

## 論文

## 비정상 열 하중을 받는 이질재료의 열량 집중 계수 해석

김 귀 섭\*

Thermal flow intensity factor for non-homogeneous material  
subjected to unsteady thermal load

Kui-Seob, Kim\*

## ABSTRACT

This article provides a comprehensive treatment of cracks in non-homogeneous structural materials such as functionally graded materials (FGMs). It is assumed that the material properties depend only on the coordinate perpendicular to the crack surfaces and vary continuously along the crack faces. By using laminated composite plate model to simulate the material non-homogeneity, we present an algorithm for solving the system based on Laplace transform and Fourier transform techniques. Unlike earlier studies that considered certain assumed property distributions and a single crack problem, the current investigation studies multiple crack problem in the FGMs with arbitrarily varying material properties. As a numerical illustration, transient thermal flow intensity factors for a metal-ceramic joint specimen with a functionally graded interlayer subjected to sudden heating on its boundary are presented. The results obtained demonstrate that the present model is an efficient tool in the fracture analysis of non-homogeneous material with properties varying in the thickness direction.

**Key Words :** Functionally graded materials(경사기능재료), Multiple crack problem(다중  
크랙 문제), Transient thermal flow intensity factors(비정상 열량 집중계수)

## I. 서 론

최근, 심각한 열 하중을 받는 구조물의 구성품은 강력한 열응력을 발생시킨다. 이러한 구성품과 구조물들은 매우 높은 온도 또는 주기적으로 변화하는 매우 높은 온도의 열하중을 받는다. 그러한 온도 조건하에서 새로운 재료의 설계는 적절히 조성분포를 변화시키거나 매개체의 미세조직을 변화시킴으로서 달성될 수 있다. 이러한 분야의 연구는 경사기능재료 (Functionally Graded Materials)의 출현 또는 소개를 통해 진행되어 왔다. 보통 경사기능재료는 세라믹과 금속합

금과 같이 2개의 서로 다른 재료들로 구성되며, 두께방향에 있어 조성분포는 연속적으로 변화된다. 경사기능재료의 개발은 경사기능재료가 잔류응력과 열응력의 크기를 감소시킬 수 있는 잠재력을 갖고 있음을 보여주었다(Saito and Takahashi, 1990)[1].

경사기능재료를 여러 가지 공학분야에 적용하는데 필요로 되는 중요한 관점은 일반적으로 신뢰성과 내구성에 대한 문제이다. Jin과 Noda (1993a, 1993b)[2, 3], Noda와 Jin (1993a, 1993b)[4, 5]은 경계층에 평행한 내부에 크래이 존재하는 경사기능재료로 만들어진 반-무한 평판의 정상 열응력 집중계수를 연구하였다. Noda와 Jin (1994)[6], Jin과 Noda (1994a, b)[7, 8]는 경계층에 평행한 내부의 크래과 가장자리 크래이 존재하는 경사기능재료로 만들어진 반-무한 평판의

† 2008년10월30일 접수 ~ 2008년12월22일 심사완료

\* 인하공업전문대학 항공기계과 교수

연락처자, E-mail : kuisseob@inhahtc.ac.kr

인천시 남구 용현동 253

비정상 열응력 집중계수를 연구하였다. 그들은 재료의 물성치가 지수형태로 변화한다고 가정하였다. 재료의 이질 재료 특성을 규정하는 매개변수에 대한 적절한 선택이 열응력 또는 열응력 집중계수를 감소시킨다고 그들은 결론지었다.

경사기능재료가 경계면에 매우 높은 온도의 열 하중을 받을 때, 크랙이 매우 높은 온도에 노출되어 있는 재료의 경계면에서 발생할 수 있다. Erdogan과 Wu(1996)[9]는 경계면에 수직인 수직 크랙이 있는 경사기능재료에 있어 정상상태의 열응력 집중계수를 연구하였다. Nemat-Alla과 Noda(1996)[10]는 열 하중을 받는 반-무한 경사기능재료 평판에 있어 크랙문제를 생각하였다. Jin과 Batra (1996a)[11]는 크랙이 있는 경계면이 있어 갑작스런 냉각으로 인한 경사기능재료의 가장자리 크랙에 대한 비정상 열응력 집중계수를 연구하였다. 재료의 전단계수와 열전도 계수가 각각 쌍곡선함수와 지수 함수형식으로 변화되도록 선택되었다. 가열과 냉각과 같이 주기적인 열하중을 받는 세라믹경계면 가장자리에 크랙이 있는 경사기능재료 판에 있어 비정상 열응력 집중계수에 대한 연구는 Noda(1997)[12]에 의해 재고되었다.

크랙 문제들은 이해 가능한 해석적인 방법에 순응하지 않으며, 주로 복잡성과 어려움이 내포되어 있으므로 인해 이상적인 경우와 거리가 있다. 임의로 재료의 물성치가 변화하는 재료에 존재하는 크랙의 비정상 상태 반응에 연구의 초점이 맞추어졌다. 특히 이러한 문제들은 사실일 것이다. 이전의 대부분의 연구는 무한 영역을 가지는 형상, 하나의 크랙 그리고 가정된 재료의 물성치로 제한되었다. 그러나 참고문헌에 있는 가정된 물성치들은 어떤 재료의 혼합에 대한 신뢰성이 물리적으로 없기 때문에 주의해서 사용되어야 한다(Zuiker, 1995)[13].

경사기능재료는 매우 높은 온도의 열 하중을 받을 때, 재료의 물성치가 그 온도에 종속관계가 있으나, 이러한 영향은 현재 연구의 관점을 벗어나고 있다. 본 연구의 목적은 임의로 재료의 물성치가 변화하는 이질재료에 대한 다중 크랙의 문제를 비정상상태에서 연구 검토하는 것이다. 재료의 이질성을 대신하기 위해 복합 적층판 이론을 이용하고, 라플라스 변환과 풀리어 변환에 근거하여 지배방정식을 해결하는 알고리즘을 제시하고자 한다. 임의로 재료의 물성치가 변화하는 경사기능재료에 있어 다중 크랙문제에 대한 특이 적분방정식(singular integral equation)이 유도되고 해석되었다.

열 하중 하에서 경사기능재료로 금속과 세라믹으로 구성된 시편에 대한 수치예제들이 제공된다. 비정상상태에 대한 열량 집중 계수(thermal flow intensity factors)가 계산되며, 경사기능재료의 물성치 변화에 대한 열량 집중 계수의 변화가 연구되었다. 본 연구의 모델이 두께방향으로 재료의 물성치가 변화하는 경사기능재료의 파괴해석에 적용할 수 있는 유용한 도구임을 얻어진 결과는 보여주고 있다.

## II. 문제의 해석

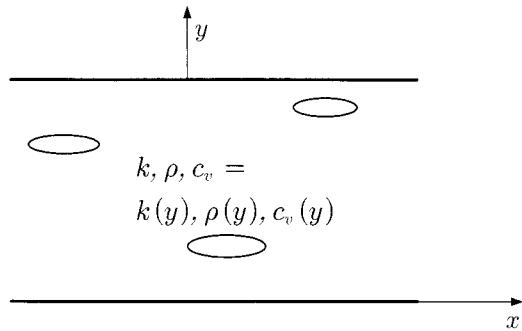


Fig 1. Geometry and coordinates of a non-homogeneous material plate

Fig 1과 같이 좌표  $y$ 의 함수로서 변화하는 물성치를 지닌 두께  $h$ 의 균열이 있는 이질재료 판에 대해 생각한다. 여기서  $k$ 는 열전도 계수,  $c_v$ 는 비열 그리고  $\rho$ 는 밀도이다. 이질재료 판은  $x$ 방향으로는 무한대이며,  $(x, y)$ 는 전체 좌표계이다.  $y$ 방향으로 재료의 이질성을 나타내기 위해 탄성판의 두께를 무한 길이의 많은 층( $N$ )으로 나눈다. 크랙은 판의 두께에 수직이며, 크랙은 2층 사이의 경계면에 있는 것으로 가정한다. 재료의 물성치는 각 층에 있어 상수가 된다고 가정한다. 해석적인 모델은 Fig 2-3.에 주어진다.  $J$ 번째 층에 대한 두께는  $h_j$ 이며, 이 논문에 있어 첨자  $J$ 는 아래층부터  $J$ 번째 층을 나타내며, 첨자  $j$ 는  $J$ 번째 층과  $J+1$ 번째 층사이의 경계면 숫자를 나타낸다. 좌표  $y_j$ 는  $J$ 번째 층의 밑면에서 측정된 좌표이다.

총사이의 경계면에 있어 열량 ( $q_y$ )은  $q_j(x, t)$ 로 나타낸다. 크랙 길이는  $2a_j$ ,  $x_j = c_j$ 에 크랙 중심이 위치한다. 초기온도는 0이며, 열량과 온도는 무한대에서 0이며, 경계조건은 다음과 같다.

(1) 크랙 면은 완전 절연된다. 즉  $q_j = 0$ .

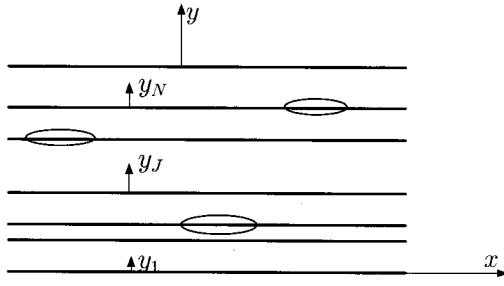


Fig. 2. Analytical model of the non-homogeneous material plate

(2) 이질재료 판의 하부 표면과 상부 표면에 작용된 열량은 각각  $q_{oo}$ 과  $q_{oN}$ 이다. 이질재료 판의 하부 표면과 상부 표면에 작용된 온도는 각각  $T_{oo}$ 와  $T_{oN}$ 이다.

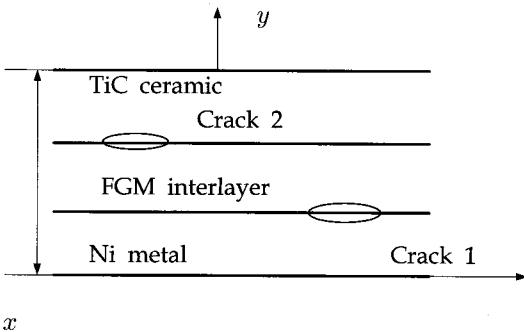


Fig. 3. A Metal -Ceramic joint with functionally graded interlayer

직교성 재료에 대한 각 층의 열량은 다음과 같다.

$$(q_x)_J = -(k_x)_J \partial T_J / \partial x$$

$$(q_y)_J = -(k_y)_J \partial T_J / \partial y \quad (1)$$

온도는 변형에 종속되지 않는다고 가정하면, 각 층에 대한 열전도방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(k_x)_J \partial^2 T_J / \partial^2 x + (k_y)_J \partial^2 T_J / \partial^2 y =$$

$$\rho_J (c_v)_J \partial T_J / \partial t \quad (2)$$

## 2.1 온도장 해석

무차원 변수  $\bar{x} = x/h$ ,  $\bar{y}_J = y_J/h$ ,

$$\bar{h}_J = h_J/h, \quad \bar{a}_j = a_j/h, \quad \bar{c}_{jJ} = c_j/h,$$

$$k_j = 2/(1/\sqrt{(k_x k_y)_J} + 1/\sqrt{(k_x k_y)_{J+1}}) \text{ 와}$$

$t_{oJ} = h^2 \rho_J (c_v)_J / (k_y)_J$ 을 도입한다. 시간  $t$ 에 대한 라플라스 변환(Laplace transform)을 적용하고, 공간좌표  $x$ 에 풀리어 변환(Fourier transform)을 적용하면, 방정식(2)는 무한 판의 각 층에 대한 온도를 구할 수 있는 다음과 같은 식이 된다.

$$T_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_{0J} e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J} + B_{0J} e^{|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J}] e^{-is\bar{x}} ds \quad (3)$$

여기서 위첨자 \*는 라플라스 변환을 의미하며,  $A_{0J}(s, p)$ 과  $B_{0J}(s, p)$ 는 결정해야 할 변수들이며,

$$\lambda_{0J} = \sqrt{(k_x)_J / (k_y)_J + pt_{0J}/s^2} \quad (4)$$

식(3)을 식(1)에 대입하면  $\bar{y}_J = \bar{h}_J$ 에서 열량  $q_j^*$ 과  $\bar{y}_J = 0$ 에서 열량  $q_{j-1}^*$ 을 얻는다. 역 풀리어 변환을 적용하여  $A_{0J}(s, p)$ 과  $B_{0J}(s, p)$ 을  $q_j^*$ 과  $q_{j-1}^*$ 로 쓸 수 있다. 그러므로 각 층의 온도분포는  $A_{0J}(s, p)$ 과  $B_{0J}(s, p)$ 을 식(3)에 다시 대입해서  $q_j^*$ 과  $q_{j-1}^*$ 의 형식으로 식(3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_J^*(\bar{x}, \bar{y}_J, p) = -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{x}} \frac{R_J(s, p)}{s} ds$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J} + e^{|s| \lambda_{0J} \bar{y}_J}) q_j^*(\bar{r}, p) -$$

$$(e^{-|s| \lambda_{0J} (\bar{h}_J - \bar{y}_J)} + e^{|s| \lambda_{0J} (\bar{h}_J - \bar{y}_J)}) q_{j-1}^*(\bar{r}, p)] e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad (5)$$

여기서

$$R_J(s, p) = \frac{sgn(s)}{(k_y)_J \lambda_{0J} (e^{|s| \lambda_{0J} \bar{h}_J} - e^{-|s| \lambda_{0J} \bar{h}_J})} \quad (6)$$

만약 판의 하부 면의 온도가 주어진다면, 첫 번째 층에 대한 온도분포는 다음과 같이  $T_{00}^*$ 과  $q_1^*(\bar{x}, p)$ 에 의해 쓸 수 있다.

$$T_1^*(\bar{x}, \bar{y}_1, p) = -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{x}} \frac{R_1(s, p)}{s} ds$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(e^{|s| \lambda_{01} \bar{y}_1} - e^{-|s| \lambda_{01} \bar{y}_1}) q_1^*(\bar{r}, p) -$$

$$k_j = 2/(1/\sqrt{(k_x k_y)_J} + 1/\sqrt{(k_x k_y)_{J+1}}) \text{ 와}$$

$$\frac{sgn(s)(k_y)_1 s \lambda_{01}}{h} (e^{-|s| \lambda_{01}(\bar{h}_1 - \bar{y}_1)} + e^{|s| \lambda_{01}(\bar{h}_1 - \bar{y}_1)}) T_{00}^*(\bar{r}, p) ] e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad (7)$$

여기서

$$R_1(s, p) = \frac{sgn(s)}{(k_y)_1 \lambda_{01} (e^{|s| \lambda_{01} \bar{h}_1} + e^{-|s| \lambda_{01} \bar{h}_1})} \quad (8)$$

만약 판의 상부 면의 온도가 주어진다면,  $N$ 번 째 층에 대한 온도분포는 다음과 같이  $q_{N-1}^*(\bar{x}, p)$ 과  $T_{0N}^*(\bar{x}, p)$ 에 의해 쓸 수 있다.

$$T_N^*(\bar{x}, \bar{y}_N, p) = -\frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{x}} \frac{R_N(s, p)}{s} ds \\ \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{sgn(s)(k_y)_N s \lambda_{0N}}{h} \{ (e^{-|s| \lambda_{0N} \bar{y}_N} + e^{|s| \lambda_{0N} \bar{y}_N}) T_{0N}^*(\bar{r}, p) + (e^{-|s| \lambda_{0N}(\bar{h}_N - \bar{y}_N)} - e^{|s| \lambda_{0N}(\bar{h}_N - \bar{y}_N)}) q_{N-1}^*(\bar{r}, p) \} e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad (9)$$

여기서

$$R_N(s, p) = \frac{sgn(s)}{(k_y)_N \lambda_{0N} (e^{|s| \lambda_{0N} \bar{h}_N} + e^{-|s| \lambda_{0N} \bar{h}_N})} a \quad (10)$$

지금 크랙에 대한 해석을 하기 위해 다음과 같은 보조방정식을 정의한다.

$$\phi_{0j}(\bar{x}, p) = \partial T_{j+1}^*(\bar{x}, \bar{y}_{j+1} = 0, p) / \partial x \\ - \partial T_j^*(\bar{x}, \bar{y}_j = \bar{h}_j, p) / \partial x \quad (11)$$

식(5)을 식(11)에 대입하면 식(11)의 다음과 같이 된다.

$$\phi_{0j}(\bar{r}, p) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{r}} \int_{-\infty}^{\infty} [L_j q_{j-1}^*(\bar{x}, p) + M_j q_j^*(\bar{x}, p) + N_j q_{j+1}^*(\bar{x}, p)] e^{is\bar{x}} d\bar{x} \quad (12)$$

여기서

$$L_j(s, p) = -2R_j(s, p) \quad (13)$$

$$N_j(s, p) = -2R_{j+1}(s, p) \quad (14)$$

$$M_j(s, p) = \{ e^{|s| \lambda_{0(j-1)} \bar{h}_{j-1}} + e^{-|s| \lambda_{0(j+1)} \bar{h}_{j+1}} \} R_{j+1}(s, p) + \{ e^{|s| \lambda_{0j} \bar{h}_j} + e^{-|s| \lambda_{0j} \bar{h}_j} \} R_j(s, p) \quad (15)$$

만약  $T_1^*(\bar{x}, \bar{y}_N, p)$ 의 식(7)로 표현된다면,  $\phi_{01}(\bar{r}, p)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_{01}(\bar{r}, p) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ L_1 \frac{sgn(s)(k_y)_1 s \lambda_{01}}{h} T_{00}^*(\bar{x}, p) + M_1 q_1^*(\bar{x}, p) + N_1 q_2^*(\bar{x}, p) \right] e^{is\bar{x}} d\bar{x} \quad (16)$$

여기서

$$L_1(s, p) = -2R_1(s, p) \quad (17)$$

$$N_1(s, p) = -2R_2(s, p) \quad (18)$$

$$M_1(s, p) = \{ e^{|s| \lambda_{02} \bar{h}_2} + e^{-|s| \lambda_{02} \bar{h}_2} \} R_2(s, p) + \{ e^{|s| \lambda_{01} \bar{h}_1} - e^{-|s| \lambda_{01} \bar{h}_1} \} R_1(s, p) \quad (19)$$

만약  $T_N^*(\bar{x}, \bar{y}_N, p)$ 의 식(9)와 같이 쓸 수 있다면,  $\phi_{0(N-1)}(\bar{r}, p)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_{0(N-1)}(\bar{r}, p) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\bar{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ L_{N-1} q_{N-2}^*(\bar{x}, p) + M_{N-1} q_{N-1}^*(\bar{x}, p) + N_{N-1} \frac{sgn(s)(k_y)_N s \lambda_{0N}}{h} T_{0N}^*(\bar{x}, p) \right] e^{is\bar{x}} d\bar{x} \quad (20)$$

여기서

$$L_{N-1}(s, p) = -2R_{N-1}(s, p) \quad (21)$$

$$N_{N-1}(s, p) = -2R_N(s, p) \quad (22)$$

$$M_{N-1}(s, p) = \{ e^{|s| \lambda_{0N} \bar{h}_N} - e^{-|s| \lambda_{0N} \bar{h}_N} \} R_N(s, p) + \{ e^{|s| \lambda_{0(N-1)} \bar{h}_{(N-1)}} + e^{-|s| \lambda_{0(N-1)} \bar{h}_{(N-1)}} \} R_{(N-1)}(s, p) \quad (23)$$

다음과 같이 ( $N-1$ ) 행의 두개의 벡터를 정의하고

$$\{Q^*(\bar{x}, p)\} = \{q_1^*(\bar{x}, p), \dots, q_{(N-1)}^*(\bar{x}, p)\}^T \quad (24)$$

$$\{\Phi_0(s, p)\} = \begin{cases} \int_{\bar{c}_1 - \bar{a}_1}^{\bar{c}_1 + \bar{a}_1} \phi_{01}(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r}, \dots, \\ \int_{\bar{c}_{N-1} - \bar{a}_{N-1}}^{\bar{c}_{N-1} + \bar{a}_{N-1}} \phi_{0(N-1)}(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r} \end{cases}^T \quad (25)$$

그리고 식(12)와 식(16)에 역 플리어 변화를 적용하면, 식(20)은 다음과 같이 주어진다.

$$-[D] \int_{-\infty}^{\infty} \{Q^*\} e^{isx} dx = \frac{1}{i} \{\Phi_0\} + \{\Phi_{0a}\} \quad (26)$$

여기서  $[D(s, p)]$ 은 다음과 같은 행렬형식이며,

$$[D] = \begin{bmatrix} M_1 & N_1 & & \\ L_2 & M_2 & N_2 & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{N-2} & N_{N-2} \\ & & & L_{N-1} & M_{N-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

그리고  $\{\Phi_{0a}(s, p)\}$ 는  $(N-1)$  행의 벡터이며, 첫 번째와 마지막 번째 행만이 영(zero)이 아닌 요소를 가지며, 이들 요소들은 경계조건과 관계되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_{0a1}(s, p) = L_1(s, p) \int_{-\infty}^{\infty} q_{00}^*(\bar{r}, p) e^{is\bar{r}} d\bar{r} \quad (28)$$

$$\Phi_{0a(N-1)}(s, p) = N_{N-1}(s, p) \quad (29)$$

식(28)과 식(29)은 상부 또는 하부 면에 열량이 주어진 경우이다.

$$\Phi_{0a1} = L_1(s, p) \frac{\operatorname{sgn}(s) (k_y)_1 s \lambda_{01}}{h} \quad (30)$$

$$\Phi_{0a(N-1)} = N_{N-1}(s, p) \frac{\operatorname{sgn}(s) (k_y)_N s \lambda_{0N}}{h} \quad (31)$$

식(30)과 식(31)은 상부 또는 하부 면에 온도가 주어진 경우이다.

행렬  $[D(s, p)]^{-1}$ 에 있어  $m$  번째 행과  $n$  번째

열을 나타내는 변수  $K_{mn}$ 에 관해서,  $|s| \rightarrow \infty$  되면  $[K(s, p)]$ 에 있어 0(zero)이 아닌 요소들은  $K_{jj}(s \rightarrow \pm \infty, p) = \operatorname{sgn}(s) k_j / 2$  임을  $[D(s, p)]$ 의 표현에서 알 수 있다. 또한  $K'_{jk}(s, p) = K_{jk}(s, p) - K_{jj}(\infty, p)$ 을 정의해서 식(26)에 역 플리어 변화를 적용하면 다음과 같아 된다.

$$\begin{aligned} -q_j^*(\bar{x}, p) - q_{aj}^*(\bar{x}, p) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \\ &\int_{\bar{c}_k - \bar{a}_k}^{\bar{c}_k + \bar{a}_k} \phi_{0k}(\bar{r}, p) d\bar{r} \int_0^\infty K'_{jk} \sin\{s(\bar{r} - \bar{x})\} ds \\ &+ \frac{k_j}{2\pi} \int_{\bar{c}_k - \bar{a}_k}^{\bar{c}_k + \bar{a}_k} \frac{\phi_{0j}(\bar{r}, p)}{\bar{r} - \bar{x}} d\bar{r} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서

$$\begin{aligned} q_{aj}^*(\bar{x}, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (K_{jl} \ K_{j(N-1)}) \\ &\{\Phi_{0a1} \ \Phi_{0a(N-1)}\}^T e^{-is\bar{x}} ds \end{aligned} \quad (33)$$

식(32)는 경계면의 열량과 경계면의 보조방정식 사이에 존재하는 관계를 규정하며, 식(32)에는  $N-1$  개의 방정식이 있다. 크랙이 없는 이들 경계면에 대해서는 보조방정식이 0(zero)이 되므로, 식(32)의 해를 구하기 위해 필요로 되는 방정식의 수는 있어 크랙의 수와 일치한다.

식(32)는 크랙 내부와 외부에 있어  $q_j^*(\bar{x}, p)$ 에 대한 표현을 제공한다. 크랙 내부의 경우에는 지배적인 특이부분(singular part)이 단순 Cauchy-Type Kernel을 가지는 보통 특이부분 방정식(singular integral equation)이다. 크랙-팁(crack-tip)의 거동은 표준 제곱근 특이 함수(standard square-root singular)로 특성화 될 수 있다. 적분방정식은 기본함수가 첫 번째 체비체프 다항식(Chebyshev polynomial)  $T_m(\bar{r}_j)$ 의 가중함수(weight function)와 일치되는 것을 유의하여 수치적으로 해석 될 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_{0j}(\bar{r}_j, \bar{r}_j, p) &= \\ \sum_{m=1}^{\infty} C_{jm}(p) T_m(\bar{r}_j) / \sqrt{1 - \bar{r}_j^2} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서  $\bar{r}_j = (\bar{r} - \bar{c}_j) / \bar{a}_j$ 이고,  $C_{jm}$ 은 계산될 변수이다. 식(34)을 식(11)에 대입한 후,  $M$  항까지 절단하여 계산하면,  $j$  번째 크랙의 하부 면과 상부 면사이의 온도 차는 다음과 같이 계산 될 수 있다.

$$\begin{aligned} T_{j+1}^*(\bar{x}, p) &= -a_j \sum_{n=1}^M C_{jn}(p) \quad |\bar{x}_j| < 1 \\ \sin \left\{ n \cos^{-1}(\bar{x}_j) \right\} / n \end{aligned} \quad (35)$$

여기서  $\bar{x}_j = (\bar{x} - \bar{c}_j) / \bar{a}_j$  이다. 크랙 표면에 대한 열량에 대한 경계조건은  $q_j^*(x, p) = 0$  을 필요로 하며, 이것은 다음과 같은 가중잔여방법 (weighted residuals method)을 이용하여 만족시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [q_{0j}^*(\bar{a}_j \bar{x}_j + \bar{c}_j, p)] \\ \frac{\sin(n \cos^{-1} \bar{x}_j)}{n} d\bar{x}_j = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

그러므로 적분방정식(32)는 미정 변수  $C_{jm}$ 을 계산하기 위한 유한 선형방정식으로 귀착된다. 일단  $C_{jm}$ 이 얻어지면, 적분방정식(32)의 수치 해가 식(34)에서 계산 될 수 있다. 라플라스 영역에서의 온도분포는 식(32)와 식(5)에서 얻을 수 있다.

크랙-팁 열량(crack-tip thermal flow)은 표준 제곱근 특이 함수(standard square-root singular)가 되며, 열량집중계수(thermal flow intensity factor)는 다음과 같이 계산 될 수 있다는 것을 식(32)와 식(34)에서 알 수 있다.

$$\begin{aligned} (K_q^*)_j &= (\sqrt{2 \{(c_j - a_j) - x\}})_{x \rightarrow (c_j - a_j)} q_j^* \\ &= -\frac{k_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_{jm}(p) \end{aligned} \quad (37)$$

왼쪽의 크랙-팁(crack-tip)경우이며, 그리고

$$\begin{aligned} (K_q^*)_j &= (\sqrt{2 \{x - (c_j + a_j)\}})_{x \rightarrow (c_j + a_j)} q_j^* \\ &= \frac{k_j \sqrt{a_j}}{2} \sum_{m=1}^M C_{jm}(p) a \end{aligned} \quad (38)$$

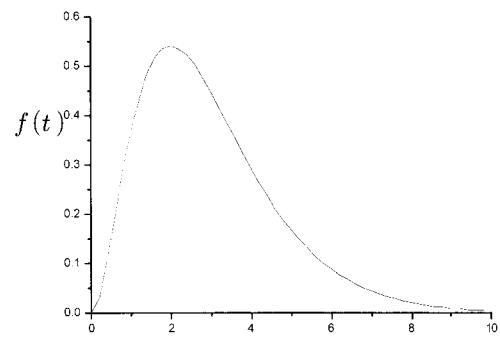
오른쪽의 크랙-팁(crack-tip)경우이다.

라플라스 영역에서 해가 얻어진 후에, Miller 와 Guy (1966)[14]에 의해 주어진 방법을 사용해서 수치적으로 역 라플라스 변환이 수행될 수 있다. 이 방법은 Jin과 Noda(1994)[7, 8]가 열탄성 파괴 동역학에 적용하여 사용하여 왔다.

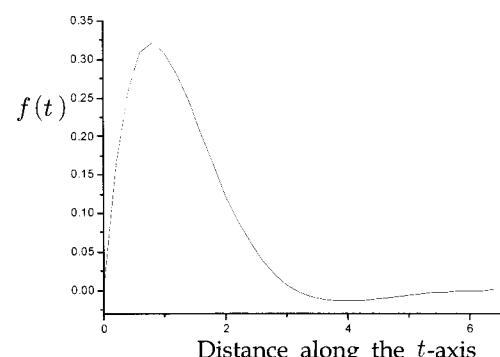
### III. 수치 해석

#### 3.1 역 라플라스 변환의 수치예제

라플라스 영역에서 얻어진 해(Miller와 Guy)[14]를 수치적인 방법으로 역 라플라스 변환을 수행할 수 있으며, 이 방법은 Jin과 Noda(1994)[7, 8]가 열탄성 파괴 동역학에 적용하여 사용하여 왔다. 이 방법에 대한 수치예제로서 다음과 같이 예제들이 수행되었으며, Fig 4.와 Fig 5.에 제시된 바와 같이 최대 오차가  $10^{-4}$ 이내로써 매우 정확한 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다. 물론, 선택해야 될 변수들에 의해 수치계산의 오차에 미치는 영향은 있으나, Miller와 Guy에 의해 제시된 것처럼 아주 미소함을 알 수 있었다.



Distance along the  $t$ -axis  
Fig 4. Approximations for  $f(t) = e^{-t^2}$



Distance along the  $t$ -axis  
Fig 5. Approximations for  $f(t) = e^{-t} \sin(t)$

#### 3.2 열량 집중계수의 수치예제

수치예제를 계산하기 위해 경사기능재료로 구성된 금속/세라믹 시편이 선택되었다. Fig 3.에 기하학적 형상과 좌표계가 나타내었다. 크랙은 판의 두께에 수직으로 존재한다고 가정되었으며, 크랙이 층과 층 사이에 있다. 경사기능재료 판 하부 면의 온도가 0(zero)로 유지되며, 갑자기 상부면에 균일한 온도 변화  $T_0$ 가 작용한다. 경사기능재료는 Ni와 TiC로 구성되며, 재료의 물성치인 밀도, 열전도계수 비열은 각각  $\rho_m = 6825 \text{ kg/m}^3$ ,  $k_m = 54 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $c_m = 595 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$  와  $\rho_c = 4127 \text{ kg/m}^3$ ,  $k_c = 27 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $c_c = 682 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ 이며,  $m$ 은 금속과  $c$ 는 세라믹을 나타낸다. 경사기능재료 판의 하부 면은 순수 금속이며 상부 면은 순수 세라믹이다. 금속의 체적비는  $y$ 의 함수로서  $V_m(y) = (y/h_g)^g$ 의 형식으로 power-law type relation을 따르며,  $g$ 는 기울기 지수로서 알려져 있다. 그림에 있어 무차원 열량 집중계수  $\bar{K}_q = K_q / (k_m T_0 \sqrt{a}/h)$ 이며, 무차원 시간  $\bar{t} = t / (h^2 \rho_m c_m / k_m)$ 이다.

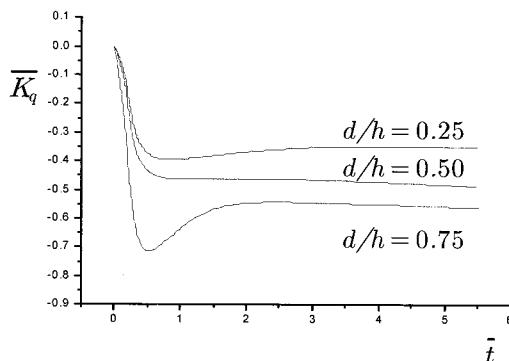


Fig 6. Thermal flux intensity factor with time at a fixed gradient exponent  $g = 1$

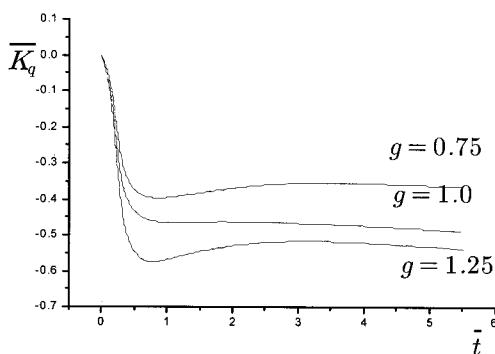


Fig 7. Thermal flux intensity factor with time at a crack position  $d/h = 0.5$

크랙이 1개인 경우로서 고정된 기울기 지수  $g = 1$ 에 있어, 크랙의 위치  $d/h$ 가 열량 집중계수에 미치는 영향을 Fig 6.에 나타내었다. 크랙이 1개인 경우로서 고정된 크랙의 위치에서, 기울기 지수  $g$ 의 값이 열량 집중계수에 미치는 영향을 Fig 7.에 나타내었다. Fig 6-7.에서 보는 바와 같이  $d/h$ 의 값과  $g$ 의 값이 증가함에 따라 열량 집중계수는 시간의 증가에 따른 수렴이 빨라지며, 크기는 감소함을 보여주고 있다.

크랙이 2개인 경우로서 고정된 크랙의 위치에서, 기울기 지수  $g$ 의 값이 열량 집중계수에 미치는 영향을 Fig 8-9.에 나타내었으며, 크랙이 1개인 경우와 같은 경향을 보여주고 있음을 알 수 있다.

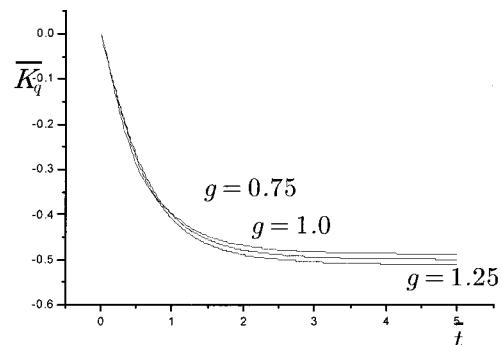


Fig 8. The thermal flux intensity factor of first crack position  $d/h = 0.5$  with time in case of two cracks

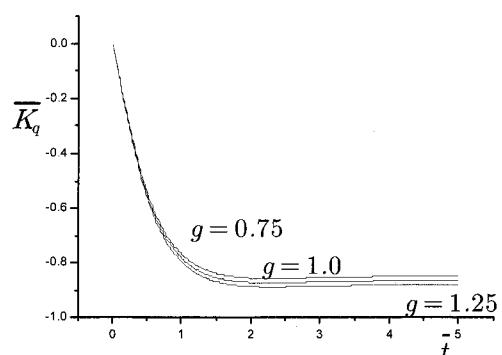


Fig 9. The thermal flux intensity factor of second crack position  $d/h = 0.6$  with time in case of two cracks

크랙이 2개인 경우로서 고정된 기울기 지수  $g = 1$ 에 있어, 서로 다른 2개의 크랙 위치  $d/h$

(A 경우:  $d/h = 0.2$ ,  $d/h = 0.3$ , B 경우 :  $d/h = 0.2$ ,  $d/h = 0.4$ , C 경우 :  $d/h = 0.2$ ,  $d/h = 0.5$ )가 열량 집중계수에 미치는 영향을 Fig 10-11에 나타내었다. 두개의 크랙간격이 클 수록 열량 집중계수는 시간의 증가에 따른 수렴이 빨라지며, 크기는 감소함을 보여주고 있다.

본 연구에서 제시된 알고리즘은 이전에 제시된 많은 방법과는 다른 방법을 제시하고 있으며, 경사기능재료의 두께 방향을 통해 재료의 물성치가 변화되는 경우도 적용가능하다. 또한 크랙의 수가 1개 이상인 다중 크랙의 경우에 적용가능하며, 앞으로 다중 크랙을 지닌 경사기능재료 열응력에 대한 파괴 동역학의 문제를 검토하기 위한 기본 알고리즘을 제시하고 있음을 보여준다.

## 후기

본 연구는 2007년도 인하공업전문대학 교내 학술연구비 지원에 의해 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

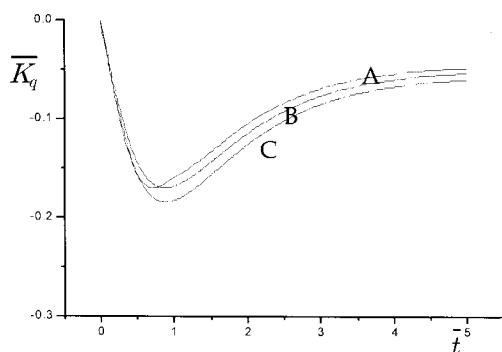


Fig 10. Variation of the first thermal flux intensity factor with time for different crack position

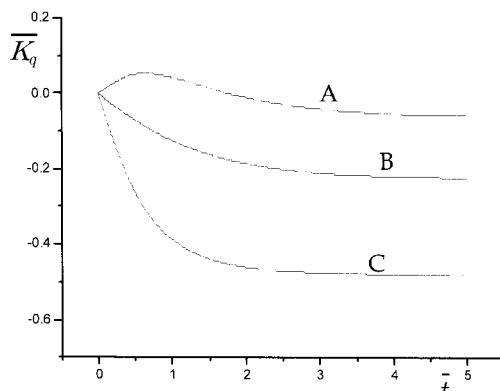


Fig 11. Variation of the second thermal flux intensity factor with time for different crack position

본 연구에서는 열 하중을 받는 이질재료의 파괴 동역학의 문제를 검토하기 위한 알고리즘을 제시하고자 하였다. 비정상 상태에 있어 열량 집중계수들이 계산되는 과정이 제시되었다.

- [1] Saito, M., and Takahashi, H., 1990, "Development of Small Punch Test Procedure for FGM Fabrication," in Yamanouchi, M., et al. (eds.), FGM-90, Proc. First Int. Symposium on Functionally Gradient Materials, FGM Forum, Tokyo, Japan, pp. 297-305.
- [2] Jin, Z. H., and Noda, N., 1993a, "Minimization of Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Metal-Ceramic Mixture," in Holt, J. B., et al. (eds.), Ceramics Transactions, Functionally Gradient Materials, Vol. 34, The American Ceramic Society, Ohio.
- [3] Jin, Z. H., and Noda, N., 1993b, "An Internal Crack Parallel to the Boundary of a nonhomogeneous Half Plane Under Thermal Loading," International Journal of Engineering Science, Vol. 31, pp. 793-806.
- [4] Noda, N., and Jin, Z. H., 1993a, "Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Functionally Gradient Material," International Journal of Solids and Structure, Vol. 30, pp. 1039-1056.
- [5] Noda, N., and Jin, Z. H., 1993b, "Steady Thermal Stresses in an Infinite Non-Homogeneous Elastic Solid Containing a Crack," Journal of Thermal Stresses, Vol. 16, pp. 181-197.
- [6] Noda, N., and Jin, Z. H., 1994, "A Crack in a Functionally Gradient Material Under Thermal

- Shock,"Arch. Appl. Mech., Vol. 64, pp. 99-110.
- [7] Jin, Z. H., and Noda, N., 1994a,"Transient Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Semi-Infinite Plate of a Functionally Gradient Material,"International Journal of Solids and Structure, Vol. 31, pp. 203-218.
- [8] Jin, Z. H., and Noda, N., 1994b,"Edge Crack in a Nonhomogeneous Half Plane Under Thermal Loading,"Journal of Thermal Stresses, Vol. 17, pp. 591-599.
- [9] Erdogan, F., and Wu, B. H., 1996,"Crack Problem in FGM layers Under Thermal Stresses,"Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 237-265.
- [10] Nemat-Alla, M., and Noda, N., 1996,"Study of an Edge Crack Problem in a Semi-infinite Functionally Graded Medium with Two Dimensionally Non-homogeneous Coefficients of Thermal Expansion Under Thermal Loading,"Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 863-888.
- [11] Jin, Z. H., and Batra, R. C., 1996a,"Stress Intensity Relaxation at the Tip of an Edge Crack in a Functionally Graded Materials Subjected to a Thermal Shock,"Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 317-339.
- [12] Noda, N., 1997,"Thermal Stress Intensity Factor for Functionally Gradient Plate with an Edge Crack,"Journal of Thermal Stresses, Vol. 20, pp. 373-387.
- [13] Zuiker, J. R., 1995, "Functionally Graded Materials: Choice of Micromechanics Model and Limitations in Property Variation," Composites Engineering, Vol. 5, pp.807-819.
- [14] Miller, M. K., and Guy, W. T., 1966, "Numerical Inversion of the Laplace Transform by Use of Jacobi Polynomials," SIAM J. Numer. Anal., Vol. 3, pp. 624-635.