한국동력기계공학회지 제12권 제2호 pp.41~47 2008년 4월

FEM을 이용한 구체무단변속기의 응력해석
Stress Analysis of the S-CVT using Finite Element Method

김 정 윤
J. Y. Kim

Key Words : Friction Drive(마찰전동장치), FEM(유한요소법), Hertzian Theory(Hertzian 접촉이론), Spherical CVT(구체무단변속기)

Abstract : This article deals with the stress analysis of the friction drive, which transmits the power via the rolling resistance on the contract area between the two rotating bodies. On the contact area, friction drives are normally involved with shear stress due to the transmitted force, as well as normal stress. Thus the stress analysis including the shear stress is necessary for the design of the friction drive. Hertzian results can be used to estimate the normal stress distribution and elastic deflection of the contact area, although the shear stress distribution is not well defined. In order to investigate the shear stress distribution and its effects in a friction drive, we have performed the stress analysis of the spherical continuously variable transmission(CVT) using finite element method. The spherical CVT is one of friction drives, which is used in small power applications. The numerical results show that the normal stress distribution is not affected by the transmitted shear force, and the maximal shear stress is increased in small amount along with the shear force.

기호 설명

ω : 각속도 [rad/s]
θ : 각도 [rad]
P : 수직하중 [N]
R, r : 반경 [m]
E : 탄성계수 $[N/m^2]$
p : 수직응력 $[N/m^2]$
ν : 포아송비

1. 서 론

마찰을 이용하여 동력을 전달하는 마찰전동장치(friction drive)는 백래쉬(backlash)가 없고 소형화가 가능하여 정밀이송장치와 정밀공작기계 설계에 적용되어 왔다.[1)~5)] 더불어 마찰로 인한 작은 동력전달용량과 마모, 열문제로 인하여 차량용 변속장치로 사용하기는 어려우나 트랙션오일을 사용할 경우 트랙션드라이브(traction drive)로의 적용이 가능하고 그 구조적 특징을 이용하여 다양한 형태의 무단변속기구로 응용될 수 있어 마찰전동장치에 대한 다수의 연구결과가 지속적으로 발표되고 있다.[6)~8)]

이러한 구름마찰을 이용하여 동력을 전달하는 마찰전동장치는 동력전달요소간의 접촉부에서 발생할 수 있는 슬립을 방지하고 전달동력을 증가시키기 위하여 최대정지 마찰력을 크게 설계하는 것이 일반적이다. 때문에 수직항력과 마찰계수의 곱으로 표시되는 최대정지 마찰력을 크게 하기 위하여 큰 마찰계수를 가진 재료나 큰 압축강도를 가진 재료를 선택하여 제작된다. 따라서 동력전달이 이루어지는 요소간의 접촉부에서 발생하는 탄성변형과 응력에 대한 연구는 매우 중요하다.

일반적으로 정지하고 있으며 접촉부에 수직하중이 작용하는 두 물체의 변형과 압력분포에 관한 연구는 Hertzian 해석결과를 이용할 수 있다. 하지만 Hertzian 이론은 정지한 두 물체의 압력분포와 탄성변형량에 대한 해석결과를 나타내므로 마찰전동장치와 같이 접촉부에 동력전달방향으로 힘이 작용하는 경우에 대해서는 전단력에 대한 영향을 고려한 해석이 필요하다. 더불어 미끄러짐이 발생하는 전단력이 작용할 때 마찰전동장치는 동력전달이 실패하게 되어 접촉부가 미끄러짐에 의한 항복이나 파괴가 발생할

접수일 : 2007년 10월 31일, 채택확정 : 2008년 3월 20일
김정윤(책임저자) : 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부
E-mail : kjungyun@cu.ac.kr, Tel : 053-850-2714

수 있다. 이에 본 연구에서는 유한요소법(finite element method)을 이용하여 접촉부에서 나타나는 응력분포에 대하여 살펴보고자 한다.

본 연구에서는 대상 마찰전동장치로서 구체무단변속기를 선정하였다. Fig. 1에서 표시한 구체와 디스크로 이루어진 구체무단변속기는 금속과 금속의 건마찰로 발생하는 구름저항력을 이용하여 동력을 전달하는 소용량의 동력전달장치이다[7]. 연구대상 마찰전동장치는 구체의 3차원 회전축변화를 통하여 무단변속을 구현하며 별도의 클러치/브레이크 기구없이 전/후진, 중립상태의 구현이 가능한 특징을 가지고 있다.

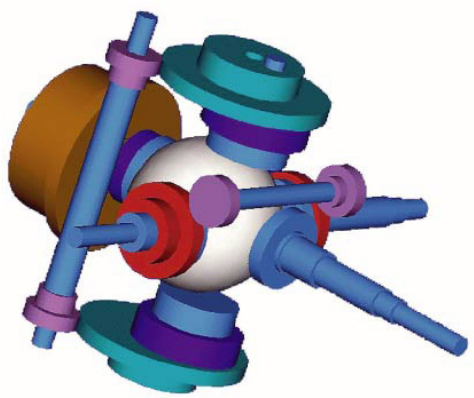


Fig. 1 Spherical CVT

본 논문에서는 먼저 연구대상인 구체무단변속기의 구조와 동력전달 메카니즘에 대해 소개하였다. 3절에서는 일반적인 Hertzian이론에 대해 살펴보고 그 결과를 구체무단변속기에 적용하여 접촉부의 탄성변형량과 압력분포에 대하여 살펴보았다. 그리고 유한요소법을 통하여 구체무단변속기의 동력이 전달되는 상태 중 동력전달방향 하중(전단력)이 작용하지 않는 경우와 최대정지마찰력 이상의 하중이 작용하여 미끄러짐이 발생하는 경우에 대한 해석결과를 제시하고 이를 분석하였다.

2. 구체무단변속기

구체무단변속기는 Fig. 2와 같이 입력축과 연결되어 있는 입력디스크와 출력축과 연결되어 있는 출력디스크, 그리고 입력축의 동력을 출력축으로 전달하는 동력전달요소인 구체와 구체의 회전방향을 변화시키는 변속조작부인 베리에이터(variator)로 구성되어 있다.

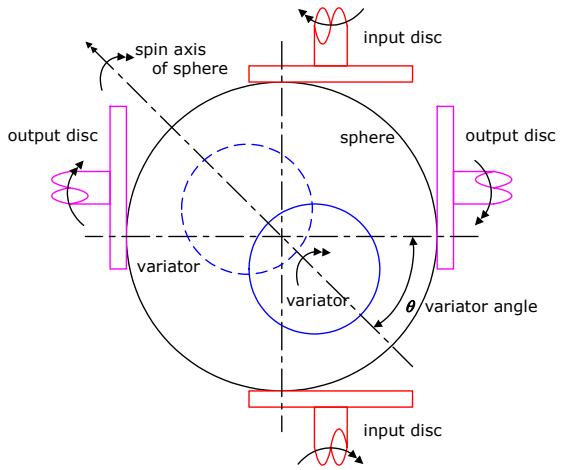


Fig. 2 Structure of the S-CVT

동력의 전달은 구체와 일정한 반경으로 접촉하고 있는 각 디스크의 회전을 통하여 이루어진다. 입력축에서 전달된 토크는 입력디스크와 구체의 접촉점에서 발생하는 접선방향 힘(전단력)으로 전달되고, 이는 다시 출력디스크를 통해 출력축의 토크로 전달된다. 입력디스크와 출력디스크에서 동력을 전달하기 위하여 필요한 수직항력은 압축코일스프링을 사용하여 일정한 크기로 인가하며, 핵심요소인 구체와 디스크의 재질과 가공정도는 일반 볼베어링의 그것과 같다.

Fig. 3은 S-CVT의 작동원리를 나타낸 것이다. 동력발생 요소에서 구동력이 전달되면 구체와 반경 r_i로 접촉되어 있는 입력 디스크의 회전으로 구체가 회전하게 된다. 이 회전은 구체의 회전(spin)운동을 유발하고, 이를 이용하여 반경 r_o로 접촉되어 있는 출력디스크의 회전이 이루어져 출력축으로 동력이 전달되게 된다. 이때, 구체의 중심과 편심되어 있는 베리에이터의 회전중심 위치를 변화시키면(θ의 변화) 구체의 회전축이 변화하여 입력 디스크와 출력 디스크의

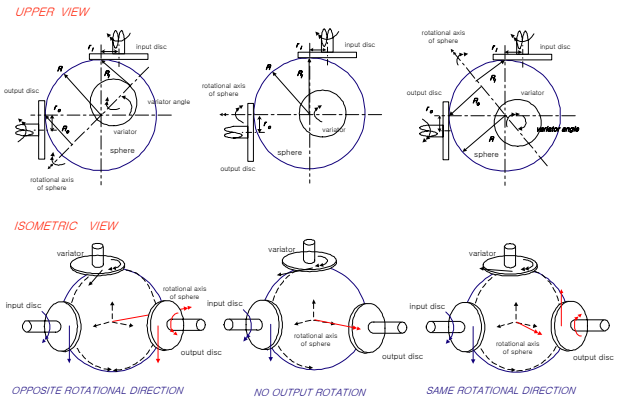


Fig. 3 Operating principle of the S-CVT

접촉점에서 구체의 회전축까지의 거리(R_i, R_o)가 변하게 되어 입,출력축의 속도비와 토크비가 무단으로 변화하게 된다.

Fig. 3에서 나타난 구체무단변속기의 작동원리를 통하여 속도비관계식을 유도하면 식(1)과 같다.

$$r_i\omega_i = \omega R\cos\theta,\ r_o\omega_o = \omega R\sin\theta$$

$$\omega_o = \frac{r_i}{r_o}\omega_i\tan\theta \tag{1}$$

여기서 θ는 베리에이터의 각도변화량, ω는 구체의 회전각속도, $\omega_{i,o}$는 입출력축의 각속도, $r_{i,o}$는 입출력측의 접촉반경을 나타낸다. 입/출력디스크와 구체의 각 접촉점에서 전달되는 동력의 실제 크기는 구체와 디스크간의 접촉점에서 작용하는 전단력으로 결정되며, 내구도와 수명예측을 위해서는 접촉부에 작용하는 전단응력의 크기에 대한 고찰이 필요함을 알 수 있다.

3. Hertzian 접촉 해석

일반적으로 접촉하고 있는 두 물체의 탄성변형량과 압력분포에 대한 분석은 Hertzian 접촉 해석결과를 이용한다. 본 연구에서는 그 상세한 내용과 유도과정은 생략하고 기본가정과 해석결과를 간단히 나타내었다. Hertzian 접촉이론에서 사용하는 기본가정은 다음과 같다.

① 재질은 균질 등방성 탄성체이며, 양물체 모두 탄성역에 있다(소성변형 없음).

② 접촉면에는 수직 하중만 작용한다.

③ 접촉면의 조도는 무시한다.

④ 접촉 타원의 크기는 물체의 곡률반경에 비해 매우 작다.

⑤ 접촉하는 두 물체는 정지하여 평형상태에 있다.

3.1 접촉부의 변형 및 수직압력분포

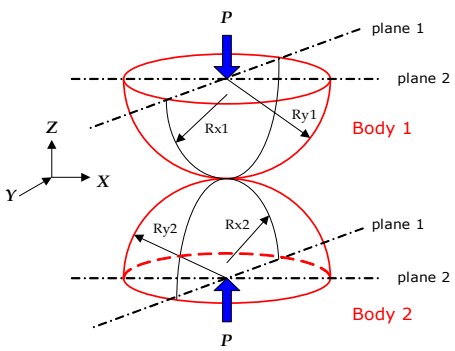


Fig. 4 Schematic view of contact curvature

Fig. 4와 같이 접촉하는 두 물체를 1, 2로 하고 각각의 주 곡률 반경을 R_{x1}, R_{y1}, R_{x2}, R_{y2}, 탄성계수와 프와송 비를 E_1, E_2, υ_1, υ_2 라고 하면, 등가 곡률반경(R)과 등가 탄성계수(E)는 다음과 같다.

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}},\ \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{y2}} \tag{2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \tag{3}$$

$$\frac{2}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{4}$$

수직하중 P가 작용하는 두 물체의 접촉부는 장축의 길이가 a, 단축의 길이가 b인 타원 형상을 지닌다. 수직하중(P)와 접촉부의 형상(a, b), 탄성변형량(d_x, d_y)의 관계를 수식으로 나타내면 식(5),(6)과 같다.

$$a = 1.109\times\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{R_{y1}R_{y2}}{R_{y1}+R_{y2}}},\ b = 1.109\times\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{R_{x1}R_{x2}}{R_{x1}+R_{x2}}} \tag{5}$$

$$d_x = 2.64\times\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\cdot\frac{R_{x1}+R_{x2}}{R_{x1}R_{x2}}},\ d_y = 2.64\times\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\cdot\frac{R_{y1}+R_{y2}}{R_{y1}R_{y2}}} \tag{6}$$

또한 접촉부에 발생하는 압력분포는 식(7)과 같이 표시된다. 여기서 최대 압력인 p_o는 접촉부 국부좌표계의 원점에서 발생한다.

$$p(x,y) = p_0\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

3.2 구체무단변속기의 변형 및 압력분포

구체무단변속기에서 접촉하는 두 물체는 구체와 디스크이므로 Hertzian 해석식(2)~(6)을 적용하면 접촉부는 원형의 변형과 응력분포가 나타난다. 이때 접촉부의 반경(c)과 수직변형량(δ)은 식(8)과 같이 계산되며, 접촉부에 작용하는 평균압력 p_{mean}은 수직하중을 접촉부면적으로 나눈 값이므로 식(9)와 같다.

$$c = 1.109\times\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot R},\quad \delta = 2.64\times\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\cdot\frac{1}{R}} \tag{8}$$

$$p_{mean} = \frac{P}{\pi\cdot c^2} = \frac{1}{1.23\pi}\sqrt[3]{\frac{PE^2}{R^2}} \tag{9}$$

식(8)과 (9)를 이용하여 구체무단변속기의 구체 반경을 30mm, 재질을 베어링강(steel)으로 하였을 때 접촉부 반경은 0.27mm, 수직변형량은 0.017mm, 이며 평균면압은 43.6MPa로 나타난다.

구체와 디스크의 접촉부에서 슬립이 발생하지 않고 전달할 수 있는 최대전단응력은 수직응력에 마찰계수를 곱한 값보다 클 수 없다. 따라서 보통 강철과 강철 사이의 마찰계수가 약 0.1 근처임을 고려할 때, 전단응력의 평균값은 약 4.4MPa 이하로 예측할 수 있다.

4. 유한요소 해석

앞서 살펴본 Hertzian해석 결과는 접촉하고 있는 두 개의 물체에 수직하중이 작용할 때 접촉면에 나타나는 탄성변형량과 응력상태에 대한 이론적 해석해를 제시하고 있다. 하지만 동력을 전달하는 마찰전동장치의 경우 접촉부에 수직하중과 더불어 접선방향으로 동력전달을 위한 전단력이 작용하므로 이에 대한 고려가 필요하다. 이를 위하여 Fig. 5와 같이 유한요소 모델링을 수행하였다.

유한요소 모델링에서 접촉부에 전단력이 작용할 때 디스크의 평면모델링은 접촉부의 미끄러짐이 발생하여 하중분포를 살펴볼 수가 없었다. 이에 디스크의 접촉부 중앙 반경 0.15mm의 원형부에 0.05mm의 가상의 곡률을 디스크의 깊이방향으로 인가하여 해석을 수행하였다. 해석은 먼저 수직하중만 작용한 경우에 대하여 구체무단변속기의 접촉부에 작용하는 수직응력과 전단응력을 살펴보고, 이를 Hertzian 결과와 비교하였으며, 이를 바탕으로 최대정지마찰력을 초과한 전단력이 작용할 때의 각 응력값을 계산하였다. 본 연구에서 사용한 FEM 해석 소프트웨어는 ANSYS이고 모델링에 사용한 요소와 절점의 개수, 재질, 경계조건 등은 Table 1과 같다.

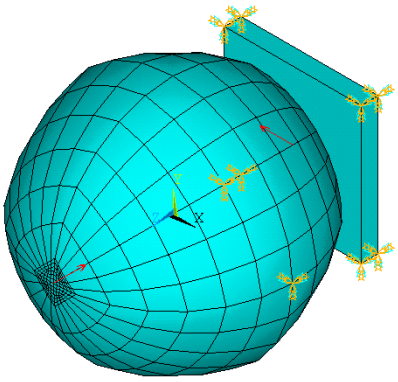


Fig. 5 FEM modeling

Table 1 Simulation conditions

No. of nodes		4102
No. of elements		2760
Material		steel
Boundary Condition	sphere	x, y displacement=0
	disc	x, y, z displacement=0

4.1 수직항력만을 인가한 경우

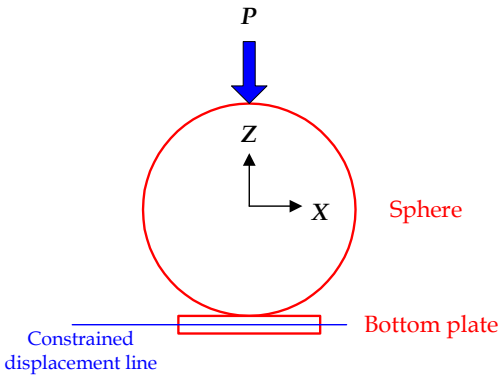
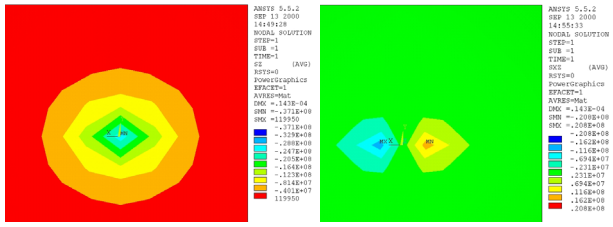


Fig. 6 Force condition of case 1

먼저, Fig. 6과 같이 구체의 상단 점에서 10N의 수직항력만을 인가하는 경우에 대해 유한요소해석을 수행하였다. Fig. 7의 (a)는 이에 대한 해석결과로 접촉부에 작용하는 수직응력을 나타낸 것으로 타원형의 분포를 나타내고 있다. 접촉부 타원의 장축반경은 약 0.25mm, 최대 수직응력은 약 40.1MPa으로 계산되었다.



(a) normal stress (b) shear stress

Fig. 7 FEM result of case 1

또한, 수직하중에 의한 구체의 최대 탄성 변형량은 약 0.0153*mm*로 계산되었으며 타원형상으로 균일하게 분포됨을 알 수 있다. Fig.7의 (b)는 접촉부에서 발생하는 X방향의 전단응력을 표시한 것으로, 최대 전단응력은 약 1.6MPa 으로 나타났다. 전단응력의 분포는 그림에서 알 수 있듯이 X축을 중심으로 고르게 분포되어 있음을 알 수 있다.

해석결과에서 접촉부의 응력분포가 원형이 아닌 타원으로 나타난 것은 앞에서 설명한 바와 같이 유한요소해석을 위하여 디스크의 접촉부 모델링에 가상의 곡률을 이용하였기 때문이다. 하지만 타원의 장축반경이 0.25mm이고 단축반경이 0.23mm로 계산되어 그 반경비가 92%로 원에 가까운 값을 나타내고 있으므로 Hertzian 이론해인 0.27mm 반경의 원형 응력분포와 근사하다고 판단할 수 있다.

Table 2 Hertzian analysis result

	Hertzian 이론해	유한요소 해석결과
접촉부 반경	0.27 mm	0.25 mm
수직변형량	0.017 mm	0.0153 mm
접촉부 압력	43.6 MPa	40.1 MPa

4.2 수직항력과 전단력을 인가한 경우

이번에는 Fig. 8과 같이 구체의 상단 점에 10N의 수직항력을 인가하고 구체와 디스크사이에 최대정지 마찰계수 0.1을 가정하고 접촉면에 2N의 접선방향 힘을 인가하여 미끄러짐이 발생할 경우에 대한 해석을 수행하였다.

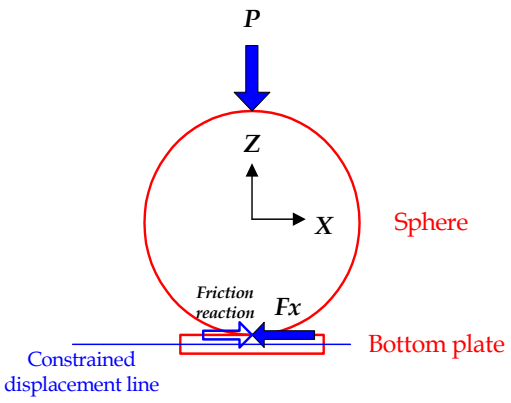


Fig. 8 Force condition of case 2

Fig. 9는 FEM 해석 결과 중 접촉부에 미끄러짐이 발생하여 초기상태에 비하여 접촉부의 지역좌표계(local coordinate)의 원점이 이동한 결과를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 구체는 X, Y축을 기준으로 회전이 이루어졌으며, 이중 X축을 중심으로 한 회전은 수치해석상의 오차로 판단된다. 미끄러짐은 -X방향으로 약 0.3mm 발생하였다.

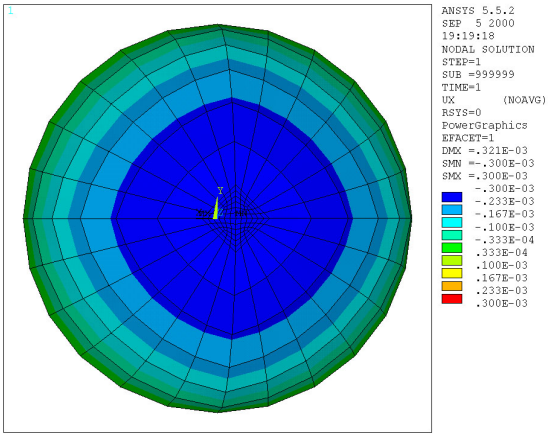
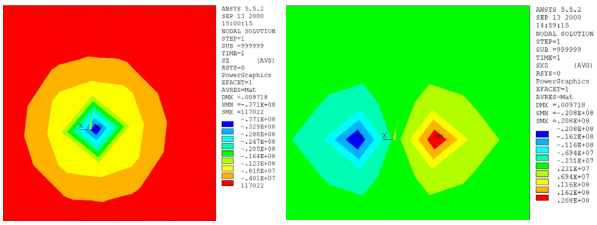


Fig. 9 Dislocation of contact center

Fig. 10의 (a)는 이때의 수직 응력을 나타낸 것으로 수직항력만 인가한 경우에 비하여 전체적인 분포가 타원형상에서 원형으로 변화한 것을 알 수 있다. 이는 접촉점에 인가한 전단력 때문으로 판단된다. 최대 수직 응력의 값은 수직항력만 인가한 경우와 거의 변화가 없는 것으로 계산되었다. 또한 수직 응력의 분포중심이 -X방향으로 이동한 것을 알 수 있다. 이는 마찰력에 의해 구체에 Y축 방향으로 모멘트가 작용하기 때문에 이에 대한 반력으로 수직 응력의 작용점이 이동한 것으로 분석된다.



(a) normal stress (b) shear stress

Fig. 10 FEM result of case 2

Fig. 10의 (b)는 접촉부에서 발생하는 X방향의 전단응력을 표시한 것으로, 최대 전단응력은 약 2.1MPa로 나타났다. 전단응력의 분포는 그림에서 알 수 있듯이 X축을 중심으로 고르게 분포되어 있음을 알 수 있다. 따라서 전단응력의 분포양상은 수직항력만 인가한 경우와 거의 유사한 결과를 나타내고, 최대 전단응력의 크기만 변화하였음을 알 수 있다.

4.3 동력전달로 인한 전단력의 영향

앞서 수행한 Hertzian 이론식의 결과와 유한요소해석을 수행한 결과를 비교하여 정리하면 Table 3과 같다.

Table 3 Comparison of analysis result

	Hertzian 해석결과	전단력 0 N	전단력 2 N
수직응력의 최대값(MPa)	43.6	40.1	37.5
수직변형량의 최대값(mm)	0.017	0.0153	0.015
전단응력의 최대값(MPa)	-	1.6	2.1
접촉부 중심의 미끄러짐(mm)	0	0	-0.3

또한 구체와 디스크에 작용하는 전단력의 증가에 따른 접촉부의 응력분포를 고찰하기 위하여 전단력을 최대정지마찰력인 1N에서 미끄러짐을 발생시키는 2N 까지 0.2N 씩 증가시켜 위 4.2절의 해석과 같은 방법으로 FEM 해석을 반복하여 수행하였다. 각 해석에서 나타난 접촉중심의 Y축의 회전으로 인한 -X방향 변위와 수직응력과 전단응력의 최대값을 그래프로 표시하면 Fig. 11과 같다.

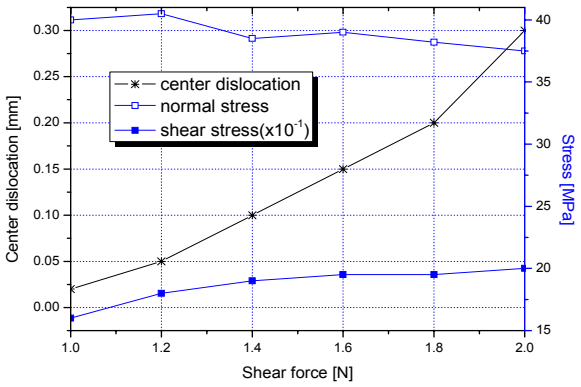


Fig. 11 Effect of shear force

Fig. 11에서 수직응력의 크기는 동력전달로 인한 전단력의 작용에 대해 그 영향이 작음을 알 수 있다. 또한 수치해석 결과 접촉면의 최대전단응력의 최대다 수직응력에 대한 비가 4%에서 6%로 증가함을 알 수 있었다. 이는 마찰전동장치의 동력전달 접촉부에 슬립이 발생할 때 최대수직응력 대비 최대전단응력의 크기가 커짐을 알 수 있다.

5. 결 론

1) 마찰전동장치의 동력전달부에 작용하는 수직응력과 전단응력의 크기와 분포를 분석하기 위해 구체무단변속기를 대상으로 Hertzian 해석과 유한요소해석을 수행하였다.

2) ANSYS를 이용한 유한요소 해석결과 구체무단변속기와 같이 구체와 디스크가 접촉하는 경우 수직항력만 인가하였을 때와는 달리 접촉부에 동력전달로 인한 전단력이 작용할 경우 전단응력의 분포는 접선방향을 중심으로 고르게 분포됨을 알 수 있었다.

3) 유한요소해석 결과로 계산된 최대 수직응력과 전단응력은 Hertzian 해석결과에 비하여 작은 값을 나타내고 있다. 이는 Hertzian 이론식에서 고려되지 않은 전단응력이 유한요소해석 결과 나타나기 때문으로 판단된다.

4) 수직응력의 크기는 동력전달로 인한 전단력의 작용에 대해 그 영향이 작음을 알 수 있다. 따라서, 마찰전동장치의 설계에서 수직응력은 Hertzian 해석식을 이용하여 계산할 수 있으나, 기계요소의 항복강도(yield strength)를 파악하기 위해서는 접촉부의 전단응력을 고려하여야 함을 알 수 있다.

5) 유한요소해석 결과를 바탕으로 마찰전동장치의 동력전달에서 접선방향의 전단력이 최대정지마찰력 이상 작용하여 슬립이 발생하는 경우에는 최대수직응력 대비 최대전단응력의 크기가 커지므로 Hertzian 해석결과에서 나타나지 않는 전단응력의 영향이 나타남을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 2005학년도 대구가톨릭대학교 연구비 지원에 의한 것임을 밝힙니다.

참고 문헌

1. N. Moronuki and Y. Furukawa, 1988, “On the Design of Precise Feed Mechanism by Friction Drive,” Journal of the Japan Society for Precision Engineering, Vol. 11, pp. 2113~2118.
2. K. Kato, 1990, “Fundamentals and Applications of Friction Drive,” Journal of the Japan Society for Precision Engineering, Vol. 9, pp. 1602~1606.
3. H. S. Lee and M. Tomizuk를a, 1996, “Robust Motion Controller Design for High-Accuracy Positioning Systems,” Transactions on Industrial Electronics, Vol. 43, No. 1, pp. 48~55.
4. W. S. Chang and K. Y. Toumi, 1998, “Modeling of an Omni-Directional High Precision Friction Drive

Positioning Stage," Proc. of Inter. Conf. on Robotics and Automation, pp. 175~180.
5. M. K. Kurosawa, M. Takahashi, and T. Higuchi, 1998, "Elastic Contact Conditions to Optimize Friction Drive of Surface Acoustic Wave Motor," Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 45, No. 5, pp. 1229~1237.
6. U.S. Department of Energy, 1982, Advanced Automotive Transmission Development Status and Research Needs, DOE/CS/50286-1.
7. J. Kim, F.C. Park, Y.I. Park, and M. Shizou, 2002, "Design and Analysis of a Spherical CVT," ASME, Vol. 124.
8. J. Kim and K.H. Choi, 2003, "Spin Loss Analysis of Friction Drives: Spherical and Semi-Spherical CVT," Intl. Journal of Automotive Technology, Vol. 4, No. 4