

## 원추형 코일스프링의 강성해석

김진훈† · 이수종\* · 김정렬\*\*

(원고접수일 : 2007년 12월 18일, 심사완료일 : 2008년 2월 16일)

### Analysis of Stiffness for Frustum-shaped Coil Spring

Jin-Hun Kim† · Soo-Jong Lee\* · Jung-Ryul Kim\*\*

**Abstract** : Springs are widely utilized in machine element. To find out stiffness of frustum-shaped coil spring, the space beam theory using the finite element method is adopted in this paper. In three dimensional space, a space frame element is a straight bar of uniform cross section which is capable of resisting axial forces, bending moments about two principal axes in the plane of its cross section and twisting moment about its centroidal axis. The corresponding displacement degrees of freedom are twelve. To find out load vector of coil spring subjected to distributed compression, principle of virtual work is adapted. And this theory was programming using MATLAB software.

To compare FEM using MATLAB software was applied MSC.Nastran software. The geometry model for MSC.Patran was produced by 3-D design modeling software. Finite element model was produced by MSC.Patran. Finite element was applied tetra (CTETRA) having 10 node.

The analysis results of the MATLAB and MSC.Nastran are fairly well agreed with those of various experiments. Using MATLAB program proposed in this paper and MSC.Nastran, spring constants and stresses can be predicted by input of few factors.

**Key words** : Space beam element(선재요소), Step by step method(단계법), Spring constant(스프링 상수), Transformation matrix(변환행렬), Finite element(유한요소)

#### 1. 서 론

원추형 코일스프링은 형상이 간단하면서도 다양한 스프링력을 얻을 수 있으므로 자동차의 디프렌셜 와셔 또는 클러치 어셈블리에서의 리턴 스프링 그리고 프레스의 완충 스프링 등에 널리 사용되고

있는 기계요소<sup>(1)</sup>이다.

이러한 스프링에 대한 해석은 근래에 이르기까지 주로 Wahl의 이론을 근거로 해석하였으나, 이 해석 방법은 수정계수를 적용하는 근사식이므로 정확한 강성을 구하는 데는 유한요소법<sup>(2),(3)</sup>이 널리 이용되고 있다.

† 교신저자(부경대학교 대학원 설계생산자동화공학전공), E-mail:huni21@pknu.ac.kr, Tel: 051)620-1594

\* 부경대학교 기계공학부

\*\* 한국해양대학교 기관시스템공학부

본 연구에 앞서 웨이브 와셔 스프링의 비선형성<sup>(4)</sup>과 3차원에 공간에서 인장스프링의 강성<sup>(5)</sup>에 대한 연구를 선행하였다. 그리고 상측부가 절단된 형태의 코일에 대하여 압축 분포하중을 받는 원추형 코일스프링의 강성해석<sup>(6),(7)</sup>을 위하여 유한요소법(FEM)을 적용하였고 이 정식화된 식을 MATLAB으로 프로그래밍하였다.

본 연구에서는 선행연구에서의 지식을 바탕으로 하여 최근에 유한요소해석(FEA) 소프트웨어로 널리 많이 사용되어지는 MSC.Nastran을 이용하여 원추형 코일스프링의 강성을 해석하였다. 유한요소법으로 정식화하여 프로그래밍한 MATLAB에 의한 해석 결과와 원추형 코일스프링의 형상을 모델링하여 상용 유한요소 해석 소프트웨어인 MSC.Nastran에 의한 해석 결과를 실험에 의한 결과와 비교하였다.

## 2. 유한요소 정식화

선행 연구에서 강성행렬(stiffness matrix)과 변환행렬(transformation matrix) 및 하중벡터(load vector)를 구하여 유한요소(finite element)를 정식화하여 MATLAB으로 프로그램하였다.

Fig. 1과 같은 선재요소(space beam element)를 이용하여 3차원 공간에서 원추형 코일스프링의 형상을 구성하였다. 빔 요소의 전체 강성행렬은 하중의 종류에 따라 각각 독립적으로 구한 식들의 단계(step by step)으로 강성행렬을 증첩하여 구하였으며 국소좌표계(local coordinate system)에서 빔 요소의 전체 강성행렬을 구하였다. 이 값은 국소좌표계의 값이므로 중앙좌표계(global

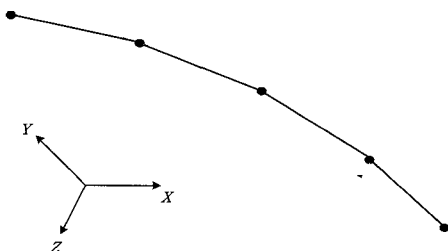


Fig. 1 Space beam element in 3D space

coordinate system)로 변환하여야 하며 이는 변환행렬을 구하면 변환할 수 있다.

절점력과 절점변위와의 관계는 가상일의 원리를 적용하여 중앙좌표계의 전체 변형량을 구할 수 있었다. 유한요소법에 있어서 하중벡터는 가상일의 원리<sup>(8)</sup>를 적용하여 구한다. 원추형 코일스프링은 축방향의 인장이나 압축 같은 분포하중을 받는다. 따라서 분포하중을 선재요소의 절점력으로 환산하여야 한다. 각 요소의 하중벡터를 구하여 이들을 조합하여 전체의 하중벡터를 구하였다.

## 3. MATLAB에 의한 해석

선행 연구에서 유한요소법으로 정식화한 식을 MATLAB<sup>(9),(10)</sup>으로 프로그래밍하였다. Fig. 2와 같이 원추형 코일스프링의 형상을 133개의 절점(node)으로 나타내었고 132개의 요소(element)로 구성하였다.

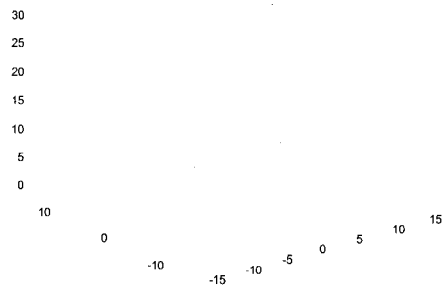


Fig. 2 MATLAB model of spring

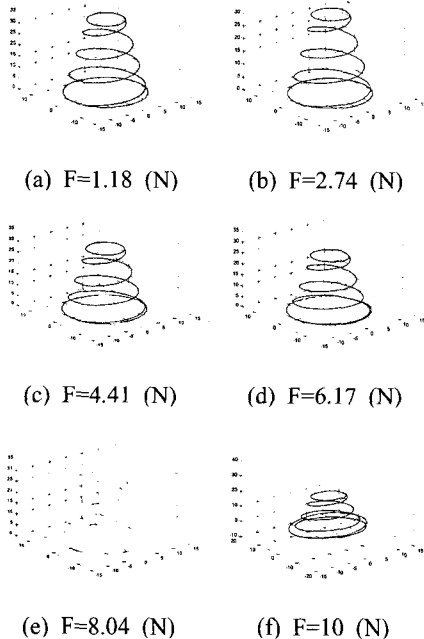
Table 1 Specification of spring

Items	Specification
Compression force (N)	10
Upper diameter : $D_1$ (mm)	9.42
Lower diameter : $D_2$ (mm)	20.75
Height : $H$ (mm)	35.4
Coil material : $d$ (mm)	1
Number of active coils (turns)	5.5
Young's modulus (GPa)	205.8
Shear modulus (GPa)	80

Table 1의 사양과 Table 2의 경계조건(boundary condition)을 적용하여 해석<sup>(11)</sup>을 수행하였다. 6가지의 하중조건에 따른 원추형 코일스프링의 변형양상을 해석하여 가시적인 결과를 Fig. 3에 나타내었다.

**Table 2 Boundary condition of model**

Nodal point	Displacement			Distortion		
	x	y	z	x	y	z
109~132	fixed	free	fixed	free	free	free
133	fixed	fixed	fixed	fixed	fixed	free



**Fig. 3 Deformation of spring by MATLAB**

4. Nastran에 의한 해석

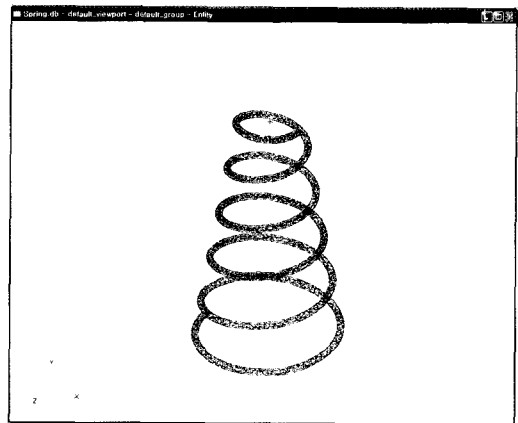
원추형 코일스프링의 강성해석을 위하여 유한요소해석 프로그램인 MSC.Nastran<sup>(12),(13)</sup> 소프트웨어를 사용하였다. 원추형 코일스프링의 기하학적 모델(geometry)은 3D 설계 소프트웨어를 이용하였으며 전후처리기인 MSC.Patran<sup>(14)</sup>에서 원추형 코일스프링의 기하학적 모델을 import하여 해

석을 수행하였다.

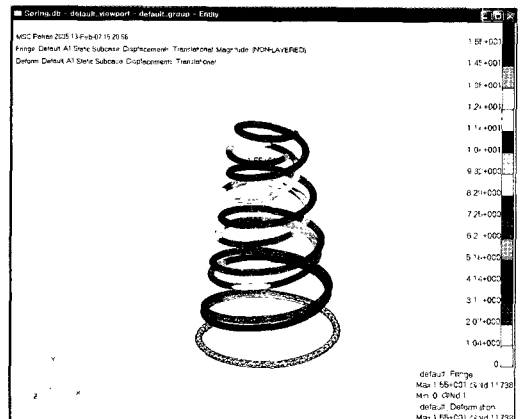
3차원 솔리드(solid) 모델을 10개의 절점을 가지는 tetra요소(CTETRA)를 이용하여 유한요소를 구성하였다. Fig. 4는 MSC.Patran 환경에서 메시(mesh) 작업을 하여 구축한 원추형 코일스프링의 유한요소모델을 나타낸 것이다.

경계조건으로 스프링의 하단부를 고정하였으며 하중의 입력은 total load를 사용하여 부여하였다. 또한 6가지 경우의 하중조건은 load case를 설정하여 해석을 수행하였다. Table 1의 스프링 사양을 적용하여 해석을 수행하였다.

Fig. 5는 MSC.Nastran에 의해 해석한 원추형 코일스프링의 변형 거동 결과를 MSC.Patran 환경에서 나타낸 것이다.



**Fig. 4 FE Model of spring by MSC.Patran**



**Fig. 5 Deformation of spring by MSC.Nastran**

### 5. 실험

Photo. 1은 본 연구에 사용된 스프링 시편을 나타낸 것이며, 스프링의 재료 사양과 치수는 Table 1과 Fig. 6에 나타내었다.

Photo. 2는 실험에 이용된 스프링 시험기(FMC-A 200D)이다. 3가지의 스프링 시편을 준비하여 각각 6단계에서의 변위를 설정한 후 그 변위에 해당하는 하중을 측정하였다.

일반적으로 사용되는 원추형 코일스프링의 변위를 구하는 식<sup>[15]</sup>은 다음과 같다.

$$\delta = \left( \frac{16Fn}{Gd^4} \right) \left( \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2 - R_1} \right) \quad (1)$$

여기서,  $P$ 는 하중,  $n$ 은 스프링의 권선수,  $G$ 는 탄성계수,  $R_1 (= D_1/2)$ 과  $R_2 (= D_2/2)$ 는 스프링의 작은 외경의 반지름과 큰 외경의 반지름이다.



Photo 1 Samples for spring

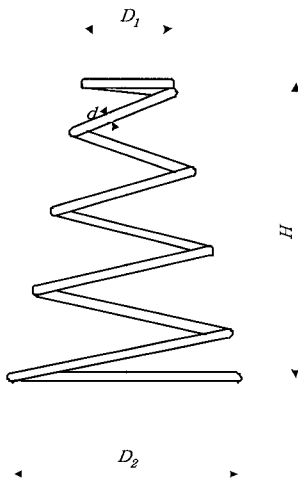


Fig. 6 Dimensions of specimen

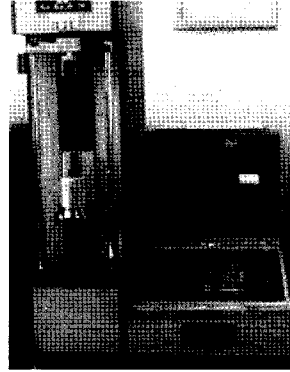


Photo. 2 General view of spring tester

### 6. 해석결과 및 고찰

유한요소법에 의해 정식화한 식을 프로그래밍한 MATLAB에 의한 해석결과와 MSC.Nastran에 의한 해석결과를 실험결과 및 일반적인 이론식에 의한 계산결과와 비교하여 Table 3에 나타내었다. 하중 10(N) 부가시의 결과결과를 나타낸 것이다. 이론식에 의한 계산 결과를 기초로 하여 비교하여 볼 때 MSC.Nastran에 의한 해석결과의 경우가 오차가 가장 적게 나타났다. MATLAB에 의한 해석결과 역시 이론적 계산결과와의 오차가 4% 이내이므로 KS B 2405<sup>[16]</sup>에서 규정한 스프링 상수의 허용차 1급  $\pm 5\%$ 이내를 만족하고 있다.

Table 3 Comparison of deformation

Item	Displacement(mm)	Error (%)
Test	15.4	1.53
Solid mechanics	15.64	0
FEM(MATLAB)	16.2	3.57
MSC.Nastran	15.5	0.89

Fig. 7은 압축 하중과 변위의 관계를 나타내는 것으로 모두 비교적 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 초기에 다소의 오차를 보이나 이것은 실험시 초기에 스프링이 정상화되기 이전 상태의 오차로 사료되며 스프링이 정상화된 후 점차적으로 비교적 잘 일치하는 경향을 보인다.

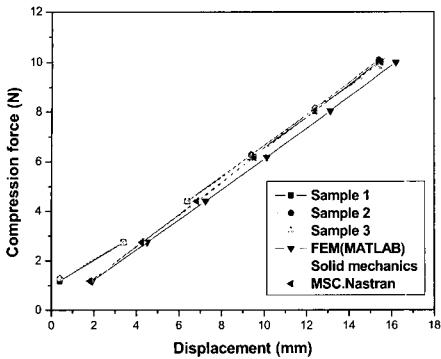


Fig. 7 Relationship between compression force and displacement

Fig. 8에서는 전체적으로 스프링상수가 해석결과와 이론결과가 비교적 일정한 패턴을 보였으나, 초기의 실험결과는 해석결과와 이론결과와 비교하여 차이가 있다. 이것은 코일스프링 제작 형상의 평행도, 직각도, 형상 공차에 의한 것으로 사료된다. 그러나 하중이 증가할수록 실험결과와 해석결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

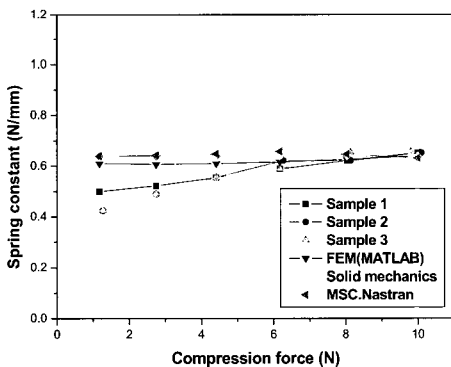


Fig. 8 Spring constant of frustum-shaped coil spring

## 7. 결 론

원추형 코일스프링의 강성을 살펴보기 위해서 유한요소법에 의해 정식화한 식을 프로그래밍한 해석치와 MSC.Nastran에 의한 해석치 그리고 실험치를 비교하여 다음과 같은 결과에 도달하였다.

(1) MATLAB으로 프로그램한 해석치의 경우 압축 분포하중이 작용할 때 12자유도 선재요소를

이용한 유한요소해석은 원추형 코일스프링의 강성을 파악하는데 유용하게 이용될 수 있다.

(2) MSC.Nastran에 의한 해석치의 경우 tetra요소로 구성하여 원추형 코일스프링의 강성을 파악하는데 유용하게 이용될 수 있다.

(3) 위의 2 가지 해석치와 실험치 및 이론식에 의한 계산치는 비교적 잘 일치하였다.

(4) 스프링은 일반적으로 가느다란 소선으로 성형되고 재료의 지름에 비하여 외형의 지름이 커서 유연성이 큰 관계로 기하학적 비선형성을 고려하여야 한다.

## 참고문헌

- [1] 성락원, 주원식, "기계 요소 설계", 삼성실업, 1991.
- [2] C. S. Krishnamoorthy, "Finite Element Analysis", Tata McGraw-Hill Publishing Co., 1995.
- [3] S. S. Rao, "The Finite Element Method in Engineering", Pergamon Press, 1989.
- [4] S. J. Lee and J. S. Wang, "A Study on the Non-linearity of Wave Washer Spring", 한국마린엔지니어링학회, 제 21권 제 3호, pp. 246-255, 1997.
- [5] S. J. Lee, "A Study on the Stiffness of Coil Spring in the Three Dimensional Space", 한국마린엔지니어링학회, 제 25권 제 5호, pp. 186-195, 2001.
- [6] 김진훈, 이수중, 이경호, "원추형 코일스프링의 강성에 대한 연구", 한국마린엔지니어링학회 2001년도 추계학술대회 논문집, pp. 21-27, 2001.
- [7] S. J. Lee and J. H. Kim, "A Study on the Stiffness of Frustum-shaped Coil Spring", 한국동력기계공학회지, 제 7권 제 4호, pp. 49-54, 2003.
- [8] S. P. Timoshenk and J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1959.

- [9] Douglas W. Hull, "Mastering mechanics 1 using MATLAB 5", Prentice Hall, 1999.
- [10] Adrian Biran and Moshe Breiner, "MATLAB 5 for engineers", Prentice Hall, 1999.
- [11] ばね技術研究會編, "ばねの有限要素解析", 日刊工業新聞社, 1997.
- [12] "MSC.Nastran Linear Static Analysis User's Guides", MSC.Software, 2003.
- [13] 권진희 외 5명, "NASTRAN으로 배우는 전산 구조해석", 경문사, 2004.
- [14] "MSC.Patran User's Guides & Reference Manuals", MSC.Software, 2003.
- [15] 丸善, "ばね", ばね技術研究會編, 1982.
- [16] 한국공업규격, "압축 및 인장 코일 스프링 설계 기준 KS B 2406", 한국표준협회, 1990.

**저 자 소 개**

**김진훈(金辰勳)**



1975년 5월생. 1998년 부경대학교 기계설계학과 졸업. 2007년 부경대학교 대학원 기계공학부 설계생산자동화공학전공 박사과정 수료.  
E-mail : huni21@pknu.ac.kr

**이수중(李守鍾)**



1944년 1월생. 1971년 동아대학교 기계공학과 졸업. 1996년 한국해양대학교 대학원 기계공학과 졸업(공학박사). 현 부경대학교 기계공학부 교수.  
E-mail : sjlee@pknu.ac.kr

**김정렬(金正烈)**



1961년 9월. 1983년 한국해양대학교 기관학과 졸업. 1985년 한국해양대학교 대학원 박용기관학과 졸업(공학석사). 1998년 일본 나고야대학 대학원 기계공학과 졸업(공학박사). 1988년 8월~1993년 2월 현대중공업 엔진사업부 근무. 1993년 3월~현재 한국해양대학교 해사대학 기관시스템공학부 부교수.