웨이블릿 및 시스템 분할을 이용한 특이섭동 선형 시스템 해석

Wavelet-based Analysis for Singularly Perturbed Linear Systems Via Decomposition Method

김 범 수, 심 일 주*
(Beom-Soo Kim and Il-Joo Shim)

Abstract : A Haar wavelet based numerical method for solving singularly perturbed linear time invariant system is presented in this paper. The reduced pure slow and pure fast subsystems are obtained by decoupling the singularly perturbed system and differential matrix equations are converted into algebraic Sylvester matrix equations via Haar wavelet technique. The operational matrix of integration and its inverse matrix are utilized to reduce the computational time to the solution of algebraic matrix equations. Finally a numerical example is given to demonstrate the validity and applicability of the proposed method.

Keywords : Haar wavelet, linear system, singular perturbation, sylvester equation, system decomposition

I. 서론

기계적 요소와 전기적 요소가 결합된 시스템이나 매우 작은 시상수로 인한 와류(parasitic) 파라미터 등에 의해 차수가 증가된 시스템은 느린 응답과 빠른 응답이 동시에 존재하는 다중 시간 척도(multi time scale) 동적 특성을 갖는다. 특이 섭동 동적 시스템은 수학적 관점 뿐만 아니라 공학적으로도 주요 관심 대상으로서 특이 섭동(singular perturbation) 이론을 이용하여 해석하거나 제어기 설계에 관한 연구가 매우 활발히 진행되고 있다[1]. 최근 Haar 웨이블릿을 이용하여 특이섭동 선형 시불변 시스템의 최적제어 문제를 다룬 연구가 보고되었다[2]. 이 방법은 준 정상 상태화된 느린 시스템과 빠른 시스템에서의 해를 각각 Haar 웨이블릿을 이용하여 구한 후 이들을 이용해서 전체 근사 최적 제어를 구하는 합성 제어 기법을 사용하였는데 여기서 척도를 크게 하면 Haar 웨이블릿에 의해 구성된 행렬방정식의 차수가 매우 커지는데 행렬방정식 구조상 이 고차의 행렬방정식을 분할하여 해를 구하기가 매우 어렵다.

공학 분야에서 퓨리에 변환, 단기 퓨리에 변환(short time fourier transform)과 같이 직교 기저 함수는 매우 중요한 역할을 한다. 직교 기저 함수들로 이루어진 함수 공간 내에서 임의의 함수를 이들 직교 기저 함수로 표현하면 각 기저 함수에 대응되는 계수를 내적에 의해 유일하게 구할 수 있다. 수학적 해석 방법론 중의 하나인 웨이블릿도 직교 기저 또는 정규 직교 기저 함수를 바탕으로 순수 수학 뿐만 아니라 공학과 경제학 등에서 활발히 응용되고 있다. 창문함수를 이용하는 단기 퓨리에 변환과 유사하게 웨이블릿은 모 웨이블릿(mother wavelet)을 척도(scale)및 이동(shift)하여 주어진 함수를 단기 퓨리에 변환보다 시간과 주파수 영역 양쪽에서 국부성(localization)을 더 잘 나타낼 수 있다. 그리고 웨이블릿으로 어떤 함수를 표현하는데 있어서 적은 수의 계수로도 충분하다는 특징을 갖는다[3].

동적 시스템 문제를 포함하여 미분 방정식이나 편미분 방정식의 해를 구하는데 웨이블릿을 이용한 많은 연구 결과가 보고되고 있다[4-9]. Haar 함수로 구성된 Haar 웨이블릿은[10] 직교 웨이블릿 중에서 가장 간단한 형태로서 이를 선형 미분 방정식으로 표현된 동적 시스템에 적용할 수 있는 계기는 Haar 직교 기저 함수들의 적분 함수를 쉽게 구할 수 있고 또한 직교 기저 함수와 적분 함수들을 이산화한 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들 각각에 대해 재귀적 관계를 입증함으로써 척도가 증가해도 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들을 쉽게 구할 수 있음을 보임에 있다[4-6]. 따라서 Haar 웨이블릿을 선형 동적 시스템에 적용하면 선형 미분 방정식의 해를 구하는 문제는 이산 Sylvester 방정식 문제로 변환되어 단순 대수 방정식의 문제로 귀결된다. 그러나 척도가 증가할수록 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬의 차원은 2의 멱수로 증가하게 되므로 이는 매우 많은 계산량과 저장공간을 필요로 한다. Chen-Hsiao는 Haar 함수 행렬 구조의 특수성 및 재귀적 관계를 이용하여 이산 Sylvester 방정식을 대수 행렬 방정식과 이산 Sylvester 방정식으로 분리하는 반복적 기법을 이용하여 행렬의 열을 반씩 계속 줄여 나간 후 저차의 방정식에서 해를 구한 것들을 합성함으로써 전체 해를 구하는 알고리즘을 제시하였다[4]. 이 방법에서 방정식 분리는 이진 트리 형태를 구성하는데 항상 노드의 좌측 자식 노드만이 분리되며 또한 이산 Sylvester 방정식을 분리할 때마다 역행렬을 구하는 과정을 반복해야 한다.

본 연구에서는 특이섭동 선형 시스템을 Chang 변환[11]을 이용하여 완전 독립적인 빠른 시스템과 느린 시스템으로 분리한 후 분리된 시스템에서의 해를 Haar 웨이블릿을 이용하여 구한 후 Chang 역변환을 이용해서 원래 시스템에서의 해를 구하는 방법을 제시한다. 분리된 각 서브 시스템에서의 이산 Sylvester 방정식은 [7]에서 제시된 해석적 Haar 적분 연산 역행렬을 이용하여 완전 이진 트리 형태로 방정식을 분할함으로써 최하위 노드에서는 단순 벡터 방정식을 풀고 이들 노드에서의 해를 합성함으로써 전체 해를 구할 수 있음을 보인다. Haar 웨이블릿을 이용하여 특이섭동 시스템의 실제 해

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2008. 6. 19., 채택확정 : 2008. 8. 21.
김범수 : 경상대학교 기계항공공학부, 해양산업연구소
(kimbs@gnu.ac.kr)
심일주 : 대림대학 자동화시스템과(ijshim@daelim.ac.kr)

에 매우 근접한 해를 얻기 위해서는 척도를 증가해야 하는데 특이 섭동 구조 시스템을 다중 시간 척도에 따른 저차의 독립적인 시스템으로 분할하고 분할된 시스템에서 해를 완전 이진 트리 구조 방정식으로 구함으로써 특이 섭동 구조에 따른 수치적 불명확한(ill-defined) 문제를 회피하고 계산량을 줄일 수 있음을 보인다.

II. Haar 웨이블릿 함수와 적분 연산 행렬

Haar 함수로 구성된 Haar 웨이블릿은 웨이블릿 중에서 가장 간단한 형태로서 척도구성함수(scaling function)는 다음과 같이 정의된다[10].

$$h_0(t)=\begin{cases}1 & t\in[0,1)\\ 0 & t\notin[0,1)\end{cases} \tag{1}$$

이 척도함수에 대한 모 웨이블릿(mother wavelet)은 (2)와 같이 정의하고 척도구성함수와 모 웨이블릿은 웨이블릿이 가져야 하는 직교성을 만족한다.

$$h_1(t)=\begin{cases}1 & t\in[0,\frac{1}{2})\\ -1 & t\in[\frac{1}{2},1)\\ 0 & t\notin[0,1)\end{cases} \tag{2}$$

힐버트(Hilbert) 공간 $L_2([0,1))$ 에서 Haar 웨이블릿은 부모 웨이블릿과 모 웨이블릿을 척도구성(dilation)과 평행이동(translation)한 $h_i(t)$ 들로 이루어진 직교 기저 함수들의 집합이다.

$$h_i(t)=h_1\left(2^j t-k\right)=\begin{cases}1 & t\in[t_a,t_b)\\ -1 & t\in[t_b,t_c)\\ 0 & t\notin[t_a,t_c)\end{cases} \tag{3}$$

여기서 $i=2^j+k$ 이고, 정수 $j\geq 1$ 과 $0\leq k<2^j$ 은 각각 척도구성 및 평행이동 모수이며, 시간 경계 구간은 $t_a=\frac{k}{2^j}$, $t_b=\frac{0.5+k}{2^j}$, $t_c=\frac{1+k}{2^j}$ 이다. Haar 함수의 받침(support)이 $[0,1)$ 이므로 $L_2([0,1))$ 공간에 속하는 제곱적분 가능한 함수 $y(t)$ 는 Haar 기저 함수들의 선형 결합으로 표현 할 수 있다.

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k h_k(t) \tag{4}$$

Haar 함수가 직교 기저 함수이므로 Haar 계수 u_k 들은 (5)와 같이 주어진 함수 $y(t)$ 와 Haar 함수와의 내적으로 유일하게 정해진다.

$$u_k=2^J\int_0^1 y(t)h_k(t)dt \tag{5}$$

Haar 계수 벡터 $\mathbf{U}_m$ 와 Haar 함수 벡터 $\mathbf{h}_m(t)\in R^{m\times 1}$ 를 다음과 같이 정의하면

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_m&=\begin{bmatrix}u_0 & u_1 & \cdots & u_{m-1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{h}_m(t)&=\begin{bmatrix}h_0(t) & h_1(t) & \cdots & h_{m-1}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{6}$$

(4)에서 무한 급수로 전개된 함수 $y(t)$ 를 척도 J , 즉 $m(=2^J)$ 개의 Haar 함수로 근사화 시키면 다음과 같이 벡터 형태로 표현할 수 있다.

$$y(t)\cong\sum_{i=0}^{m-1}u_i h_i(t)=\mathbf{U}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{h}_m(t) \tag{7}$$

Haar 함수 벡터 (6)을 적분한 함수를 Haar 기저 함수 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_0^t\mathbf{h}_m(\tau)d\tau\simeq\mathbf{P}_m\mathbf{h}_m(t) \tag{8}$$

여기서 $\mathbf{P}_m$ 은 $m\times m$ 차원을 갖는 적분 연산 행렬(operational matrix)이라 하고 다음과 같은 재귀적 특성을 갖는다[4].

$$\mathbf{P}_m=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{\frac{m}{2}} & -\frac{1}{2m}\mathbf{H}_{\frac{m}{2}}\\ \frac{1}{2m}\mathbf{H}_{\frac{m}{2}}^{-1} & \mathbf{0}_{\frac{m}{2}}\end{bmatrix},\ \mathbf{P}_1=[\tfrac{1}{2}] \tag{9}$$

여기서 $\mathbf{0}_{\frac{m}{2}}$ 은 $\frac{m}{2}$ -정방 영 행렬이고, Haar 행렬 $\mathbf{H}_m$ 은 받침 구간을 m개의 균등한 시간 간격에서 Haar 함수 $h_i(t)$ 를 이산화한 벡터를 열 벡터로 하는 m -정방 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{H}_m=\begin{bmatrix}\mathbf{h}_m(t_0) & \mathbf{h}_m(t_1) & \cdots & \mathbf{h}_m(t_{m-1})\end{bmatrix} \tag{10}$$

여기서 $\frac{i}{m}\leq t_i\leq\frac{i+1}{m}$, $0\leq i\leq m-1$ 이고 이 Haar 행렬은 다음과 같은 재귀적 관계를 갖는다[4].

$$\mathbf{H}_m=\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{\frac{m}{2}}\otimes\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\\ \mathbf{I}_{\frac{m}{2}}\otimes\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}_1=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \tag{11}$$

여기서 $\mathbf{I}_{\frac{m}{2}}$ 은 단위 행렬이고, $\mathbf{A}\in R^{n\times m}$, $\mathbf{B}\in R^{r\times q}$ 일 경우 $\otimes$ 는 다음과 같이 정의되는 Kronecker 곱을 나타낸다[12].

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B}\\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & & a_{2m}\mathbf{B}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \cdots & a_{nm}\mathbf{B}\end{bmatrix}\in R^{nr\times mq}$$

그리고 Haar 역행렬은 다음과 같이 Haar 전치행렬과 대각행렬 $\mathbf{D}_m$ 의 곱으로 표현할 수 있다[4].

$$\mathbf{H}_m^{-1}=\frac{1}{m}\mathbf{H}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_m \tag{12}$$

여기서 $\mathbf{D}_m=diag(1,1,2,2,\cdots,\underbrace{2^{p-1},\cdots,2^{p-1}}_{2^{p-1}})$, $p=\log_2 m$ 이다.

(9), (11) 및 (12) 에 따르면 Haar 행렬의 재귀적 관계 및 역행렬을 해석적으로 표현할 수 있고 적분연산 행렬도 재귀적으로 표현할 수 있고 이는 척도가 증가하더라도 쉽게 이들 행렬을 구성할 수 있음을 뜻한다. 다음 정리는 적분연산 행렬에 대해서도 그 역행렬을 해석적으로 나타낼 수 있음을 보

인다.

정리 1: (9)에서 정의된 Haar 연산 행렬 $\mathbf{P}_m$ 의 역행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{P}_m^{-1}=\begin{bmatrix} 0_{\frac{m}{2}} & 2m\mathbf{H}_{\frac{m}{2}} \\ -2m\mathbf{H}_{\frac{m}{2}}^{-1} & 4m^2\mathbf{H}_{\frac{m}{2}}^{-1}\mathbf{P}_{\frac{m}{2}}\mathbf{H}_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

증명: [7] □

선형 방정식**Ax=b**에서 계수 행렬 **A** 또는 **b**의 미세 변화가 해에 미치는 영향은 **A**의 조건 수(condition number)에 의해 결정된다. 일반적으로 조건 수 κ 는

$$\kappa(\mathbf{A})=\frac{\text{largest absolute eigenvalue of }\mathbf{A}}{\text{smallest absolute eigenvalue of }\mathbf{A}}$$

또는 $\kappa(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|_p\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|_p$, $p=1,2,F,\infty$ 와 같이 정의될 수 있으며 여기서 $\|\bullet\|_1$ 은 1 놈(norm), $\|\bullet\|_2$ 은 2 놈, $\|\bullet\|_F$ 은 Frobenius 놈, $\|\bullet\|_\infty$ 무한 놈을 뜻한다. 조건 수가 크면 선형 방정식 **Ax=b**의 해는 **A** 또는 **b**의 작은 변화에도 매우 민감하고 부정확할 수 있다, 이럴 경우 **A**를 불량 조건(ill conditioned) 행렬이라 한다.

척도 J가 증가할수록 Haar 행렬과 Haar 적분 연산 행렬이 크기는 2의 멱수로 증가하지만 Haar 행렬과 적분 연산 행렬은 각각 (11), (9) 에서와 같이 재귀적 관계를 갖고 있어 쉽게 구성할 수 있다. 예를 들어 척도 $J=3,(m=8)$ 일 때 적분 연산 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{P}_8=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

표 1. Haar 행렬과 적분 연산 행렬의 조건 수.

Table 1. Condition numbers for Haar and operational matrices.

척도	행렬 크기	H_m	P_m
2	4 x 4	1.41421	25.7749
3	8 x 8	2	106.293
4	16 x 16	2.82843	428.73
5	32 x 32	4	1718.55
6	64 x 64	5.65685	6877.59
7	128 x 128	8	27513
8	256 x 256	11.3137	110053
9	512 x 512	16	440210
10	1024 x 1024	22.6274	$1.760\text{x}10^6$
11	2048 x 2048	32	$7.043\text{ x}10^6$
12	4096 x 4096	45.2548	$2.817\text{ x}10^7$

그런데 Haar 행렬과 Haar 적분 연산 행렬의 조건 수는 척도에 따라 변하는데 적분 연산 행렬의 조건 수 ($\kappa(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|_2\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|_2$)는 표 1 에서 보듯이 척도가 커질수록 매우 급격히 증가함을 알 수 있으며 이는 척도가 증가하면 $\mathbf{P}_m$ 은 불량 조건 행렬이다.

III. 특이섭동 선형 시스템

다음과 같은 특이 섭동 선형 시불변 시스템을 고려해 보자

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1(t)\\ \varepsilon\dot{\mathbf{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \tag{14}$$

여기서 $\mathbf{x}_1(t)\in R^{n_1}$ 은 느린 상태(slow state) 벡터, $\mathbf{x}_2(t)\in R^{n_2}$ 는 빠른 상태(fast state) 벡터, $\mathbf{u}(t)\in R^q$ 는 입력 벡터, 초기치는 $\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{10}^{\mathrm{T}} & \mathbf{x}_{20}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 이고 $\mathbf{A}_i$, $i=1,..,4$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ 는 각각 알맞은 차원을 갖는 상수 행렬이며 ε 는 매우 작은 양의 상수이다. 특이 섭동 시스템 (14)를 다음과 같이 상수 ε 가 시스템 행렬 및 입력 행렬에 포함된 상태방정식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_e\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}_e\mathbf{u}(t) \tag{15}$$

여기서

$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_e=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{A}_3 & \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{A}_4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_e=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{B}_2\end{bmatrix}$ 이다.

Haar 웨이블릿을 이용하여 (15)로 주어진 특이섭동 시불변 선형 시스템의 해를 구하는 방법은 다음과 같다. 먼저 입력 $\mathbf{u}(t)$ 가 구간 [0,1) 에서 제곱적분 가능한 함수라고 가정하면 다음과 같이 Haar 함수로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t)\simeq\mathbf{U}\mathbf{h}_m(t) \tag{16}$$

여기서 주어진 입력에 대해서 $\mathbf{U}\in R^{q\times m}$ 는 (7)에 의해 구할 수 있다. 상태 벡터도 Haar 함수 벡터를 이용하여 표현할 수 있다. 상태 벡터의 미분을 미지 행렬 $\mathbf{V}\in R^{n\times m}$ $(n=n_1+n_2)$ 을 도입하여 다음과 같이 Haar 함수 벡터로 근사화 하고

$$\dot{\mathbf{x}}(t)\simeq\mathbf{V}\mathbf{h}_m(t) \tag{17}$$

이 식의 양변을 적분하고 (8)을 이용하면

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&\simeq\mathbf{V}\int_0^t\mathbf{h}_m(\tau)d\tau+\mathbf{x}_0\\ &\simeq\mathbf{V}\mathbf{P}_m\mathbf{h}_m(t)+\mathbf{x}_0\end{aligned} \tag{18}$$

와 같이 쓸 수 있다. (16-18)을 상태 방정식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{V}\mathbf{h}_m(t)=\mathbf{A}_e\left(\mathbf{V}\mathbf{P}_m\mathbf{h}_m(t)+\mathbf{x}_0\right)+\mathbf{B}_e\mathbf{U}\mathbf{h}_m(t) \tag{19}$$

(19)에서 $\mathbf{A}_e\mathbf{x}_0$ 는 열 벡터이고 Haar 행렬의 첫 번째 행은 모두 1 이므로 $\mathbf{A}_e\mathbf{x}_0$ 를 $\begin{bmatrix}\mathbf{A}_e\mathbf{x}_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\mathbf{h}_m(t)$ 와 같이 Haar

함수 벡터와의 곱으로 표현하면 (19)는

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_e\mathbf{V}\mathbf{P}_m + \begin{bmatrix}\mathbf{A}_e\mathbf{x}_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} + \mathbf{B}_e\mathbf{U} \tag{20}$$

와 같이 Stein 행렬 방정식으로 표현된다. 여기서 $\mathbf{Q}_e \triangleq \begin{bmatrix}\mathbf{A}_e\mathbf{x}_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} + \mathbf{B}_e\mathbf{U}$ 로 치환하면 (20)은 다음과 같이 간략히 표현할 수 있다.

$$\mathbf{V} - \mathbf{A}_e\mathbf{V}\mathbf{P}_m = \mathbf{Q}_e \tag{21}$$

따라서 미분 상태 행렬 방정식(15)의 근사 해는 대수 Stein 행렬 방정식 (21)의 해를 구하는 문제로 귀결된다. 일반적으로 이 방정식의 해는 보조정리 1 과 같이 Kronecker 곱으로 구할 수 있다.

보조정리 1: 행렬 방정식 (21)은 임의의 i, j 에 대해서 $\lambda_i(\mathbf{A}_e)\lambda_j(\mathbf{P}_m) \neq -1$ 이면 다음과 같이 유일한 해를 갖는다 [13].

$$vec(\mathbf{V}) = \left(\mathbf{I}_{nm} - \mathbf{P}_m^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{A}_e\right)^{-1} vec(\mathbf{Q}_e) \tag{22}$$

여기서 행렬 $\mathbf{X} \in R^{n\times m}$ 에 대한 $vec(\mathbf{X})$ 연산자는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathrm{vec}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix}x_{11}, x_{21}, .. x_{n1}, x_{12}, .. x_{n2}, x_{1m}, x_{2m}, .. x_{nm}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

정리 1에 의해서 $\mathbf{P}_m$ 의 역행렬이 존재함을 알 수 있고 또한 해석적으로 쉽게 구할 수 있으므로 (21)의 양변에 $\mathbf{P}_m^{-1}$ 을 곱하여 다음과 같이 대수 Sylvester 행렬 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{V}\mathbf{P}_m^{-1} - \mathbf{A}_e\mathbf{V} = \mathbf{Q}_e\mathbf{P}_m^{-1} \tag{23}$$

Stein 행렬 방정식 (21)과 같이 Sylvester 행렬 방정식의 해는 잘 알려진 보조정리 2 와 같이 구할 수 있다.

보조정리 2: 행렬 방정식 (23)은 임의의 i, j 에 대해서 $\lambda_i(\mathbf{A}_e) + \lambda_j\left(\mathbf{P}_m^{-1}\right) \neq 0$ 이면 유일한 해 (24)를 갖는다[13].

$$vec(\mathbf{V}) = \left(\mathbf{P}_m^{-\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_e\right)^{-1} vec\left(\mathbf{Q}_e\mathbf{P}_m^{-1}\right) \tag{24}$$

척도가 증가하면 행렬 방정식 (21)의 차수가 매우 커지므로 계산량이 매우 많아지게 된다. 또한 $\mathbf{A}_e$ 와 $\mathbf{P}_m$ 이 불량 조건 행렬이므로 $\mathbf{I}_{nm} - \mathbf{P}_m^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{A}_e$ 또는 $\mathbf{P}_m^{-\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n - \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}_e$ 도 불량 조건 행렬이다[14]. 따라서 특이섭동 시스템 (15)의 해를 (22), (24)와 같이 선형 시스템을 통해 구한 것은 수치적으로 정확성을 보장하기 어려울 뿐더러 계산량이 매우 많아 비효율적이다.

일반적으로 특이 섭동 시스템 (14)에서 작은 상수 ε 는 상기 시스템 해석 등에 있어서 수치적으로 불명확한 문제를 야기한다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위한 여러 방법들이 제안되었으며 그 중 Chang 변환은 Chang 변환 행렬 (25)를 이용하여 특이섭동 시스템 (14)를 ε 와 결합된 상태 방정식과 결합되지 않은 상태 방정식으로 분리한다[1,11].

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} - \varepsilon\mathbf{H}\mathbf{L} & -\varepsilon\mathbf{H} \\ \mathbf{L} & \mathbf{I}\end{bmatrix} \tag{25}$$

Chang 역변환 $\mathbf{T}^{-1}$ 은 역행렬 보조정리(matrix inversion lemma)에 의해 다음과 같이 해석적으로 표현된다.

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & \varepsilon\mathbf{H} \\ -\mathbf{L} & \mathbf{I} - \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{H}\end{bmatrix} \tag{26}$$

Chang 변환 행렬을 구성하는 행렬 $\mathbf{L}, \mathbf{H}$ 는 각각 특이섭동 시스템의 부분 행렬들 $\mathbf{A}_i, i = 1,2,3,4$ 로 구성된 비대칭 Riccati 방정식 (27), (28)의 해이다.

$$\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4\mathbf{L} + \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{A}_1 - \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{A}_2\mathbf{L} = 0 \tag{27}$$

$$\mathbf{A}_2 + \varepsilon\left(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{L}\right)\mathbf{H} - \mathbf{H}\left(\mathbf{A}_4 + \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{A}_2\right) = 0 \tag{28}$$

비대칭 Riccati 방정식 (27), (28)의 해는 먼저 (27)에서 $\mathbf{L}$ 을 구한 후 (28)에서 $\mathbf{H}$ 를 구한다. 그리고 Chang 변환 행렬을 적용한 새 상태 좌표계는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2\end{bmatrix} = \mathbf{T}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} \tag{29}$$

따라서 특이 섭동 시스템 (14)는 새 상태 좌표계에서는 저차화된 ε 와 결합되지 않은 상태 방정식과 결합된 상태 방정식으로 분리된다.

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t) = \left(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{L}\right)\boldsymbol{\eta}_1(t) + \left(\mathbf{B}_1 - \mathbf{H}\mathbf{B}_2 - \varepsilon\mathbf{H}\mathbf{L}\mathbf{B}_1\right)\mathbf{u}(t) \tag{30}$$

$$\varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) = \left(\mathbf{A}_4 + \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{A}_2\right)\boldsymbol{\eta}_2(t) + \left(\mathbf{B}_2 + \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{B}_1\right)\mathbf{u}(t) \tag{31}$$

저차화된 시스템 (30)과 (31)은 각각 독립적이므로 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 를 병렬로 구할 수 있다. 여기서 구해진 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 를 다음과 같이 Chang 역변환을 이용하여 원래 시스템의 해를 구한다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & \varepsilon\mathbf{H} \\ -\mathbf{L} & \mathbf{I} - \varepsilon\mathbf{L}\mathbf{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2\end{bmatrix} \tag{32}$$

비대칭 Riccati 방정식의 해를 구하는 많은 방법들이 연구되었지만[15] (27)과 (28)는 매우 작은 상수 ε 를 포함하고 있으므로 $\mathbf{A}_4$ 가 정칙 행렬이면($\mathbf{A}_4$ 가 정칙 행렬이면 시스템 (14)를 표준 특이섭동 시스템이라 하며, 비정칙일때는 비표준 특이섭동 시스템이라 한다) Newton 방법을 이용해서 멱승 비율의(quadratic rate) 수렴성 $O(\varepsilon^{2k})$ 로 완전해(exact solution)에 매우 근접한 해를 빠르게 구할 수 있다. 먼저 $\varepsilon = 0$ 이라 놓으면 초기값 $\mathbf{L}^{(0)} = \mathbf{A}_4^{-1}\mathbf{A}_3 = \mathbf{L} + O(\varepsilon)$ 은 완전해 $\mathbf{L}$ 에 대해서 $O(\varepsilon)$ 오차를 갖는다. (33)과 같이 반복해서 Lyapunov 방정식의 해를 구하면 $\mathbf{L}^{(k)}$ 는 완전해에 대해 오차 $O(\varepsilon^2), O(\varepsilon^4)$,..로서 매우 빨리 수렴한다.

$$\mathbf{D}_1^{(k)}\mathbf{L}^{(k+1)} + \mathbf{L}^{(k+1)}\mathbf{D}_2^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)}, \quad k = 1,2,... \tag{33}$$

여기서 $\mathbf{D}_1^{(k)} = \mathbf{A}_4 + \varepsilon\mathbf{L}^{(k)}\mathbf{A}_2, \quad \mathbf{D}_2^{(k)} = -\varepsilon\left(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2\mathbf{L}^{(k)}\right),$

$\mathbf{C}^{(k)} = \mathbf{A}_3 + \varepsilon \mathbf{L}^{(k)} \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^{(k)}$ 이다. $\mathbf{H}$ 는 (33)에서 구한 $\mathbf{L}$ 과 초기치 $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} = \mathbf{H} + O(\varepsilon)$ 를 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{D}_2^{(k)} \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{D}_1^{(k)} + \mathbf{A}_2 = 0 \tag{34}$$

IV. Haar 웨이블릿을 이용한 특이 섭동 선형 시불변 시스템 해석

여기서는 Chang 변환된 시스템의 상태 벡터들을 미분 행렬 방정식을 직접 풀지않고 Haar 웨이블릿을 이용하여 구하는 방법을 제시한다. 저차화된 시스템 (30), (31)에서 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 를 각각 미지 행렬 $\mathbf{V}_1 \in R^{n_1 \times m}$, $\mathbf{V}_2 \in R^{n_2 \times m}$ 을 도입하여 다음과 같이 Haar 함수 벡터로 표현하자.

$$\boldsymbol{\eta}_1(t) \simeq \mathbf{V}_1 \mathbf{h}_m(t) \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t) \simeq \mathbf{V}_2 \mathbf{h}_m(t) \tag{36}$$

(30)을 적분하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_{10} = \boldsymbol{\Lambda}_1 \int_0^t \boldsymbol{\eta}_1(\tau) d\tau + \boldsymbol{\Lambda}_2 \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau \tag{37}$$

여기서 $\boldsymbol{\Lambda}_1 \triangleq \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}$, $\boldsymbol{\Lambda}_2 \triangleq \mathbf{B}_1 - \mathbf{H}\mathbf{B}_2 - \varepsilon \mathbf{H}\mathbf{L}\mathbf{B}_1$ 이고 Chang 변환행렬 $\boldsymbol{\eta}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{10}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\eta}_{20}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}\mathbf{x}_0$ 로 구해진 초기치 $\boldsymbol{\eta}_{10}$ 도 다음과 같이 Haar 함수로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{\eta}_{10} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{10} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{h}_m(t) \tag{38}$$

Haar 함수로 표현된 입력 벡터 (16)을 이용하면 (37)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{h}_m(t) - \boldsymbol{\Pi}_{10} \mathbf{h}_m(t) = \boldsymbol{\Lambda}_1 \int_0^t \mathbf{V}_1 \mathbf{h}_m(\tau) d\tau + \boldsymbol{\Lambda}_2 \int_0^t \mathbf{U} \mathbf{h}_m(\tau) d\tau \tag{39}$$

여기서 $\boldsymbol{\Pi}_{10} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{10} & 0 & \cdots \end{bmatrix}$ 이다. (8)을 이용하면 적분 행렬 방정식 (39)는 다음과 같이 이산 Sylvester 방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{V}_1 - \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{P}_m = \mathbf{Z}_1 \tag{40}$$

여기서 $\mathbf{Z}_1 \triangleq \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{U} \mathbf{P}_m + \boldsymbol{\Pi}_{10}$ 이다.

마찬가지로 미분 행렬 방정식 (31)을 적분하면

$$\boldsymbol{\eta}_2(t) - \boldsymbol{\eta}_{20} = \boldsymbol{\Lambda}_3 \int_0^t \boldsymbol{\eta}_2(\tau) d\tau + \boldsymbol{\Lambda}_4 \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau \tag{41}$$

이 된다. 여기서 $\boldsymbol{\Lambda}_3 = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{A}_4 + \mathbf{L}\mathbf{A}_2$, $\boldsymbol{\Lambda}_4 = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{B}_2 + \mathbf{L}\mathbf{B}_1$ 이다. 초기치를 Haar 함수로 표현하고

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{20} &= \boldsymbol{\Pi}_{20} \mathbf{h}_m(t) \\ \boldsymbol{\Pi}_{20} &\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{20} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

(8)을 이용하면 적분 행렬 방정식 (41)도 다음과 같이 이산 Sylvester 방정식으로 표현된다.

$$\mathbf{V}_2 - \boldsymbol{\Lambda}_3 \mathbf{V}_2 \mathbf{P}_m = \mathbf{Z}_2 \tag{43}$$

여기서 $\mathbf{Z}_2 \triangleq \boldsymbol{\Lambda}_4 \mathbf{U} \mathbf{P}_m + \boldsymbol{\Pi}_{20}$ 이다.

따라서 Chang 변환을 거친 특이섭동 시스템의 문제는 (40), (43)과 같이 병렬 이산 Sylvester 방정식 문제로 귀결되어 수치적으로 불명확한 문제를 피할 수 있다. 그런데 완전해에 근접한 해를 구하기 위해서는 척도를 증가시켜야 하며 이는 이산 Sylvester 방정식의 차수 증가(2의 멱승)를 동반하게 되어 매우 많은 계산량이 필요하다. [4] 에서는 적분 연산 행렬의 우하단이 0 행렬인 특성을 이용하여 (21)과 같은 형태의 이산 Sylvester 방정식에서 미지행렬 $\mathbf{V}$의 열의 차수를 반씩 줄여 나가는 알고리즘을 제시하였다. 이 방법에서는 방정식 분리 과정이 이진 트리 형태로 나타나는데 항상 노드의 좌측 자식 노드만이 분리되며 또한 이산 Sylvester 방정식을 분리할 때마다 저차의 대수 행렬 및 이산 Sylvester 방정식의 해를 구하기 위해서는 역행렬을 구하는 과정을 반복해야 한다.

본 연구에서는 정리 1을 이용해서 이산 Sylvester 방정식 (40), (43)을 각각 완전 이진 트리 구조 형태로 분할함으로써 m개의 최하위 노드에서는 미지 벡터를 단지 단순 벡터 방정식을 풀므로써 해를 구하고 이들 벡터를 열로 하는 행렬을 구성함으로써 전체 해를 구할 수 있음을 보인다.

이산 Sylvester 방정식 (40)을 완전 이진 트리 구조로 분할하는 과정은 다음과 같다. 정리 1에 따르면 $\mathbf{P}_m$ 은 정칙 행렬이므로 (40)의 양변에 $\mathbf{P}_m^{-1}$ 을 곱하여 다음과 같이 행렬 방정식 형태로 변환한다.

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{P}_m^{-1} - \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}_m^{-1} \tag{44}$$

$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{H}_m$ 로 놓으면 (12)에 의해서 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Y}_1 \mathbf{H}_m^{-1}$ 로 표현할 수 있으므로 (44)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{P}_m^{-1} - \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{H}_m^{-1} = \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}_m^{-1} \tag{45}$$

(45)의 양변에 $\mathbf{H}_m$ 을 곱하고 $\mathbf{C}_m = \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{H}_m$ 이라 놓으면 $\mathbf{C}_m^{-1} = \mathbf{H}_m^{-1} \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{H}_m$ 이므로 (45)는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{C}_m^{-1} - \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{H}_m \tag{46}$$

다시 (46)의 양변에 $\mathbf{C}_m$ 을 곱하면

$$\mathbf{Y}_1 - \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{C}_m = \mathbf{Z}_1 \mathbf{H}_m \tag{47}$$

와 같이 이산 Sylvester 방정식 형태로 된다. 여기서 $\mathbf{C}_m$ 은 주 대각 요소는 $\frac{1}{2m}$ 이고 주 대각 위의 요소는 모두 $\frac{1}{m}$ 인 상부 삼각 행렬이고 다음과 같은 재귀적 구조를 갖는다.

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(1)} & \mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(2)} \\ \mathbf{0}_{\frac{m}{2}} & \mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{48}$$

여기서 $\mathbf{0}_{\frac{m}{2}}$ 은 $\frac{m}{2}$ -정방 영 행렬, $\mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(1)}$ 은 $\mathbf{C}_m$ 과 동일한 상부 삼각 행렬이고 차원이 $\frac{m}{2}$ -정방 행렬, $\mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(2)}$ 는 모든 요소가 $\frac{1}{m}$ 인 차원이 $\frac{m}{2}$ -정방 행렬이다.

행렬 방정식 (47) 에서 $\mathbf{Z}_1\mathbf{H}_m = \left[\mathbf{R}_{a(1)}^{(1)} \quad \mathbf{R}_{a(1)}^{(2)}\right]$, $\mathbf{Y}_1 = \left[\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)} \quad \mathbf{Y}_{a(1)}^{(2)}\right]$ 와 같이 분할한 후 (여기서 $\mathbf{R}_{a(1)}^{(i)}$, $\mathbf{Y}_{a(1)}^{(i)}$, $i=1,2$ 는 각각 $n_1 \times \frac{m}{2}$ 크기를 갖는 행렬이고 아래 첨자 (1) 은 이진 트리의 레벨이고 윗첨자 (1), (2) 는 각각 왼쪽, 오른쪽 자식 노드를 뜻한다) (48)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 2 개의 행렬 방정식들로 분할된다.

$$\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)}\mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(1)} = \mathbf{R}_{a(1)}^{(1)} \tag{49}$$

$$\mathbf{Y}_{a(1)}^{(2)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(1)}^{(2)}\mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(1)} = \mathbf{R}_{a(1)}^{(2)} + \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)}\mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(2)} \tag{50}$$

(50)의 $\mathbf{Y}_{a(1)}^{(2)}$ 는 먼저 (49)에서 $\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)}$ 을 구한 후 이를 (50)의 우변 항에 반영한 후 구한다. 그런데 (49), (50)도 (47)과 같은 구조를 갖는 행렬 방정식이고 $\mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(1)}$ 도 상부 삼각 행렬이므로 $\mathbf{R}_{a(1)}^{(1)} = \left[\mathbf{R}_{a(2)}^{(1)} \; \mathbf{R}_{a(2)}^{(2)}\right]$, $\mathbf{R}_{a(1)}^{(2)} + \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)}\mathbf{C}_{\frac{m}{2}}^{(2)} = \left[\mathbf{R}_{a(2)}^{(3)} \; \mathbf{R}_{a(2)}^{(4)}\right]$, $\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)} = \left[\mathbf{Y}_{a(2)}^{(1)} \; \mathbf{Y}_{a(2)}^{(2)}\right]$, $\mathbf{Y}_{a(1)}^{(2)} = \left[\mathbf{Y}_{a(2)}^{(3)} \; \mathbf{Y}_{a(2)}^{(4)}\right]$ 로 분할하면 (여기서 $\mathbf{R}_{a(2)}^{(i)}$, $\mathbf{Y}_{a(2)}^{(i)}$, $i=1,..,4$ 는 각각 $n_1 \times \frac{m}{4}$ 크기를 갖는 행렬이고 아래 첨자 (2)는 이진 트리의 레벨 2 이고 윗첨자의 홀수는 왼쪽 짝수는 오른쪽 노드를 뜻한다) (49) 는

$$\mathbf{Y}_{a(2)}^{(1)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(2)}^{(1)}\mathbf{C}_{\frac{m}{4}}^{(1)} = \mathbf{R}_{a(2)}^{(1)} \tag{51}$$

$$\mathbf{Y}_{a(2)}^{(2)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(2)}^{(2)}\mathbf{C}_{\frac{m}{4}}^{(1)} = \mathbf{R}_{a(2)}^{(2)} + \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(2)}^{(1)}\mathbf{C}_{\frac{m}{4}}^{(2)} \tag{52}$$

로 분할되고, (50)도 다음과 같이 2 개의 행렬 방정식들로 분할된다.

$$\mathbf{Y}_{a(2)}^{(3)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(2)}^{(3)}\mathbf{C}_{\frac{m}{4}}^{(1)} = \mathbf{R}_{a(2)}^{(3)} \tag{53}$$

$$\mathbf{Y}_{a(2)}^{(4)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(2)}^{(4)}\mathbf{C}_{\frac{m}{4}}^{(1)} = \mathbf{R}_{a(2)}^{(4)} + \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(2)}^{(3)}\mathbf{C}_{\frac{m}{4}}^{(2)} \tag{54}$$

행렬 방정식 (51)~(54)에 대해서 위의 과정을 반복하면 이진 트리의 레벨 J 에서 다음과 같이 2 가지 형태를 갖는 벡터 방정식 $m(=2^J)$ 개로 분할된다.

$$\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)}\mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{R}_{a(J)}^{(2k-1)} \tag{55}$$

$$\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k)} - \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k)}\mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{R}_{a(J)}^{(2k)} + \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)}\mathbf{C}_1^{(2)} \tag{56}$$

여기서 $1 \le k \le 2^{J-1}$ 이고 $\mathbf{C}_1^{(1)} = \frac{1}{2m}$, $\mathbf{C}_1^{(2)} = \frac{1}{m}$ 인 상수 이므로 (55), (56) 방정식 군은 각각 다음과 같이 단순 대수 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\left(\mathbf{I}_{n_1} - \tfrac{1}{2m}\mathbf{\Lambda}_1\right)\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)} = \mathbf{R}_{a(J)}^{(2k-1)} \tag{57}$$

$$\left(\mathbf{I}_{n_1} - \tfrac{1}{2m}\mathbf{\Lambda}_1\right)\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k)} = \mathbf{R}_{a(J)}^{(2k)} + \tfrac{1}{m}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)} \tag{58}$$

여기서 $\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)}$, $\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k)}$ 는 $n_1 \times 1$ 인 벡터이다.

행렬 방정식 (50)을 (53), (54)와 같이 트리 구조로 분할할 때 (50)의 우변 항은 (49)에서 구한 $\mathbf{Y}_{a(1)}^{(1)}$ 을 반영한 후 $\left[\mathbf{R}_{a(2)}^{(3)} \quad \mathbf{R}_{a(2)}^{(4)}\right]$ 로 분할해야 한다. 이와 같은 과정은 이진 트리의 레벨 J까지 분할 할 때 왼쪽 자식 노드에서 구한 해를 오른쪽 자식의 우변 항에 적용해야 하는데 이는 이진 트리 구조에서의 전위 순회 방식 순서로 갱신하면 된다.

이산 Sylvester 방정식 (43), (44)~(58) 과정을 적용하면 완전 이진 트리 형태로 분할 할 수 있으며, 최하위 노드에서는 다음과 같이 2 가지 벡터 방정식군으로 분할된다.

$$\left(\mathbf{I}_{n_2} - \tfrac{1}{2m}\mathbf{\Lambda}_3\right)\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k-1)} = \mathbf{R}_{b(J)}^{(2k-1)} \tag{59}$$

$$\left(\mathbf{I}_{n_2} - \tfrac{1}{2m}\mathbf{\Lambda}_3\right)\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k)} = \mathbf{R}_{b(J)}^{(2k)} + \tfrac{1}{m}\mathbf{\Lambda}_3\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k-1)} \tag{60}$$

여기서 분할을 시작할 때 $\mathbf{Z}_2\mathbf{H}_m = \left[\mathbf{R}_{b(1)}^{(1)} \quad \mathbf{R}_{b(1)}^{(2)}\right]$, $\mathbf{Y}_2 = \left[\mathbf{Y}_{b(1)}^{(1)} \quad \mathbf{Y}_{b(1)}^{(2)}\right]$ 로 정의하였고, $\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k-1)}$, $\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k)}$ 는 $n_2 \times 1$ 인 벡터이다.

Haar 웨이블릿을 이용하여 특이섭동 시스템의 해를 구하는 방법을 정리하면 다음과 같다.

알고리즘 1

[1] 비대칭 Riccati 방정식 (27), (28)을 풀어서 Chang 변환 행렬 (26)을 구한다.

[2] Chang 변환된 시스템 (30), (31)을 구성한다.

[3] $\mathbf{\eta}_1(t)$ 을 구한다.

3-1. (47)의 우변 항 $\mathbf{Z}_1\mathbf{H}_m$ 을 구성한다.

3-2 $\mathbf{Y}_{a(J)}^{(i)}$, $i=1,2,..,m$ 를 구한다.

do k = 1 to 2^{J-1}

(57) 에서 $\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)}$ 구함

(58) 우변 항 $\mathbf{R}_{a(J)}^{(2k)} + \frac{1}{m}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k-1)}$ 갱신

(58) 에서 $\mathbf{Y}_{a(J)}^{(2k)}$ 구함

전위 순회로 부모 노드의 우변 항 갱신

end

3-3 $\mathbf{Y}_1 = \left[\mathbf{Y}_{a(J)}^{(1)} \quad \mathbf{Y}_{a(J)}^{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{Y}_{a(J)}^{(m)}\right]$

3-4. $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Y}_1\mathbf{H}_m^{-1}$

3-5 $\mathbf{\eta}_1(t) \simeq \mathbf{V}_1\mathbf{h}_m(t)$ 로 $\mathbf{\eta}_1(t)$ 를 구한다.

[4] $\mathbf{\eta}_2(t)$ 를 구한다.

4-1. $\mathbf{Z}_2\mathbf{H}_m$ 행렬을 구성한다.

4-2 $\mathbf{Y}_{b(J)}^{(i)}$, $i=1,2,..,m$ 를 구한다.

do k = 1 to 2^{J-1}

(59) 에서 $\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k-1)}$ 구함

(60) 우변 항 $\mathbf{R}_{b(J)}^{(2k)} + \frac{1}{m}\mathbf{\Lambda}_3\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k-1)}$ 갱신

(60) 에서 $\mathbf{Y}_{b(J)}^{(2k)}$ 구함

전위 순회로 부모 노드의 우변 항 갱신

end

4-3 $\mathbf{Y}_2 = \left[\mathbf{Y}_{b(J)}^{(1)} \quad \mathbf{Y}_{b(J)}^{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{Y}_{b(J)}^{(m)}\right]$

4-4. $\mathbf{V}_2 = \mathbf{Y}_2\mathbf{H}_m^{-1}$

4-5. $\boldsymbol{\eta}_2(t) \simeq \mathbf{V}_2\mathbf{h}_m(t)$ 로 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 를 구한다

[5] Chang 역변환을 이용하여 특이섭동 시스템 (14)의 해를 구한다.

알고리즘 1 에서 [3]과 [4]는 병렬로 할 수 있다.

V. 수치 예

유동접촉분해시설(fluid catalytic cracker)은 다음과 같이 특이섭동 구조를 갖는 5 차 시스템이다[16].

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{A}_3 & \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{A}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{B}_2\end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \qquad (61)$$

여기서 $\varepsilon = 0.1$ 이고

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}-16.11 & -0.39\\ 0.01 & -16.99\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}27.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 12.47\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix}1.511 & 0\\ -5.336 & 0\\ 0.227 & 6.91\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix}-5.36 & -1.657 & 7.178\\ 0 & -10.72 & 23.211\\ 0 & 0.2273 & -10.299\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix}11.12 & -12.6\\ -3.61 & 3.36\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix}-2.191 & 0\\ -5.36 & 0\\ 6.91 & 0\end{bmatrix}$$ 이다.

시스템 행렬 $\mathbf{A}_\varepsilon$ 는 –129.0487, -82.8581, -74.3201 과 같이 빠른 고유값과 –2.8488, -7.7782와 같이 느린 고유값을 갖는다. 여기서 초기치는 $\mathbf{x}_0 = [1.1 \quad 0.5 \quad 1 \quad -1 \quad 0]^T$ 이고 입력은 단위 계단 함수이다. Chang 변환 행렬을 구성하는 $\mathbf{L}, \mathbf{H}$ 는 각각 Riccati 방정식 (27),(28)을 Newton 반복법으로 풀면 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix}-0.4752 & -0.4185\\ 0.4921 & -1.8357\\ -0.0105 & -0.7657\end{bmatrix},\quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix}-4.1554 & 0.6394 & -1.1813\\ 0.0089 & -0.0306 & -1.2403\end{bmatrix}$$

특이섭동 시스템 (61)의 해를 Chang 변환을 이용해서 저차화된 ε 와 결합된 상태 방정식과 결합 안된 시스템으로 분리한 후 분리된 시스템에서의 해를 Haar 웨이블릿을 이용해서 구한 후 이를 다시 역 변환하여 원래의 해를 구한다. Chang 변환된 시스템에서의 초기치는 $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{T}\mathbf{x}_0$ 로 구해지며 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\eta}_0 = [1.2528 \quad 0.4466 \quad 0.2680 \quad -1.3765 \quad -0.3943]^T.$$

그림 1과 2에 각각 척도 $J=5$, $J=10$ 일 때 Haar 웨이블릿으로 구한 상태 궤적 x_1, x_4 과 Runge-Kutta 방법으로 구한 것을 나타내었고 표 2에서는 그 수치 값들을 비교하였다. 그림에서 실선은 Runge-Kutta로 구한 해이고 굵은 점선은 Haar 웨이블릿으로 구한 해이다. 그림 1 에서 볼 수 있듯이 $J=5$ 일 경우 Haar 웨이블릿으로 구한 해는 32 개의 이산치를 가지므로 Runge-Kutta로 구한 해에 비해 오차가 많이 존재함을 알 수 있다. 특히 빠른 고유값을 갖는 상태 x_4 에 대해서 $t = 0.1\,\text{sec}$ 근방에서 Haar 웨이블릿으로 구한 해가 많이 벗어난다. 척도를 증가시켜 $J=10$ 일 때는 Haar 웨이블릿으로 구한 해와 Runge-Kutta로 구한 해가 거의 일치함을 알 수 있다.

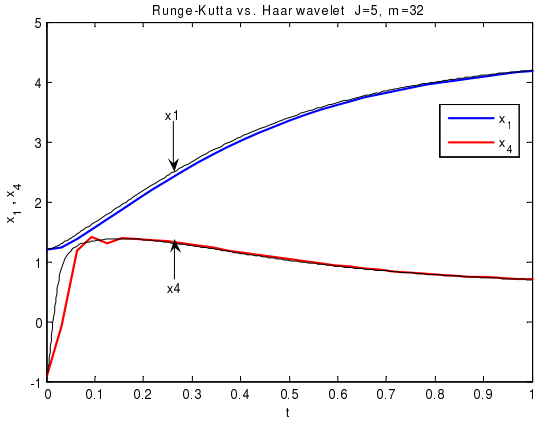

그림 1. 척도 $J=5$일 때 상태 궤적.

Fig. 1. State trajectories at scale $J=5$.

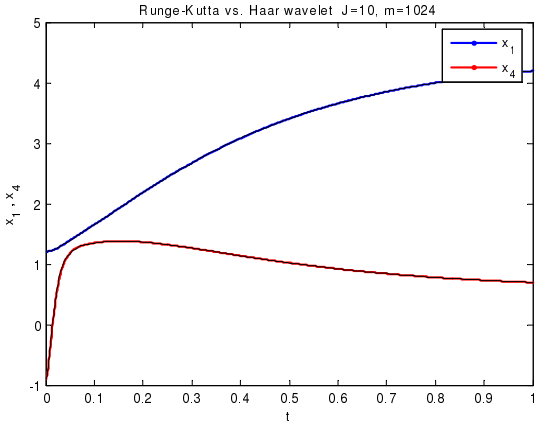

그림 2. 척도 $J=10$ 일 때 상태 궤적.

Fig. 2. State trajectories at scale $J=10$.

표 2. Runge-Kutta 방법과 Haar 웨이블릿 방법 비교.

Table 2. Comparison for Runge-Kutta and Haar wavelet.

Time (sec)	Runge-Kutta		웨이블릿 J=5		웨이블릿 J=10	
	x_1	x_4	x_1	x_4	x_1	x_4
0.030	1.2313	0.7366	1.1704	-0.1984	1.2323	0.7432
0.124	1.6917	1.3407	1.6168	1.2727	1.6923	1.3421
0.248	2.3407	1.3362	2.2667	1.3477	2.3446	1.3352
0.505	3.3648	1.0360	3.3003	1.0605	3.3471	1.0428
0.718	3.8498	0.8434	3.8233	0.8544	3.8493	0.8435
0.843	4.0287	0.7680	4.0100	0.7761	4.0283	0.7682
0.968	4.1545	0.7142	4.1419	0.7197	4.1547	0.7142
1	4.1803	0.7032	4.1682	0.70840	4.1800	0.7033

특이 섭동 시스템 (14) 자체에 대해서 Haar 웨이블릿을 이용하여 해를 구할 때는 약 $O\left(\sum_{k=2}^{J}\left(\left(\frac{m}{2^k}2\left(n_1^2+n_2^2\right)+\left(n_1+n_2\right)\right.\right.\right.$ $\left.\left.\left.\frac{m}{2^k}\left(2\frac{m}{2^k}-1\right)\right)2^{k-1}\right)+O\left(\sum_{k=2}^{J}n_1n_2\frac{m}{2^{k-2}}\right)$ 의 flop 이 필요하지만 제안된 알고리즘 1 을 이용하면 2 차의 느린 시스템과 3 차의

빠른 시스템으로 분리된 각 서브 시스템에서는 $O\left(\sum_{k=2}^{J}\left(\left(\frac{m}{2^k}2n_1^2+n_1\frac{m}{2^k}\left(2\frac{m}{2^k}-1\right)\right)2^{k-1}\right)\right)$ 및 $O\left(\sum_{k=2}^{J}\left(\left(\frac{m}{2^k}2n_2^2+n_2\frac{m}{2^k}\left(2\frac{m}{2^k}-1\right)\right)2^{k-1}\right)\right)$ 이 소요되어 $O\left(\sum_{k=2}^{J}n_1n_2\frac{m}{2^{k-2}}\right)$ 만큼의 계산량을 줄일 수 있을 뿐만 아니라 각 서브 시스템의 병렬 연산이 가능하다.

VI. 결론

특이섭동 선형 시스템을 Chang 변환을 이용하여 완전 독립적인 빠른 시스템과 느린 시스템으로 분리한 후 분리된 시스템의 동적 문제를 Haar 웨이블릿을 이용하여 이산 Sylvester 방정식 문제로 변환한 후 적분 연산 역행렬을 이용하여 Sylvester 방정식을 완전 이진 트리 형태로 방정식을 분할함으로써 최하위 노드에서는 단순 벡터 방정식을 풀고 이들 노드에서의 해를 합성함으로써 전체 해를 구할 수 있음을 보였다. 특이 섭동 시스템에서의 수치적 불명확성을 회피할 수 있고 및 척도 증가에 따른 계산량을 감소시킬 수 있음을 보였다.

참고문헌

[1] Z. Gajic and M.T. Lim, *Optimal Control Of Singularly Perturbed Linear Systems And Applications*, Marcel Dekker, New York, 2001.

[2] H. R. Karimi, P. J. Maralani, B. Moshiri, and B. Lohmann, "Numerically efficient approximations to the optimal control of linear singularly perturbed systems based on Haar wavelets," *Int. J. of Computer Mathematics*, vol. 82, pp. 495-507, 2005.

[3] R. S. Stankovic and B. J. Falkowski, "The Haar wavelet transform: its status and achievements," *Computers and Electrical Engineering*, vol. 29, no. 1, pp. 25-44, 2003.

[4] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems," *IEE Proc. Control Theory Appl*. vol. 144, pp. 87-94, 1997.

[5] M. Ohkita and Y. Kobayashi, "An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations." *IEEE Trans. Circuits Systems I. Fund. Theory Appl*. vol. 9, pp. 853-862, 1986.

[6] C. H. Hsiao and W. J. Wang, "State analysis and parameter estimation of bilinear systems via Haar wavelets," *IEEE Trans. Circuits Systems I. Fundam. Theory Appl*. vol. 47, pp. 246-250, 2000.

[7] B. S. Kim, I. J. Shim, B. K. Choi, and J. H. Jeong, "Wavelet based control for linear systems via reduced order Sylvester equation," *The 3rd Int. Conf. on Cooling and Heating Technologies*, pp. 239-244, 2007.

[8] B. S. Kim and I. J. Shim "Haar wavelet-based control for HVAC systems," *2007 Int. Sym. On Advanced Intelligent Systems*, pp. 647-650, 2007.

[9] C. H. Hsiao, "Solution of variational problems via Haar orthonormal wavelet direct method," *Int. J. Comput. Math*, vol. 81, pp. 871-887, 2004.

[10] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonaler Funktionensysteme," *Math. Ann*. vol. 69, pp. 331-371, 1910.

[11] K. W. Chang, "Singular perturbations of a general boundary value problems," *SIAM J. Math. Anal*., vol. 3, pp. 520-526, 1972.

[12] J. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 25, pp. 772-781, 1978.

[13] F. Ding and T.W. Chen, "Gradient based iterative algorithms for solving a class of matrix equations," *IEEE Tran. Automa. Contr*., vol. 50, pp. 1216-1221, 2005.

[14] G. H. Golub, S. Nash, and C. Van Loan, "A Hessenberg-Schur Method for the Problem AX + XB = C," *IEEE Trans. Automa. Contr*., vol. 24, pp. 909-913, 1979.

[15] G. Freiling, "A survey of nonsymmetric Riccati equations," *Linear Algebra Appl*., pp. 243-270, 2002.

[16] Y. Arkun and S. Ramakrishnan, "Bounds on the optimum quadratic cost of structure-constrained controllers," *IEEE Tran. Automa. Contr*., vol. 28, pp. 924- 927, 1983.

김 범 수

1987년 고려대학교 전기공학과, 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학석사), 2002년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학박사), 1989 ~1998 LG산전연구소 선임연구원, 현재 경상대학교 기계항공공학부 조교수.

심 일 주

1987년 고려대학교 전기공학과, 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학석사), 2005년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학박사), 현재 대림대학 자동화시스템과 전임강사, 관심분야는 웹기반의 원격감시제어, 지능형 빌딩시스템, 유비쿼터스 컴퓨팅 시스템.