_2) : (x_0 - x_2) = (b_1 + b_2) : b_2$에 의하여 구하는 근 x_0을 구할 수 있다.

그림 2의 경우 $(x_0 - x_1) : (x_0 - x_2) = b_1 : b_2$가 되므로,

$(x_0 - x_1) : (x_1 - x_2) = b_1 : (b_2 - b_1)$ 혹은 $(x_1 - x_2) : (x_0 - x_2) = (b_2 - b_1) : b_2$ 에 의하여 구하는 근을 구한다.

그림 3의 경우도 같은 방법으로 닮은 삼각형과 비례식의 성질을 이용하여 근을 구할 수 있다.

전술한 대로 盈朒法은 維乘이 필요한 것을 洪吉周는 언급하고 있다. 疊借互徵은 이를 사용하지 않고 비례식을 이용하여 해를 구하는 것이다. 洪吉周는 **數理精蘊**의 疊借互徵을 언급하지 않았다. 또 위의 세 경우에 따라 $b_1 + b_2$, $b_2 - b_1$을 사용하는데 이에 대한 언급도 **數理精蘊**의 疊借互徵의 시작 부분에 자세히 언급하고 있는데, 이에 대하여 洪吉周는 정확하게 나타내지 못하고 있다.

또 **數理精蘊**과 마찬가지로 洪吉周의 예에서도 a, b가 쉽게 정해지는 경우로, 근을

바로 구할 수 있는데도, 이 방법을 사용하고 있다.

각 문제의 출처를 나타내어 구조를 알아보자. 卷數는 **數理精蘊** 下編의 卷數, 이어서 각 卷에 들어 있는 節 이름과 함께 문항 번호로 洪吉周의 예제를 나타낸다.

第1問 - 卷4, 按分遞折比例, 遞折差分 第3問
第2, 3問 - 卷5, 按數加減比例, 遞加遞減差分 第5問, 第11問
第4問 - 卷5, 按數加減比例, 首尾互準差分 第6問
第5, 6問 - 卷6, 和數比例 第15問, 較數比例 第10問
第7問 - 卷7, 和較比例 第13問
第8問 - 卷8, 盈朒, 雙套 一盈一朒 第1問
第9問 - 卷9, 借衰互徵 第5問
第10問 - **九章算術** 第7章 盈不足 第11問과 **算學啓蒙**(Suan xue qi meng, 1299) 卷下 盈朒 第8問과 같은 종류.
第11, 12問 - 卷10, 方程 和數類 第1問, 和較兼用類 第2問
第13問 - 卷18, 測量, 句股測量 第9問과 같은 종류.

이 자료에 따르면, **數理精蘊**의 線部에서 卷3을 제외하고 나머지 모든 卷에서 문제를 선택하여 疊借互徵을 사용하여 문제를 해결하고, 第10問은 **九章算術**과 마찬가지로 공비가 2와 $\frac{1}{2}$인 두 유한급수의 합이 같아지는 문제로 같은 종류이다. **九章算術**은 蒲 와 莞, **算學啓蒙**은 松과 竹이 자라는 것으로 문제를 나타내었는데, 洪吉周는 후자를 사용하였다. 이 문제는 $2^x = 12$를 풀어내는 문제를 盈朒으로 해결한 것이다. 이는 바로 1차보간법으로 유일하게 $ax = b$ 형태의 문제가 아닌 것이다. 물론 **九章算術**부터 洪吉周까지 그들은 1차보간법에 대한 생각을 할 수는 없었을 것이다. [10]에서 **九章算術** 시기에 지수함수에 대한 개념은 없었을 것이라는 논거는 맞지만 그들은 지수가 자연수인 경우만 생각할 수 있었다는 설명보다는 두 자연수 지수 사이에 2^x을 1차함수로 이해하여 盈朒을 사용한 것이므로 1차보간법으로 설명하여야 된다. 마지막으로 第13問은 劉徽(Liu Hui)의 **海島算經**(Hai dao suan jing) 형태의 문제로 다만 前, 後 두 表의 길이가 다른 경우이다. 이 경우도 卷18의 第9問과 다만 숫자만 다른 경우이다. 第13問은 **海島算經**에서는 모든 문제를 出入相補原理에 의하여 문제를 해결하였을 것으로 추정하는데, 洪吉周는 닮은 삼각형에서 얻어지는 비례식을 얻어([7]), 이를 1차방정식으로 변환하여 疊借互徵을 사용하여 문제를 해결하였다.

第1-7問은 비례의 성질을 이용하여 해결하는 문제이고, 第8問, 第11-12問은 卷 제목에서 어떤 구조를 가지는 문제인지 명백히 들어 난다.

전술한 대로 모두가 변환을 통하여 $ax = b$ 형태의 문제로, 모든 경우에 b가 주어져 있는 경우이다. 따라서 疊借互徵의 방법을 사용할 필요가 없고, 단순가정법으로 해결

할 수 있는 문제들이다. 다항식과 등식의 성질에 익숙하지 못한 것을 감안하더라도 불필요한 계산을 하고 있는 것은 틀림없다. 또 a도 쉽게 계산할 수 있는 것들인데 가정으로 택한 -假如- 값으로 결과를 구하는 과정과 a를 계산하는 과정은 완전히 일치하므로 바로 1차방정식을 구하여 해결할 수 있는 것들이다. 또 원래 그 문제가 속해 있던 **數理精蘊**의 방법과 疊借互徵의 방법을 비교하면 거의 대부분 원래 방법이 좋은 것을 알 수 있다. 실제로 **數理精蘊** 疊借互徵 절의 문제들도 같은 오류를 범하고 있는데, 다만 이항 등 등식의 성질을 모르는 것으로 보면 b값이 바로 나올 수 없으므로 疊借互徵을 사용한 것으로 보인다.

方程, 즉 연립1차방정식은 실제로 第11-12問뿐 아니라, 第4, 6, 7, 8問이 모두 연립방정식의 문제들이다. 왜냐하면 이들 문제는 두 조건으로 이루어져서 假如로 택한 숫자에 대하여 한 조건에서 나머지 숫자를 얻어 남은 조건에 대입하여 b_1, b_2를 구하고 있기 때문이다. 마찬가지로 第11-12問도 같은 방법으로 풀고 있다. 따라서 결국 여러 방정식에서 한 방정식으로 소거하여 $ax=b$ 형태로 변환하여 문제를 해결한 것이다. 따라서 이들도 **九章算術**과 같은 방법을 사용하고 있는 **數理精蘊**의 방법과 비교하면 疊借互徵을 사용하는 것은 훨씬 구조적이지 못하다. 다만 第10問, 즉 1차보간법의 경우는 수학적으로 의미 있는 것이다.

한편 第2, 5, 7, 9, 11, 12問은 각각 李尙爀(1810~?)의 **借根方蒙求**(1854)의 線類 第4, 19, 32, 40, 72, 77問으로 취급되었다([6]).

2. 開方蒙求

이 절에서 사용될 용어로 다음 급수를 정의한다.

$$S_n^0 = n;\ S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} S_k^0 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};\ \ S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} S_k^1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6};$$

$$T_n^1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ \ T_n^2 = \sum_{k=1}^{n} T_k^1 = \frac{n(n+2)(n+1)^2}{12}.$$

완전제곱수 $\left(n^2\,(n\in\mathrm{N})\right)$, 완전세제곱수 $\left(n^3\right)$ 등의 표현은 매우 오랜 역사를 가지고 있다. 예를 들어 Nicomachus(ca. 100 A.D.)는 다음과 같은 등식을 얻어내었다([9]).

$n^2 = S_{n-1}^1 + S_n^1;\ n^3 = (n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\ ...\ +(n^2+n-1).$

한편 Juzuk은 n^4도 $3^4 = 1+(4+5+6)+(11+12+13+14+15)$와 같이 나타낼 수 있음을 보였다([8]).

洪吉周는 開方蒙求에서 다음 등식을 얻어내었다.

1) $n^2 = n(n-1) + n = 2S^1_{n-1} + S^0_n$,

2) $n^3 = n(n-1)(n+1) + n = 6S^2_{n-1} + S^0_n$,

3) $n^4 = (n-1)n^2(n+1) + n(n-1) + n = 12T^2_{n-1} + 2S^1_{n-1} + S^0_n$,

4) $n^5 = 2\sum_{k=1}^{n-1} 5S^1_k(1+S^1_k) + S^0_n$.

洪吉周의 등식은 매우 흥미 있는 것인데, 어떻게 증명하였는지 알 수 없다.

현재 우리가 사용하는 문자를 이용하여 이를 증명해 보면 다음과 같다.

$n^2 - n = n(n-1)$; $n^3 - n = n(n^2-1) = n\{n(n-1) + n - 1\} = n(n-1)(n+1)$;

$n^4 - n = n(n^3-1) = n\{(n-1)n(n+1) + n - 1\} = (n-1)n^2(n+1) + n(n-1)$을 얻을 수 있다. 물론 여러 가지 방법으로 이들을 증명할 수 있지만 앞의 결과를 활용하는 방법으로 이들을 구하여 보았다. 그러나 식 4)는 위와 같이 증명하는 것은 쉽지 않다. 이 식 속에 들어 있는 계수로 보아, 다음 급수의 합에 관한 식

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

이 사용되었을 것인데, 이에 대한 정보를 洪吉周가 가지고 있었을 것으로 보기는 어렵다. 전술한 증명은 인수분해를 사용하고 있는데, 朝鮮과 中國 算學에서 인수분해는 전혀 사용된 흔적을 찾아 볼 수 없다. 기하적 방법을 사용하였을 가능성이 가장 크다.

洪吉周는 매우 중요한 등식을 얻었지만, 제곱근, 세제곱근. 네제곱근, 다섯제곱근을 구하는데 이 등식을 다음과 같이 활용하였다.

$$\frac{n^2}{2} = S^1_{n-1} + \frac{n}{2},\ \frac{n^3}{6} = S^2_{n-1} + \frac{n}{6},\ \frac{n^4}{2} = 6T^2_{n-1} + S^1_{n-1} + \frac{n}{2},\ \frac{n^5}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} 5S^1_k(1+S^1_k) + \frac{n}{2}$$

을 이용하여 주어진 수를 각각 위의 식의 좌변의 분모로 나누고 우변의 각 항에 해당하는 급수의 항을 차례로 빼어서 우변의 남는 수로 근을 구할 수 있다는 것에 착안한 것이다. 이 때, 위의 등식이 만족하는 $n-1$항의 합을 빼면 우변의 남는 항이 되어 陽數가 되는데, n항의 합을 빼면 陰數가 되어 구하는 근의 범위가 두 연속하는 자연수 사이에 있게 되는 것을 추정한다. 또 이 방법을 增乘開方法과 비교하면, 增乘開方法은 각 자리수를 차례로 組立除法을 사용하여 구하여야 하는데 반하여 洪吉周의 방법은 모든 자리수를 위의 과정을 통하여 한꺼번에 구할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 완전제곱수 등이 아닌 경우에는 次商을 구하기 위하여 주어진 수에 각각 10^2, 10^3, 10^4, 10^5을 곱하여 위의 과정을 거치면 된다. 洪吉周가 그의 방법을 설명한 것을 보면 增乘開方法을 정확히 이해하지 못하고 있음을 보이고 있다. 왜냐하면 組立除法은 위의 과정에 비하여 특별히 어려운 계산이 아니고, 또 增乘開方法에서 소수 이하의 자리수

를 구하는 과정과 洪吉周의 과정을 비교하면 洪吉周의 과정은 전혀 연결되어 있지 못하고 있음을 곧 알 수 있다. 또 큰 수 n의 경우에 1에서부터 시작하여 $n-1$항 까지 차례로 빼 나가는 과정을 자랑하고 있지만, 근을 추정하여 위의 급수에 대한 공식을 사용하여 바로 급수의 합을 빼는 것이 훨씬 간단하다. **數理精蘊**에 들어 있는 堆垜(下編 卷30과 上篇 卷5)에 茭草垜, 三角垜, 四角垜 등이 모두 들어 있는데 이를 활용하지 않고 있다.

洪吉周는 등식 $ab=b(a-b)+b(b+1)-b=b(a-b)+2S_b^1-b \ (b\in \mathrm{N})$에서 $\dfrac{ab}{2}=b\dfrac{a-b}{2}+S_b^1-\dfrac{b}{2}$를 이용하여 위의 제곱근을 구하는 방법과 같이 하여 ab, $a-b$가 주어진 경우 a, b를 구할 수 있다고 하였지만, 이 경우에도 위의 경우와 같이 자연수 b가 결정되지 않는 경우는 의미가 없다.

마지막으로 ab, $a+b$가 주어진 경우에 그는

$ab-n(a+b)+n+2(1+2+...+n)=(a-b)+1$을 만족하는 n, 즉 $a+1, b-1$을 구하여 a, b를 구할 수 있다고 하였다. $a-b$를 먼저 구하지 않고는 이 방법을 사용할 수 없다.

增乘開方法을 대체하려는 저자의 노력으로 볼 수 있으나, 이를 정확히 이해하지 못하였기 때문에 매우 흥미 있는 등식 1) - 4)를 얻어내었지만 이를 제대로 활용하지 못하고 있다. 이에 반하여 등식 1) - 3)은 李尙爀의 **翼算**(1868) 下編 堆垜說에 기하적 방법을 사용하여 증명하고, 이를 이용하여 級數의 합을 구하고 있다.

3. 雜碎隨鈔

雜碎隨鈔는 제1문항, 제17문항을 제외하면 모두 句股術에 관한 문항이다.

이 두 문항에 대하여 조사하여 보자.

제1문항은 合同式 $\begin{cases} x\equiv 7 \bmod 31 \\ x\equiv 3 \bmod 9 \end{cases}$ 를 해결하는 문제이다.

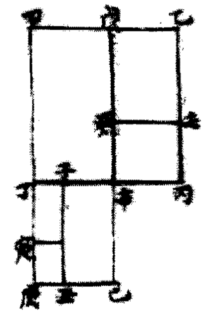
그의 방법을 일반적인 경우로 해석하면 다음과 같다.

合同式 $\begin{cases} x\equiv a \bmod m_1 \\ x\equiv b \bmod m_2 \end{cases}$ $(m_2<m_1)$에서, 첫째 合同式의 해집합은 $\{m_1k+a|k\in \mathrm{Z}\}$이다. 물론 洪吉周는 정수 집합 Z 대신에 자연수 집합 N으로 제한하여 해집합으로 $\{m_1k+a|k\in \mathrm{N}\}$을 상정하고 있다. 따라서 주어진 合同式의 해를 구하기 위하여 위의 해집합에 속하는 원소로 두 번째 합동식을 만족하는 것을 찾으면 된다. 따라서 저자는 합동식 $m_1k+a\equiv b \bmod m_2$를 해결하려고 한다. $m_2<m_1$에서 $m_1\equiv m \bmod m_2$라

하면, 위의 합동식 대신에 이와 동치인 $mk+a \equiv b \bmod m_1$을 풀어서 주어진 合同式의 근을 구하면 된다. 위의 문제에 이를 적용하면 $m=4$이므로 그는 합동식 $4k+7 \equiv 3 \bmod 9$의 해 $k=8$을 구하여 주어진 문제의 해 255를 구하였다.

孫子算經(Sun Zi suan jing)에서 시작된 동양 산학의 合同式의 문제는 모두 세 개의 合同式으로 이루어 진 것이고, Chinese Remainder Theorem으로 알려진 방법으로 이들을 풀었다. 洪吉周가 두 개의 合同式으로 이루어 진 것을 취급한 것은 매우 특이하고, 또 이 문제를 Chinese Remainder Theorem 방법으로 해결하지 않고 위와 같이 두 방정식의 해 집합의 공통부분으로 접근한 것과 해집합을 $\{m_1k+a \mid k \in \mathrm{Z}\}$와 같이 생각한 것도 **孫子算經**부터 시작된 방법과 전혀 다른 것이다. 한편 동치인 합동식을 얻어 낸 것도 저자가 합동 관계가 整數環 Z에서 congruence임을 이해하고 있음을 나타낸 것으로 볼 수 있다. 또 合同式 $4k+7 \equiv 3 \bmod 9$를 해결하기 위하여 9개의 빈칸을 그려 자연수의 동치류를 나타내고, 7의 동치류 [7]인 일곱 번째 빈칸에 3을 놓고 4자리씩 옮겨감에 따라 차례로 4, 5, 6, 7, 8을 그 빈칸에 적어놓고 8이 0의 동치류 [0] = [9]인 아홉 번째 칸에 놓이므로 8이 구하는 해라고 하였다. 洪吉周가 商環 Z/(9)에서 덧셈을 하고 있는 것을 알 수 있다. 따라서 合同式의 문제를 商環 Z/(9)에서 방정식으로 인식하고 있다는 것을 나타낸다. 다만 7의 동치류에 3을 놓고 위와 같이 하여 8이 해가 된다고 하였는데, 이는 단지 $4\times5+7 \equiv 0 \bmod 9$를 뜻하는 것이고 주어진 4 때문에 $4\times3 \equiv 3 \bmod 9$가 되므로, $4\times8+7 \equiv 3 \bmod 9$, 즉 $k=8$이 주어진 合同式의 해가 된 것이다. 洪吉周의 방법이 일반적으로 성립하지 않는 예로, $4k+7 \equiv 5 \bmod 9$를 그의 방법으로 풀면 $k=1$이지만 이는 해가 아니다. 洪吉周는 聯立合同方程式을 구조적으로 접근하였지만, 마지막에 合同方程式의 풀이에서 일반적이지 못한 방법을 사용하고 있다.

제17문항은 黃金比를 나타내는 비례식 $a : a-b = a-b : b$의 성질을 다루었다. 이 비례식을 아래 그림과 같이 甲乙 = 甲丁 $= a-b$를 한 변으로 하는 정사각형과 甲庚 $= a$, 甲戊 = 丁庚 $= b$ (= 乙壬)를 두 변으로 하는 직사각형을 그려서, $(a-b)^2 = ab$이므로 이들의 넓이가 같고, 戊乙 = 壬丙 $= a-2b$이다.



그림에서 $b^2 = (a-b)(a-2b)$를 얻어 黃金比를 나타내는 비례식 $a-b : b = b : a-2b$를 얻어내었다.
이 방법을 계속하여 丁子 = 寅庚 $= b-(a-2b) = 3b-a$를 사용하여 $(a-2b)^2 = b(3b-a)$를 얻어 다시 黃金比를 나타내는 비례식 $b : a-2b = a-2b : 3b-a$를 구하였다.
같은 방법을 계속 사용하면 처음 주어진 비례식에서 黃金比를 나타내는 比例式을 무한히 만들 수 있다.

그의 句股術과 雙推臆筭에서와 같이 洪吉周는 비례식의 성질에서 바로 이들을 얻을 수 있는데도, 기하학적으로 이들을 증명하였다. 조선 산학에서 전혀 취급되지 않았던 黃

金比의 문제를 저자가 왜 택하였는지 알 수 없는데, 그의 句股術의 문제에서 작도 문제에 해당되는 것을 많이 다룬 것으로 보아, 서양 수학의 영향으로 이루어 진 것으로 보인다.

4. 結論

洪吉周의 **幾何新說**의 雙推臆筭은 저자가 **數理精蘊**의 疊借互徵을 연구하여 문제를 첨가한 것이다.

開方蒙求의 等式들은 현재의 문제로도 충분히 의미 있는 것들인데, 다만 이를 제곱근부터 다섯제곱근을 구하는 방법으로 사용하였다.

雜碎隨鈔에 들어 있는 그의 合同式과 黃金比의 문제도 모두 朝鮮과 中國의 算學에서 그 유례를 찾을 수 없는 것들이다.

洪吉周의 수학에 대한 남겨진 자료가 매우 적지만, 그의 **幾何新說**에 들어있는 代數學은 전통적 동양 算學에서 취급된 분야와 달리, 매우 창의적이며, 현대수학과의 연결고리를 이룬 것이므로 수학사의 관점에서 매우 의미 있는 업적이다.

연세대학교 도서관에서 洪吉周의 **幾何新說**의 자료를 구해 준 연세대학교 김호범 교수님께 깊은 감사의 뜻을 전합니다.

참고 문헌

1. *中國科學技術典籍通彙*, 數學卷 全五卷, 河南教育出版社, 1993.
2. *中國歷代算學集成*, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
3. *韓國科學技術史資料大系*, 數學編, 1卷 - 10卷, 驪江出版社, 1985.
4. 洪吉周, 幾何新說, *孰遂念*, 14觀, 연세대학교 도서관.
5. 洪吉周, 弧角演例, *沆瀣丙函*, 10劵, 연세대학교 도서관.
6. 홍성사, 홍영희, 李尙爀의 借根方蒙求와 數理精蘊, 한국수학사학회 학술발표회 논총, 18(2008), 제1호, 6-9.
7. 홍성사, 홍영희, 김창일, 19世紀 朝鮮의 句股術, **한국수학사학회지** 21(2008), No. 2, 1-18.
8. D. Juzuk, Curiosa 56, Scripta Mathematica 6(1939), 218.
9. G. Nicomachus, Introductio arithmeticae, trans. M. L. D'Ooge, McMillan, 1926.
10. K. Shen, J. N. Crossley, A. W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Arts*, Oxford University Press, 1999.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 21 No. 4 (Nov. 2008), 1 - 10

Hong Gil Ju(洪吉周)'s Algebra

Department of Mathematics, Sogang University **Sung Sa Hong**
Department of Mathematics, Sookmyung Women's University **Young Hee Hong**

In this paper, we investigate the part dealing with algebra in Hong Gil Ju's GiHaSinSul to analyze his algebraic structure. The book consists of three parts.

In the first part SangChuEokSan, he just renames Die jie hu zheng(疊借互徵) in Shu li jing yun to SangChuEokSan and adds a few examples.

In the second part GaeBangMongGu, he obtains the following identities:

$$n^2 = n(n-1) + n = 2S_{n-1}^1 + S_n^0;\ n^3 = n(n-1)(n+1) + n = 6S_{n-1}^2 + S_n^0;$$

$$n^4 = (n-1)n^2(n+1) + n(n-1) + n = 12T_{n-1}^2 + 2S_{n-1}^1 + S_n^0;$$

$$n^5 = 2\sum_{k=1}^{n-1} 5S_k^1(1 + S_k^1) + S_n^0$$

where $S_n^0 = n,\ S_n^{m+1} = \sum_{k=1}^{n} S_k^m,\ T_n^1 = \sum_{k=1}^{n} k^2$, and $T_n^2 = \sum_{k=1}^{n} T_k^1$, and then applies these identities to find the nth roots $(2 \le n \le 5)$.

Finally in JabSwoeSuCho, he introduces the quotient ring $Z/(9)$ of the ring Z of integers to solve a system of congruence equations and also establishes a geometric procedure to obtain golden sections from a given one.

Key Words : Hong Gil Ju(洪吉周, 1786 ~ 1841), GiHaSinSul(幾何新說), SangChuEokSan (雙推臆筭), GaeBangMongGu(開方蒙求), JabSwoeSuCho(雜碎隨鈔), Shu li jing yun(數理精蘊)

2000 Mathematics Subject Classification : 01A13, 01A55, 11-03, 11-07.

접수일 : 2008년 9월 8일 수정일 : 2008년 10월 20일 게재확정일 : 2008년 11월 3일