

근접 완전재생 Pseudo-QMF 뱅크를 위한 선형위상 프로토타입 저역통과 필터의 효율적인 설계 방법

정희원 전 준 현*

An Efficient Design Method of Linear-Phase Prototype Lowpass Filter for Near-Perfect Reconstruction Pseudo-QMF Banks

Joonhyeon Jeon* *Regular Member*

요 약

M 채널 NPR(Near-Perfect Reconstruction) pseudo-QMF(Quadrature Mirror Filter) 뱅크의 설계는 일반적으로 SF(Spectral Factorization) 접근 방식을 혼합하여 많이 사용하며, 분리와 합성 필터들은 프로토타입 저역통과 필터 (prototype lowpass filter : p-LPF)를 코사인 변조하여 사용한다. 그러나 이 방식은 $2M^{th}$ 대역 필터 $G(z) = z^{-(N-1)}H(z^{-1})H(z)$ 의 SF 방식에 의해 p-LPF $H(z)$ 을 설계하기 때문에 p-LPF가 선형위상을 갖지 못할 뿐만 아니라 진폭왜곡이 최적화되지도 않았다. 따라서 대부분의 방법들이 재생 진폭왜곡 보다는 중첩상쇄왜곡을 줄이기 위한 p-LPF 설계를 제안하였다. 본 논문에서는 NPR pseudo-QMF 뱅크 구현에 필요한 p-LPF 설계를 위해 폐쇄형전달함수를 갖는 선형위상의 Maxflat(maximally flat) FIR 필터를 이용하는 새로운 방식을 제안하였다. 또한 폐쇄형주파수함수를 이용하여 $2M^{th}$ 대역 필터 $G(z) = H^2(z)$ 로 표현되는 $2M$ 개 채널들의 전체진폭응답이 단일응답을 갖도록 p-LPF $H(z)$ 을 최적화하는 방법이 제안되었다. 실험 결과 시스템 최대진폭 왜곡이 3.5×10^{-4} ($\approx -70dB$)보다 적고 각 분리 및 합성 필터들의 저지대역 감쇠가 $-100dB$ 이상의 매우 뛰어난 NPR pseudo-QMF 뱅크 설계가 가능함이 증명되었다.

Key Words : Multichannel QMF bank, Pseudo QMF bank, Cosine-modulated filter bank

ABSTRACT

M channel near-perfect-reconstruction(NPR) pseudo-QMF banks are a hybrid of conventional pseudo-QMF design and spectral factorization approach where the analysis and synthesis filters are cosine-modulated versions of the prototype-lowpass filter(p-LPF). However, p-LPF $H(z)$ does not have linear-phase symmetry as well as magnitude-distortion optimization since it is obtained by spectral factorization of $2M^{th}$ band filter $G(z) = z^{-(N-1)}H(z^{-1})H(z)$. A fair amount of attention, therefore, has been focused on the design of filter banks for reducing only alias-cancellation distortion without reconstructed-amplitude distortion. In this paper, we propose a new method for designing linear-phase p-LPF in NPR pseudo-QMF banks, which is based on Maxflat(maximally flat) FIR filters with closed-form transfer function. In addition, p-LPF $H(z)$ is optimized in this approach so that the $2M$ -channel overall distortion response represented with $G(z) = H^2(z)$ approximately becomes a unit magnitude response. Through several examples of NPR pseudo-QMF banks, it is shown that the peak ripple of the overall magnitude distortion is less than 3.5×10^{-4} ($\approx -70dB$) and analysis/synthesis filters have the sharp monotone-stopband attenuation exceeding 100 dB.

* 본 연구는 동국대학교 논문게재장려금 지원으로 이루어졌음

* 동국대학교 공과대학 IT 학부 정보통신공학과 (memory@dgu.edu)

논문번호 : KICS2007-08-362, 접수일자 : 2007년 8월 14일, 최종논문접수일자 : 2008년 1월 18일

I. 서 론

M 채널 pseudo-QMF(Quadrature Mirror Filter) बैं크 설계는 디지털 음성 신호 응용 시스템과 같은 다중비율(multi-rate) 신호처리에서 매우 핵심 기술로 잘 알려져 있다^[1,2,3]. Pseudo-QMF बैं크는 인접 대역간의 중첩상쇄(aliasing cancellation) 제약조건을 해결하기 위해 각 채널에서 사용하는 분리/합성 필터들은 프로토타입 저역통과 필터(p -LPF : prototype-lowpass filter)의 코사인 변조로 실현되기 때문에 코사인변조 필터 बैं크(cosign-modulated filter bank)라고도 한다^[3,4,5]. 그러나 이 경우 이상적인(ideal) p -LPF 설계가 불가능하므로 PR(Perfect Reconstruction) pseudo-QMF बैं크 구현이 어렵다^[5]. 따라서 대부분의 연구는 PR에 가까운 NPR(Near-Perfect Reconstruction) pseudo-QMF बैं크 구현을 위한 p -LPF 설계에 초점이 맞추어져 있다^[5,6,7]. 기존의 대부분의 pseudo-QMF बैं크 구현은 $2M^{th}$ 대역 필터 $G(z) = z^{-(N-1)}H(z^{-1})H(z)$ 의 SF(Spectral Factorization) 방식^[4]을 바탕으로 카이저윈도(Kaiser window)를 사용한 p -LPF를 적용하는 방식들이 제안되었다^[6,7,8,9]. 그러나 위 방법들은 p -LPF를 최적화하지 않았기 때문에 pseudo-QMF बैं크의 전체진폭왜곡은 주파수 대역에서 매우 큰 값으로 발생하여 실제적으로 NPR pseudo-QMF बैं크 구현에는 적합하지 않다^[7,8,9].

최적의 pseudo-QMF बैं크에서 진폭왜곡과 중첩왜곡이 최소화 되어야 하며, 이를 위해서는 p -LPF의 주파수 특성이 Maxflat (maximally flat) 진폭응답과 Maxsharp(Maximally sharp) 정지대역 감쇠 응답을 갖아야 한다^[10,11]. 따라서 본 논문에서는 [12]에서 제안되었던 선형위상 Maxflat FIR(Finite Impulse Response) 필터를 이용하여 NPR pseudo-QMF बैं크를 위한 p -LPF를 설계하고 최적화하는 방식을 제안하였다. 제안된 방식에서는 우선 폐쇄형주파수함수(closed-form frequency response)를 이용하여 MAXflat FIR 필터 특성을 갖는 p -LPF 필터를 설계하였으며, 이를 바탕으로 $2M^{th}$ 대역 필터 $G(z) = H^2(z)$ 로 표현되는 $2M$ 개 채널들의 전체진폭응답이 단일응답을 갖도록 p -LPF $H(z)$ 을 최적화하였다. 제안된 방식의 성능 평가를 위하여 8 채널 NPR pseudo-QMF बैं크를 구현한 결과, 제안된 방식에 따라 설계된 MAXflat p -LPF 필터는 중첩상쇄 왜곡을 최소화할 수 있는 -100dB 이상의 매우 날카로운 저지대역 감쇠와 3.5×10^{-4} ($\approx -70dB$) 미만의

매우 적은 진폭왜곡의 주파수 응답을 보였다. 이것은 기존의 설계 방식들^[6,7,8]에 비해 매우 우수한 것으로 나타났다.

제II장에서는 선형 위상을 갖는 M 채널 pseudo-QMF बैं크 시스템과 MAXflat p -LPF 필터의 최적 설계 조건들에 대하여 제안 하였으며, 제III 장에서는 최적 설계 조건에 따라 MAXflat p -LPF 필터를 수학적으로 설계하고 이를 최적화하는 방법을 나타내었다. 제IV장에서는 8채널 NPR pseudo-QMF बैं크 구현에 필요한 MAXflat p -LPF 필터들을 구현하여 성능을 분석하였으며, 끝으로 제V장에서는 결론을 맺었다

II. Pseudo QMF बैं크 시스템

본 장에서는 우선 SF(spectral factorization)을 이용한 M 채널 pseudo-QMF बैं크 시스템과 인접 대역 간에서 발생하는 중첩성분들의 상쇄 조건에 대하여 요약하였다. 또한 이를 바탕으로 본 논문에서 제안하고자 하는 선형위상의 실수 계수 임펄스 응답을 갖는 p -LPF $H(z)$ 을 SF pseudo-QMF बैं크 시스템에 적용하였을 때 전체전달함수와 전체진폭왜곡 응답에 대하여 분석하였으며, NPR pseudo-QMF बैं크를 구현하기 위한 p -LPF $H(z)$ 설계에 필요한 NPR 제한적 조건들이 대하여 서술하였다.

2.1 M 채널 pseudo-QMF बैं크

그림1(a)은 일반적인 M 채널 최대감축 필터뱅크 시스템(maximally-decimated filter bank system)을 나타낸 것으로 $H_k(z)$ 과 $F_k(z)$ 는 $k, 0 \leq k \leq M-1$ 번째 분리와 합성 필터들이다. 또한 그림1(b)와 (c)는 분리 필터 $H_k(z)$ 들과 p -LPF $H(z)$ 의 진폭 응답을 각각 나타낸 것이다. 이때 재생신호 $\hat{X}(z)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{X}(z) = X(z)T_0 + \sum_{l=1}^{M-1} X(zW^l)T_l(z) \quad (1)$$

여기서 $W = e^{-j\pi/M}$ 이며, $T_0(z)$ 와 $T_l(z), l \neq 0$ 는 각각 아래와 같이 표현된다.

$$T_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)F_k(z) \quad (2)$$

$$T_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW^l)F_k(z)$$

위의 식(2)에서 $T_0(z)$ 는 입력신호 $X(z)$ 에 대한 전

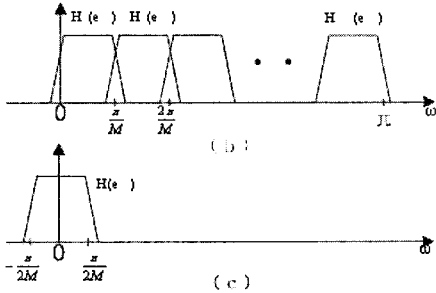
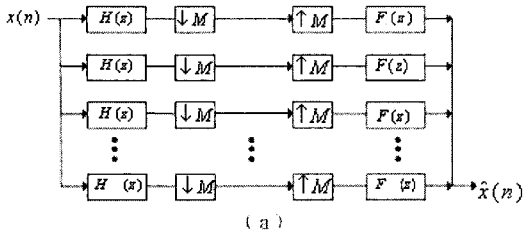


그림 1. M 채널 pseudo-QMF बैं크 시스템 (a) 필터뱅크 (b) 분리필터들의 주파수 응답 (c) 프로토타입 저역통과 필터의 주파수 응답

체 전달함수(overall transfer function)이며, $T_l(z), l \neq 0$ 는 $(M-1)$ 개 중첩성분 $X(zW^l), l \neq 0$ 에 따른 중첩 전달함수(aliasing transfer function)을 나타낸다. 따라서 PR 필터뱅크 시스템이 되기 위해서 식(2)는

$$\begin{cases} T_0(z) = z^{-d} \\ T_l(z) = 0, & 1 \leq l \leq M-1 \end{cases} \quad (3)$$

을 만족해야한다. 여기서 d 는 필터의 위상 지연을 나타내는 양의 정수이며, $T_0(z)$ 는 선형위상을 갖는다는 것을 알 수가 있다. 그러나 식(3)의 조건은 이상적인 필터들을 사용한다는 가정의 매우 완벽한 제한적 요건으로 실현이 불가능하다. 실제로 선형 위상을 갖는 $T_0(z)$ 의 주파수 응답은 분리/합성 필터들의 통과대역과 저지대역의 진폭응답에 따른 단일왜곡오차(unit distortion error) δ_1 과 인접대역 간의 중첩상쇄오차 δ_2 가 다음과 같이 존재한다.

$$\begin{cases} |T_0(z)|_{z=e^{j\omega}} = 1 + \delta_1 \\ |T_l(z)|_{z=e^{j\omega}} = \delta_2, & 1 \leq l \leq M-1 \end{cases} \quad (4)$$

식(4)에서 δ_1 는 분리/합성 필터들의 통과대역을 최대한도 평탄하게 함으로써 최소화할 수가 있으며, δ_2 는 $T_l(z), l \neq 0$ 의 중첩상쇄오차로서 분리/합성 필터들의 저지대역 감쇠를 최대한도 함으로써 최소화할

수가 있다. 이와 같이 δ_1 과 δ_2 을 최소화하므로써 입력 신호의 완전재생이 가능한 NPR(Near-Perfect Reconstruction) 필터뱅크가 구현된다^{6,7,8)}. 예를 들면 $\delta_1 \approx 0$ 과 $\delta_2 \approx 0$ 의 경우 완전재생에 가까운 결과를 얻을 수가 있다.

2.2 SF를 이용한 pseudo-QMF बैं크(5)

p -LPF $H(z)$ 을 설계하기 위하여 SF를 이용한 pseudo-QMF बैं크 시스템을 요약하면 다음과 같다. 우선 p -LPF $H(z)$ 의 필터 길이를 N 이라 가정하자. 이때 필터 차수와 채널수는 $N-1 = mM$ (m 은 임의의 양의 정수)을 만족한다고 가정하고 $a_k = e^{j\theta_k}$ 와 켈레 복소수 a_k^* 상수들을 갖는 $S_k(z)$ 과 임펄스응답 $s_k(n)$ 을 다음과 같이 각각 정의하면,

$$S_k(z) = a_k H(zW^{k+1/2}) + a_k^* H(zW^{-(k+1/2)}) \quad (5)$$

$$s_k(n) = 2h(n)\cos\left(k + \frac{1}{2}\frac{n\pi}{M} + \theta_k\right)$$

k 번째 채널의 분리/합성 필터들 $H_k(z), F_k(z)$ 는 다음과 같이 얻어진다^{4,5,6)}.

$$H_k(z) = \begin{cases} S_k(z) & \text{even } k \\ z^{-(N-1)} S_k(z^{-1}) & \text{odd } k \end{cases} \quad (6)$$

$$F_k(z) = z^{-(N-1)} H_k(z^{-1})$$

여기서 $0 \leq k \leq M-1$ 이다. 만약 $H_k(z), F_k(z)$ 의 임펄스응답을 $h_k(n), f_k(n)$ 라고 하였을 때, 식(5)는

$$h_k(z) = \begin{cases} s_k(n) & \text{even } k \\ s_k(N-1-n) & \text{odd } k \end{cases} \quad (7)$$

$$f_k(z) = h_k(N-1-n)$$

이 되며, 여기서 $0 \leq n \leq N-1$ 이다. 이때 필터 차수 $N-1$ 이 채널 M 의 배수, 즉 $N-1 = mM$ (m 은 짝수)을 만족하고 θ_k 가 임의의 양의 정수 l 에 대하여

$$\theta_{k+1} = \pm(2l+1)\frac{\pi}{2} - \theta_k, \quad 0 \leq k \leq M-2 \quad (8)$$

을 만족하도록 선택되어진다면, 식(2b)의 중요한 중첩성분들은 거의 상쇄되어 $T_l(z) \approx 0, l \neq 0$ 된다. 따라서 본 논문에서는 식(8)을 만족하는 아래의 θ_k 값을 선택하였다.

$$\theta_k = \frac{\pi}{4}, \quad \forall k \quad (9)$$

위의 조건과 식(6)의 관계식을 이용하여 식(2)의 전체전달함수 $T_0(z)$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\widehat{X}(z)}{X(z)} \cong T_0(z) = \frac{z^{-(N-1)}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)H_k(z^{-1}) + \frac{z^{-(N-1)}}{M} [P_1(z) + P_2(z)] \quad (10)$$

여기서 $P_i(z), i=1,2$ 는 그림1.(b)에서 나타낸 바와 같이 SF pseudo-QMF बैंक 시스템의 고유 주파수 특성으로 나타나는 성분들로서 θ_k 에 의해 제거될 수가 없다. 따라서 $P_1(z)$ 의 진폭응답은 단지 $|w| < \epsilon$ 에서 나타나며, $P_2(z)$ 의 진폭응답은 단지 $\pi - \epsilon < |w| < \pi + \epsilon$ 에서 나타난다. 여기서 ϵ 는 p-LPF $H(z)$ 의 천이대역폭에 종속되며, $0 \leq \epsilon \leq \pi/2M$ 의 주파수 범위를 갖는다. 따라서 $T_0(z)$ 의 진폭응답은 $w=0$ 과 $w=\pi$ 에서 “bumps” 또는 “dips”를 갖는다. 결론적으로 $T_0(z)$ 는 $\epsilon \leq w \leq \pi - \epsilon$ 의 주파수 범위에서 $|T_0(z)| \cong \text{constant}$ 을 가질 수가 있다. 그러나 위의 설계 방식은 p-LPF $H(z)$ 을 $2M^{th}$ 대역 필터 $G(z) = z^{-(N-1)}H(z)H(z^{-1})$ 로 정의하여 SF에 의하여 설계하였기 때문에 $H(z)$ 이 선형 위상을 갖지 못하며, 따라서 분리와 합성 필터들도 위상왜곡(phase distortion)을 갖는다. 따라서 본 논문에서는 $2M^{th}$ 대역 필터 $G(z) = H^2(z)$ 을 만족하는 선형위상의 p-LPF $H(z)$ 을 이용하여 설계하였다.

2.3 선형위상의 p-LPF를 사용한 pseudo-QMF बैंक 시스템

앞서 설명한 pseudo-QMF बैंक의 코사인변조 분리/합성 필터들에서 선택한 p-LPF $H(z)$ 이 선형위상의 실수 계수 임펄스 응답을 갖는 FIR 필터라고 가정하면, 식(6)에서 $S_k(z) = z^{-(N-1)}S_k(z)$, $H_k(z) = z^{-(N-1)}H_k(z)$ 가 되므로 분리와 합성 필터들은

$$H_k(z) = a_k H(zW^{k+1/2}) + a_k^* H(zW^{-(k+1/2)}) \quad (11)$$

$$F_k(z) = H_k(z)$$

로 표현될 수가 있다. 이때 식(10)으로부터 $\epsilon \leq w \leq \pi - \epsilon$ 범위를 갖는 전체전달함수는 다음과 같이 표현될 수가 있다.

$$\begin{aligned} z^{(N-1)}MT_0(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)H_k(z^{-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} [a_k H(zW^{k+1/2}) + a_k^* H(zW^{-(k+1/2)})] \\ &\quad \times [a_k^* H(z^{-1}W^{-(k+1/2)}) + a_k H(z^{-1}W^{k+1/2})] \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} [H(zW^{k+1/2})H(z^{-1}W^{-(k+1/2)}) \\ &\quad + H(zW^{2M-k-1/2})H(z^{-1}W^{-(2M-k-1/2)})] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{M-1} [(a_k)^2 H(zW^{k+1/2})H(z^{-1}W^{k+1/2}) \\ &\quad + (a_k^*)^2 H(zW^{-(k+1/2)})H(z^{-1}W^{-(k+1/2)})] \end{aligned} \quad (12)$$

위 식(12)에서 $H(z)$ 이 선형위상의 FIR 필터이고 $N-1 = mM$ (m 은 짝수)이므로 두 번째 항의 두 번째 성분은

$$\begin{aligned} H(zW^{(k+1/2)})H(z^{-1}W^{-(k+1/2)}) &= [z^{-(N-1)}W^{A(N-1)(k+1/2)}H(z^{-1}W^{k+1/2})] \\ &\quad \times [z^{(N-1)}W^{A(N-1)(k+1/2)}H(zW^{k+1/2})] \\ &= H(z^{-1}W^{k+1/2})H(zW^{k+1/2}) \end{aligned} \quad (13)$$

로 표현된다. 따라서 식(13)을 식(12)에 대입하면 $(a_k)^2 = i$, $(a_k^*)^2 = -i$ 이므로 식(12)의 두 번째 항은 정확하게 제로(zero)가 되어 다음의 결과를 얻을 수가 있다.

$$\begin{aligned} z^{(N-1)}MT_0(z) &= \sum_{k=0}^{2M-1} H(zW^k)H(z^{-1}W^{-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{2M-1} H^2(zW^k) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $2M^{th}$ 대역 필터를 $G(z) = z^{-(N-1)}H(z^{-1})H(z)$ 로 하여 아래 식과 같이 $2M$ 개 채널들의 전체 진폭 응답이 단일진폭 응답을 갖는다고 가정한다면,

$$\sum_{k=0}^{2M-1} H(zW^k)H(z^{-1}W^{-k}) = 1 \quad (15)$$

$$\text{or } \sum_{k=0}^{2M-1} H^2(zW^k) = 1$$

식(10)의 $T_0(z)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{X}(z)}{X(z)} &\cong T_0(z) \\ &= \frac{z^{-(N-1)}}{M} + \frac{z^{-(N-1)}}{M} [P_1(z) + P_2(z)] \end{aligned} \quad (16)$$

이상과 같이 $2M$ 채널을 갖는 pseudo-QMF बैंक 시스템에서 $2M^{th}$ 대역 필터 $G(z) = z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

$H(z) = H^2(z)$ 을 만족하는 선형위상 p -LPF $H(z)$ 을 사용하였을 때, $2M$ 채널 전체진폭응답이 식(15)와 같이 무손실의 단일진폭응답을 갖는다면 PR pseudo-QMF बैं크 시스템이 구현될 수 있음을 알 수가 있다. 그러나 이상적인(ideal) p -LPF $H(z)$ 의 설계가 불가능하기 때문에 식(16)과 같은 PR pseudo-QMF बैं크의 구현은 실제적으로 불가능하다. 따라서 다음 절에서는 선형위상의 실수 계수 임펄스 응답을 갖는 p -LPF $H(z)$ 을 사용하였을 때, NPR pseudo-QMF बैं크 설계에 필요한 최적의 제한적 조건에 대하여 설명하고자 한다.

2.4 최적 pseudo-QMF बैं크 시스템 설계

코사인 변조된 p -LPF $H(z)$ 을 분리/합성 필터들로 사용하여 최적의 NPR pseudo-QMF बैं크 시스템을 구현하기 위해서는 식(15)의 전체진폭 응답이 단일진폭 특성에 근접할 수 있도록 $H(z)$ 을 설계하고 최적화해야 한다. 본 논문에서는 p -LPF $H(z)$ 이 제로위상의 실수계수 임펄스 응답과 $w_p = \pi/2M$ 의 차단 주파수를 갖는 저역통과 FIR 필터를 사용하는 것을 전제로 하였다. 즉, $H(z)$ 의 주파수 응답을 $H(w)$ 라 하면, $H(w) = H(-w)$ 의 실수 대칭 주파수 응답을 만족한다. 이때 식(15)의 $2M$ 채널 전체진폭응답을 아래식과 같이 $\Delta(w)$ 라고 하였을 때,

$$\Delta(w) = \sum_{k=0}^{2M-1} H^2(w - \frac{k\pi}{M}) \quad (17)$$

만일 $\Delta(w) \cong 1, 0 \leq w \leq 2\pi$ 이면 $T_0(w) \cong 1/M^0$ 이 되며 pseudo-QMF बैं크는 NPR 시스템이 된다. 여기서 $\Delta(w)$ 는 0(or $2M$)번째 채널 필터 주파수 응답 $H^2(w)$ 을 주파수 이동한 $2M$ 개 채널 필터들의 반복 응답들의 합산 한 값을 알 수가 있다. 따라서 식(17)에서 0(or $2M$)번째 채널의 하프진폭왜곡 응답을 $\Delta_0(w)$ 라고 하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} \Delta_0(w) = H^2(w + \frac{\pi}{M}) + H^2(w) \\ \quad + H^2(w - \frac{\pi}{M}) + \delta(w), & 0 \leq w \leq \frac{\pi}{2M} \\ \Delta_0(w) \cong 0, & w \geq \frac{\pi}{2M} \end{cases} \quad (18)$$

여기서 $\Delta_0(w)$ 는 $-\frac{\pi}{2M} \leq w \leq \frac{\pi}{2M}$ 에서 대칭 구조를 갖으며, $\delta(w)$ 는 2 채널 이상의 인접 채널에서 발생하는 저지대역 리플왜곡들로서 $0 \leq w \leq \frac{\pi}{2M}$

대역에서

$$0 \leq \delta(w) = \sum_{k=2}^{2M} H^2(w - \frac{k\pi}{M}) \ll 1 \quad (19)$$

의 특성을 갖는다. 이때 전체진폭 응답 $\Delta(w)$ 는

$$\Delta(w) \cong \Delta_0(w - \frac{k\pi}{M}), \quad 0 \leq k \leq 2M-1 \quad (20)$$

로 표현될 수가 있다. 만일 식(18)에서 $H(w)$ 이 통과대역과 저지대역에서 Maxflat 진폭응답과 Maxsharp 정지대역 감쇠 응답을 갖는다면 $\delta(w) \cong 0$ 값을 가지므로 식(18)의 $\Delta_0(w)$ 는 $0 \leq w \leq \frac{\pi}{2M}$ 에서 다음과 같이 나타낼 수가 있다^{10,11}.

$$\Delta_0(w) \cong H^2(w + \frac{\pi}{M}) + H^2(w) + H^2(w - \frac{\pi}{M}) \quad (21)$$

따라서 최적의 NPR pseudo-QMF बैं크를 구현하기 위해서는 $\Delta_0(w) \cong 1, 0 \leq w \leq \frac{\pi}{2M}$ 의 조건을 만족하는 최적의 $H(w)$ 을 설계해야 한다.

본 논문에서는 식(21)을 만족하는 최적의 NPR pseudo-QMF बैं크를 구현하기 위하여 [12]의 폐쇄형 전달함수를 갖는 Maxflat FIR를 이용하여 다음과 같은 NPR 제약적 설계 조건하에서 $H(w)$ 을 설계하였다.

$$\begin{cases} H(w)|_{w=\frac{\pi}{2M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Delta_0(w)|_{w=0} = H^2(0) + 2H^2(\frac{\pi}{M}) \cong 1 \end{cases} \quad (22)$$

또한 식(22)를 바탕으로 설계된 $H(w)$ 가 단일진폭왜곡 $\Delta_0(w) \cong 1, 0 \leq w \leq \frac{\pi}{2M}$ 조건을 만족도록 다음의 NPR 제약적 최적화 조건을 이용하여 $H(w)$ 의 임펄스 응답 계수들을 최적화하였다.

$$\begin{cases} \Delta_0(w)|_{w=\frac{\pi}{2M}} = 2H^2(\frac{\pi}{2M}) + H^2(\frac{3\pi}{4M}) \cong 1 \\ \Delta_0(w)|_{w=\frac{\pi}{4M}} = H^2(\frac{\pi}{4M}) + H^2(\frac{3\pi}{4M}) + H^2(\frac{5\pi}{4M}) \cong 1 \end{cases} \quad (23)$$

다음 장에서는 통과대역과 저지대역에서 Maxflat 진폭응답과 Maxsharp 정지대역 감쇠 응답을 갖는 폐쇄형 전달함수를 갖는 Maxflat FIR 필터를 앞서 설명한 NPR 제약적 조건들에 적용하여 NPR pseudo-QMF बैं크를 구현에 적합한 p-LPF 을 설계 하는 방법을 제안하였다.

III. Maxflat p-LPF 필터 설계

본 장에서는 제II장에서 설명한 NPR pseudo-QMF बैं크 구현에 필요한 제한적 설계 조건을 사용하여 성능이 우수하고 구현이 간단한 p-LPF 설계 방식을 제안하였다. 본 논문에서 사용한 p-LPF는 하프대역 폐쇄형전달함수를 이용한 Maxflat FIR 필터^[12]로서 제로위상의 실수 대칭 임펄스 응답을 갖으며, NPR pseudo-QMF बैं크 시스템 구현을 위한 p-LPF $H(z)$ 설계는 주파수 영역에서 다음과 같은 2 단계 과정으로 설계된다.

3.1 Maxflat p-LPF 필터 $H(z)$ 설계

본 절에서는 먼저 Maxsharp 정지대역 감쇠와 Maxflat 진폭응답을 갖는 하프대역 폐쇄형전달함수를 갖는 Maxflat FIR 필터를 이용하여 식(22)의 NPR 제약적 설계조건에 적합한 Maxflat p-LPF의 일반화된 공식을 다음과 같이 제안하고자 한다.

일반적으로 실수이면서 짝수 차수의 대칭 계수를 갖는 임펄스 응답(impulse response)을 갖는 저역통과 FIR 필터는 제로 위상을 나타내는 실수형의 대칭인 주파수응답을 나타낸다. 따라서 $N-1$ 을 짝수의 필터 차수라고 가정하였을 때, 제로 위상을 갖는 Maxflat p-LPF 저역통과 필터의 폐쇄형 전달함수 $H(z)$ 는 다음과 같이 표현할 수가 있다^[12].

$$H(z) = \left(\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right)^K \left(\alpha_L + \sum_{n=1}^L \alpha_{L-n}(z^n+z^{-n})\right) \quad (24)$$

여기서 파라메타 K 와 L 은 필터 $H(z)$ 의 통과대역과 저지대역의 Maxflat 차수로서 임의 양의 짝수 상수이며, α_n 은 실수 값을 갖는다. 이때 필터 길이 N 은

$$N = K + 2L + 1 \quad (25)$$

이며, 앞서 설명한 바와 같이 M 채널 pseudo-QMF बैं크에서 중첩상쇄를 위하여 $N-1 = mM$ (m 은 짝수)을 만족한다. 이때 $H(z)$ 의 주파수 응답 $H(w)$ 는

$$H(w) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^K \left(\alpha_L + 2 \sum_{n=1}^L \alpha_{L-n} \cos nw\right) \quad (26)$$

이 된다. 본 논문에서는 [12]에서 위의 폐쇄형 주파수 함수를 Maxflat 제한조건에 적용하여 유도한 Maxflat FIR 필터를 NPR pseudo-QMF बैं크 구현을 위한 p-LPF로 사용하였다. 따라서 [12]의 필터 공식에 따라 $L=1$ 일 때 Maxflat p-LPF 필터 $H(w)$ 을 구하기 위한 식으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$H(w) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^K (\gamma - 2\alpha_0 + 2\alpha_0 \cos w) \quad (27)$$

여기서 γ 은 필터의 $w=0$ 일 때의 이득이며, α_0 는 $H(w)$ 의 진폭 응답을 결정하는 실수 값이다. 식(27)을 차단주파수 $w_c = \pi/2M$ 에 대한 NPR 제약적 설계 조건인 식(22)의 첫 번째 식에 대입하여 α_0 을 구하면

$$\alpha_0 = \frac{\{\cos(\pi/4M)\}^K - \sqrt{2}\gamma}{2\sqrt{2}\{-1 + \cos(\pi/2M)\}} \quad (28)$$

된다. 또한 식(27)을 $w=0$ 에 대한 NPR 제약적 설계 조건인 식(22)의 두 번째 식에 적용하여 α_0 을 구하면

$$\alpha_0 = \frac{\{(1-\gamma^2)^{1/2} \cos(\pi/2M)\}^K - \sqrt{2}\gamma}{2\sqrt{2}\{-1 + \cos(\pi/M)\}} \quad (29)$$

이 된다. 이때 식(28)과 식(29)의 등식 관계를 이용하여 $\gamma(>0)$ 에 대한 2차 방정식의 근을 구하면 아래 식과 같은 결과를 얻을 수가 있다.

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}b(b-a)\{\cos(\pi/4M)\}^K + \sqrt{D_1}}{a^2\{\cos(\pi/2M)\}^{-2K} + 2(a-b)^2} \quad (30a)$$

$$D_1 = a^4\left(\cos \frac{\pi}{2M}\right)^{-4K} + 2a^2(a-b)^2\left(\cos \frac{\pi}{2M}\right)^{-2K} - a^2b^2\left\{\left(\cos \frac{\pi}{2M}\right)\left(\cos \frac{\pi}{4M}\right)\right\}^{-2K} \quad (30b)$$

여기서 $a = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{2M} - 1\right)$, $b = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{M} - 1\right)$ 의 상수 값이다. 식(30)으로부터 $H(w)$ 의 이득 $\gamma(>0)$ 는 K 값에 의해 얻어질 수가 있음을 알 수가 있다. 결

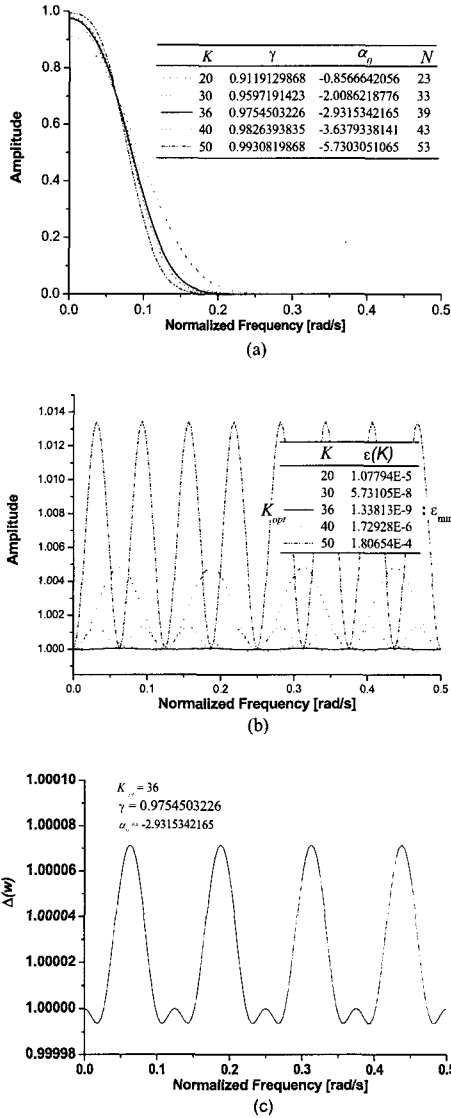


그림 2. $M=4$ 일 때 K 값에 따른 (a) $H(w)$ 의 진폭응답 및 (b) 전체진폭 응답 $\Delta(w)$ (c) $K=36$ 일 때 $\Delta(w)$

론적으로 식(27)의 $H(w)$ 을 결정하는 α_0 와 $\gamma(>0)$ 들은 파라메타 K 에 의해 얻어짐을 알 수가 있다. 이때 식(27)의 $H(w)$ 는 파라메타 K 값에 관계없이 항상 NPR 제약적 설계 조건들인 식(22)을 만족하며, K 개의 서로 다른 $H(w)$ 이 존재함을 알 수가 있다. 따라서 NPR pseudo-QMF बैं크 구현에 필요한 최적의 $H(w)$ 을 얻기 위해서는 K 의 최적 값인 Maxflat 차수를 구해야 한다. 예를 들어 그림2(a)는 4 채널 pseudo-QMF बैं크 구현을 위해 설계한 p-LPF $H(w)$ 에 대하여 $K=20, 30, 36, 40, 50$ 에 따른 진폭 응답을 각각 나타낸 것으로 K 값에 따라 주

파수 응답이 다른 것을 알 수가 있다. 이때 각 필터 $H(w)$ 의 계수들은 앞에서 설명한 바와 같이 식(28)과 식(30)에 $M=4$ 을 대입함으로써 얻은 α_0 와 $\gamma(>0)$ 식에 대하여 각각의 K 값을 적용하여 얻은 것이다. 그림2(b)는 그림2(a)의 p-LPF $H(w)$ 에 따른, 즉 K 값에 따른 식(17)의 전체진폭 응답 $\Delta(w)$ 을 나타낸 것으로 K 값에 따라 $\Delta(w)$ 의 특성에 매우 다르게 나타남을 알 수가 있다. 따라서 전체진폭 응답 $\Delta(w)$ 이 단일진폭응답에 근사한, 즉 $\Delta(w) \cong 1$, $0 \leq w \leq 2\pi$ 을 갖기 위해서는 이를 충족시킬 수 있는 최적의 Maxflat p-LPF $H(w)$ 을 설계해야 하며, 결국 최적의 K 값인 Maxflat 차수 K_{opt} 을 선택해야 한다. 그림2(c)는 Maxflat 차수 K_{opt} 에 대한 진폭응답 $\Delta(w)$ 을 나타낸 것이다.

3.2 Maxflat p-LPF 필터 최적화

앞서 설명한 바와 같이 NPR 제약적 설계 조건에 따라 설계한 $H(w)$ 는 K 개의 서로 다른 필터가 존재한다. 따라서 본 절에서는 식(23)의 NPR 제약적 최적 조건에 적용하여 $\Delta_0(\pi/2M) \cong 1$, $\Delta_0(\pi/4M) \cong 1$ 을 만족하는 최적의 Maxflat 차수 K_{opt} 을 구하는 방법을 제안하였으며, 이를 바탕으로 최소의 단일진폭오차를 갖는 Maxflat p-LPF 필터 $H(w)$ 을 설계할 수 있음을 증명하였다.

NPR pseudo-QMF बैं크에서 필요한 $H(w)$ 의 최적 Maxflat 차수 K_{opt} 을 구하기 위해서 NPR 제약적 최적 조건인 식(23)을 사용하여 단일진폭오차 $\epsilon(K)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$\epsilon(K) = \left(\Delta_0\left(\frac{\pi}{2M}\right) - 1 \right)^2 + \left(\Delta_0\left(\frac{\pi}{4M}\right) - 1 \right)^2 \quad (31)$$

여기서 식(13)의 $\epsilon(K)$ 는 K 의 함수임을 알 수가 있다. 이때 식(28) 또는 (29)의 α_0 와 식(30)의 γ 을 갖는 식(27)의 $H(w)$ 는 K 에 관계없이 식(22)의 차단주파수 조건식인 $H^2(\pi/2M) = 0.5$ 을 항상 만족할 뿐만 아니라 $H^2(5\pi/4M) \cong 0$ 이다. 따라서 이 결과들을 식(23)의 식들에 대입하면 다음과 같으며

$$\begin{cases} \Delta_0\left(\frac{\pi}{2M}\right) = 1 + H^2\left(\frac{3\pi}{4M}\right) \\ \cong 1 \\ \Delta_0\left(\frac{\pi}{4M}\right) \cong H^2\left(\frac{\pi}{4M}\right) + H^2\left(\frac{3\pi}{4M}\right) \end{cases} \quad (32)$$

이 결과 식들을 식(31)의 에 대입하면 다음 식으

로 표현되는 간단한 $\varepsilon(K)$ 을 얻을 수가 있다.

$$\varepsilon(K) \cong \left\{ H^2\left(\frac{3\pi}{4M}\right) \right\}^2 + \left\{ H^2\left(\frac{\pi}{4M}\right) + H^2\left(\frac{3\pi}{4M}\right) - 1 \right\}^2 \quad (33)$$

여기서 $\varepsilon(K)$ 는 최적의 Maxflat 차수 K_{opt} 을 구하기 위한 왜곡 오차로서 K_{opt} 는 $\varepsilon(K)$ 이 0에 근사한 최소 값을 가질 때 구할 수가 있다.

$$\varepsilon(K_{opt})_{\min} \cong 0 \quad (34)$$

결론적으로 위의 식(34)로부터 K_{opt} 이 구해지면 식(28)과 (30)으로 표현되는 α_0 와 γ 를 이용하여 최적화된 식(27)의 Maxflat p -LPF 필터 $H(w)$ 가 구현되며, 이때 필터 길이 N 은 식(25)으로부터 구해진다. 예를 들어 그림2에서와 같이 $M=4$ 채널 NPR pseudo-QMF बैं크의 경우 $w_c = \pi/8$ 이 되며, 제안된 설계 방식을 적용하면 $K_{opt} = 36$ 일 때 $\varepsilon(36)_{\min} = 1.33813E-9$ 을 갖는다. 이때 $\gamma = 0.9754503226$, $\alpha_0 = -2.9315342165$, $N=39$ 의 값들이 구해지며, 따라서 최종 설계된 Maxflat p -LPF $H(w)$ 는 다음 식과 같이 얻어진다.

$$H(w) = \left(\cos \frac{w}{2} \right)^{36} (6.838519 - 5.830684 \cos w) \quad (35)$$

그림2의 실선은 식(36)의 $H(w)$ 진폭응답과 전체 진폭왜곡 응답 $\Delta(w)$ 을 나타낸 것이다. 이때 Maxflat p -LPF $H(w)$ 는 -300dB가 넘는 급격한 정지대역 감쇠특성과 저지 및 통과대역에서 어떠한 리플도 존재하지 않음을 알 수가 있다. 또한 $\Delta(w)$ 의 리플 오차는 $\delta_1 < 7.2 \times 10^{-5}$ 로 매우 작은 값을 나타낸 것을 알 수가 있다.

IV. NPR pseudo-QMF बैं크 구현

본 장에서는 제안된 Maxflat p -LPF 설계 방식을 바탕으로 $M=8$ 채널 NPR pseudo-QMF बैं크 시스템을 구현하여 설계 타당성을 입증하고자 한다.

$M=8$ 채널 pseudo-QMF बैं크에서 사용되는 p -LPF $H(w)$ 의 차단주파수는 $w_c = \pi/16$ 이 된다. 따라서 Maxflat p -LPF $H(w)$ 설계를 위해서는 먼저 w_c 값을 NPR 제약적 설계조건 결과 식인 식(28)과 식(30) 또는 식(29)와 식(30)에 적용하므로써 α_0 와 γ 를 파라메타 K 의 함수로 우선 나타내야 한다. 즉,

$H(w)$ 설계를 위한 α_0 와 $\gamma(>0)$ 는

$$\alpha_0 = \frac{\{\cos(\pi/32)\}^K - \sqrt{D_\gamma}}{2\sqrt{2}\{-1 + \cos(\pi/16)\}} \quad (36a)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}b(b-a)\{\cos(\pi/32)\}^{-K} + \sqrt{D_\gamma}}{a^2\{\cos(\pi/16)\}^{-2K} + 2(a-b)^2} \quad (36b)$$

$$D_\gamma = a^4\left(\cos \frac{\pi}{16}\right)^{-4K} + 2a^2(a-b)^2\left(\cos \frac{\pi}{16}\right)^{-2K} - a^2b^2\left\{\left(\cos \frac{\pi}{16}\right)\left(\cos \frac{\pi}{32}\right)\right\}^{-2K} \quad (36c)$$

와 같이 구해진다. 여기서 $a = 2\sqrt{2}(\cos \pi/16 - 1)$, $b = 2\sqrt{2}(\cos \pi/8 - 1)$ 이다. 식(36)의 α_0 와 $\gamma(>0)$ 을 갖는 K 개의 서로 다른 $H(w)$ 들 가운데 $M=8$ 일 때 최적의 필터를 얻기 위하여 $H(w)$ 을 NPR 제약적 최적화 조건식인 식(33)의 $\varepsilon(K)$ 에 적용한 결과 $\varepsilon(132)_{\min} = 2.61609E-8$ 일 때 Maxflat 차수 $K_{opt} = 132$ 을 얻었다. 이때 $K_{opt} = 132$ 에 따른 $\gamma = 0.9637431722$, $\alpha_0 = -9.7179835413$, $N=135$ 이며, 최종 설계된 Maxflat p -LPF $H(w)$ 는 아래 식과 같이 얻어진다.

$$H(w) = \left(\cos \frac{w}{2} \right)^{132} (20.4 - 19.436 \cos w) \quad (37)$$

그림3은 구현된 8채널 NPR pseudo-QMF बैं크 시스템의 주파수 응답 특성을 나타낸 것이다. 여기서 그림3(a)는 $M=8$ 일 때 Maxflat p -LPF $H(w)$ 의 응답특성을 나타낸 것으로 -100dB가 넘는 급격한 정지대역 감쇠특성과 저지 및 통과대역에서 어떠한 리플도 존재하지 않음을 알 수가 있다. 또한 그림 3(b)는 그림3(a)의 $H(w)$ 들을 적용한 8 채널 NPR pseudo-QMF 분리 필터 $H_k(w)$ 들의 주파수 응답을 각각 나타낸 것이며, 그림3(d)는 전체시스템 전달함수 $MT_0(z)$ 의 주파수 응답 $MT_0(w)$

$$MT_0(w) = \sum_{k=0}^{M-1} H_k^2(w) = \sum_{k=0}^{M-1} H^2\left(w - \frac{(k+1/2)\pi}{M}\right) \quad (39)$$

을 나타낸 것이다. 여기에서 $MT_0(w)|_{M=8}$ 의 단일왜곡 오차는 $\delta_1 < 3.23 \times 10^{-4}$ 으로 매우 작은 값을 나타낸 것을 알 수가 있다. 이는 기존의 방식 [7]의 $\delta_1 > 0.0015$ ($N=182$)와 [8]의 $\delta_1 > 0.003443$ ($N=439$)

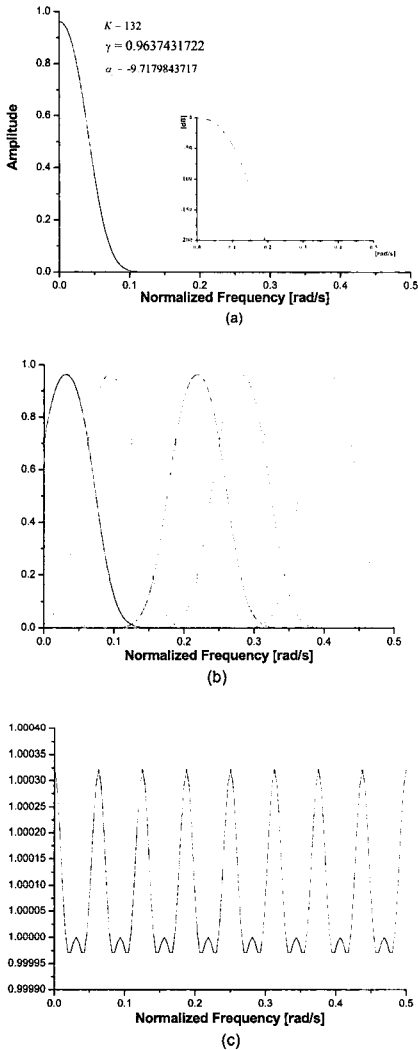


그림 3. 8채널 NPR pseudo-QMF बैं크 시스템의 주파수 응답 특성 (a) $H(w)$ 의 진폭응답 (b) NPR pseudo-QMF 분리 필터 $H_k(w)$ 진폭응답 (c) 전체 시스템 진폭응답 $\Delta(w)$

에 비해 성능이 크게 개선된 결과를 보인 것이다. 이상에서 설명한 바와 같이 본 논문에서 제안한 Maxflat p -LPF 기반의 NPR pseudo-QMF बैं크 설계 방식은 성능이 매우 우수할 뿐만 아니라 매우 효율적인 설계 방식임을 입증할 수가 있었다.

V. 결론

기존의 pseudo-QMF बैं크 구현 방법들은 중첩상쇄 왜곡을 줄이기 위하여 대부분 날카로운 정지대역 감쇠를 갖는 p -LPF를 사용하였다^{5,6,7,8}. 그러나 진폭왜곡에 대하여 p -LPF를 최적화하지 않았기 때문

에 실제로 NPR pseudo-QMF बैं크 구현에는 적합하지 않다^{6,7,8}. 최근에 p -LPF의 차단 주파수를 추정 제어함으로써 진폭왜곡에 대해 p -LPF를 최적화하는 설계 방법이 제안되었으나⁹ 다른 주파수 대역에서 진폭왜곡이 상대적으로 증가하는 치명적인 단점을 갖고 있다⁹ 결론적으로 NPR pseudo-QMF बैं크의 최적 시스템은 진폭왜곡과 중첩왜곡이 최소화 되어야 한다. 이를 위해서는 Maxflat (maximally flat) 진폭응답과 Maxsharp(Maximally sharp) 정지대역 감쇠 응답의 주파수 특성을 갖는 p -LPF를 설계하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 제로 위상을 갖는 Maxflat FIR 필터를 NPR pseudo-QMF बैं크를 구현하기 위한 p -LPF로 사용하여 NPR 조건에 맞게 설계하고 최적화하는 방식을 제안하였다. 제안된 방식에서는 우선 NPR 설계 조건인 $w = \pi/2M$ 및 $w = 0$ 의 진폭응답 공식에 적용하여 수학적으로 MAXflat p -LPF 필터 설계를 위한 일반화된 공식을 제안하였다. 또한 NPR 최적화 조건인 단일진폭왜곡 함수를 이용하여 MAXflat 차수를 구하고 MAXflat p -LPF 필터를 최적화 하였다. 제안된 설계 방식의 성능 평가를 위하여 8채널 NPR pseudo-QMF बैं크를 구현한 결과, 제안된 방식에 따라 설계된 MAXflat p -LPF 필터는 중첩상쇄 왜곡을 최소화할 수 있는 -100dB 이상의 매우 날카로운 저지대역 감쇠와 3.5×10^{-4} ($\approx -70dB$) 미만의 매우 적은 진폭왜곡의 주파수 응답을 보였다. 이것은 기존의 설계 방식들^{6,7,8}에 비해 매우 우수한 것으로 나타난 것이다.

참고 문헌

- [1] P. P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks. *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall*, 1993.
- [2] M. A. Vetterli and J. Kovacevic, Wavelets and Subband Coding. *EnglewoodCliffs, NJ: Prentice-Hall*, 1995.
- [3] A. N. Akansu and M. J. Medley, Eds., Wavelet, Subband and Block Transforms in Communications and Multimedia. *Norwell, MA: Kluwer*, 1999.
- [4] T. Q. Nguyen, "Near-perfect-reconstruction pseudo-QMF filter banks," *IEEE Trans. Signal Processing*, 42, pp. 65 - 76, Jan. 1994.

- [5] R. D. Koilpillai and P. P. Vaidyanathan, "A spectral factorization approach to pseudo-QMF design," *IEEE Trans. Signal Processing*, 41, pp. 82 - 92, Jan. 1993.
- [6] T. Q. Nguyen, "Near-perfect-reconstruction pseudo-QMF filter banks," *IEEE Trans. Signal Processing*, 42, pp. 65 - 76, Jan. 1994.
- [7] Y.-P. Lin and P. P. Vaidyanathan, "A Kaiser window approach for the design of prototype filters of cosine modulated filterbanks," *IEEE Signal Processing Lett.*, 5, pp. 132 - 134, June 1995.
- [8] Fernando Cruz-Roldán, Francisco López-Ferrerías and etc., "Arbitrary-length spectral factor applied to the design of pseudo-QMF cosine-modulated filter banks," *IEEE Trans. Circuits Syst. II*: 48(3), Mar 2001
- [9] Fernando Cruz-Roldán, Pedro Amo-López and etc., "An efficient and simple method for designing prototype filters for cosine-modulated pseudo-QMF banks," *IEEE Signal Processing Lett.*, 9(1), Jan 2002
- [10] S. Samadi, A. Nishihara and H. Iwakura. "Universal maximally flat low-pass FIR systems," *IEEE Trans. Signal Processing* 21, pp.1956-1964, 2000.
- [11] N. Aikawa and M. Sato. "A design method of low delay lowpass FIR digital filters with maximally flat characteristics in the passband and the transition zero in the stopband," *ISCAS'02*, 1, pp.I-405 -08, 2002
- [12] 전준현, "제로 위상을 갖는 광대역 저역통과 MAXFLAT FIR 필터 설계를 위한 새로운 폐쇄형 전달 함수," *한국통신학회 논문지*. vol. 32, no. 7, pp. 658-666, 2007.8.

전 준 현 (Joonhyeon Jeon)

정회원



1984년 동국대학교 전자공학과
학사졸업

1986년 한국과학기술원 전기 및
전자 공학석사 졸업

1991년 한국과학기술원 전기 및
전자 공학박사 졸업

1991년~1999년 한국통신 인터넷
연구실장 및 사업부장

2000년~2001년 한누리투자증권 리서치팀 이사

2000년~2001년 드림타인 전무

2001년~2008년 현재 동국대 공과대학 IT학부 조교수
<관심분야> 영상통신, 영상압축, 신호처리 등