

## 지렛대 원리를 이용한 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질 탐구

한 인 기 (경상대학교)

최근 몇몇 연구들에서 지렛대 원리를 이용한 문제해결 방법이 소개되었다. 본 연구에서는 이들 연구를 바탕으로 지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질을 탐구하였으며, 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심에 관련된 새로운 증명들, 명제들을 제시하였다. 이를 통해, 중등학교 수준의 수학 영재교육에서 활용가능한 새로운 탐구자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

### 1. 서 론

수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007, p.2)에서는 수학의 성격을 ‘수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과’로 규정하고 있다. 즉 수학적 지식들, 방법들을 이용하여 다양한 현상들 및 문제들을 해석하고 해결하는 활동은 중등학교 수학의 중요한 부분이 된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 수학적 지식들, 방법들에 관련된 학생들의 다양한 경험은 성공적인 수학적 활동의 바탕이 될 수 있을 것이다.

중등학교에서 다루는 수학적 지식의 양과 폭을 수학과 교육과정에서 규정하므로, 수학 영재교육에서도 이에 관련된 논의는 제한적일 수밖에 없다. 그러나 수학적 방법에 대해서는 수학과 교육과정에서 그 범위나 종류를 규정하지 않으므로, 다양한 수학적 방법과 이를 활용한 수학적 탐구에 대한 논의는 수학 영재교육의 내용과 질을 향상시킬 수 있는 중요한 단서를 제공할 수 있을 것이다.

최근 몇몇 연구들에서 지렛대 원리를 이용한 문제해결 방법이 소개되었다. Balk & Boltynskii (1987), 한인기(2005)는 지렛대 원리를 바탕으로 무게중심의 유일성, 질량점들의 묶음(그루핑) 가능성에 대한 명제와 증명을 소개하였고, Klamkin & Kung(1996), 김선희 · 김기연(2005), 한인기 · 홍동화(2006), 한인기 외 5인(2007)은 지렛대 원리를 활용한 문제해결의 다양한 측면들을 고찰하였다. 이들 연구를 통해, 지렛대 원리를 이용한 문제해결 방법이 선분들의 비를 구하는 문제들, 선분들의 교차에 관련된 문제들, 평면들의 교차에 관련된 문제들의 해결에 유용한 도구가 될 수 있음을 알 수 있다. 그러나 지렛대 원리를 이용한 문제해결의 사례들, 이 방법의 다양한 측면들의 분석에 기초한 지렛대

\* ZDM 분류 : D53

\* MSC2000 분류 : 97D50

\* 주제어 : 삼각형, 내심, 수선, 외심, 지렛대 원리, 무게중심

원리를 이용한 문제해결 방법의 확장 가능성에 대한 논의는 아직 부족하며, 시작단계에 있다고 할 수 있다.

본 연구에서는 지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질을 탐구할 것이며, 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심에 관련된 새로운 증명들, 명제들을 제시할 것이다. 본 연구를 통해, 중등학교 수준의 수학 영재교육에서 활용가능한 새로운 탐구자료를 제공하며, 지렛대 원리를 이용한 문제해결 방법으로 탐구할 수 있는 수학적 성질들의 영역을 넓혀 이 방법의 확장을 위한 기초자료를 제공할 것으로 기대된다.

## 2. 지렛대 원리와 삼각형의 한 성질

지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질을 탐구하기 위해, 질량점들의 무게중심에 관련된 몇몇 성질을 살펴보자.

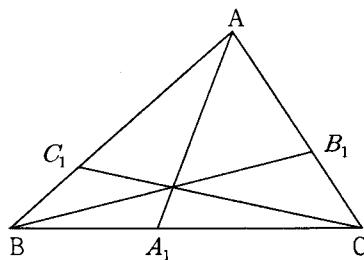
**성질 1.** 질량점들  $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_i, m_i)$ 의 무게중심은 유일하다.

**성질 2.**  $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_i, m_i), (B_1, n_1), \dots, (B_j, n_j)$ 의 무게중심을  $G$ ,  $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_i, m_i)$ 의 무게중심을  $H$ 라 하면,  $(H, m_1 + \dots + m_i), (B_1, n_1), \dots, (B_j, n_j)$ 의 무게중심은  $G$ 이다.

성질 1은 질량점들의 무게중심의 유일성을 나타내며, 성질 2는 질량점들의 무게중심을 구할 때에, 먼저 몇몇 질량점들을 그루핑(묶음)하여 무게중심을 구한 다음, 얻어진 묶음의 무게중심과 나머지 질량점들의 무게중심을 구하면, 전체 질량점들의 무게중심이 얻어진다는 것을 나타낸다. 이들 성질의 증명은 한인기(2005, pp.146-147)에 제시되어 있으므로 증명은 생략하고, 성질 1과 2로부터 유도되는 다음 성질 3을 살펴보자.

**성질 3.** 삼각형 ABC의 변 BC, AC, AB에 점  $A_1, B_1, C_1$ 을 잡아 선분  $AA_1, BB_1, CC_1$ 을 생각하자. 점  $A_1, B_1, C_1$ 이 각각 질량점 B와 C, A와 C, A와 B의 무게중심이 되도록 A, B, C에 무게  $m_1, m_2, m_3$ 를 놓을 수 있다면, 선분  $AA_1, BB_1, CC_1$ 은 한 점에서 교차한다.

**증명.** 점  $A_1, B_1, C_1$ 이 각각 질량점 B와 C, A와 C, A와 B의 무게중심이 되도록 A, B, C에 무게  $m_1, m_2, m_3$ 를 놓자(<그림 1>). 그러면 질량점  $(A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)$ 의 무게중심  $G$ 는  $(A, m_1), (B, m_2)$ 의 무게중심  $C_1$ 과 C를 연결한 선분에 속한다(성질 2). 그리고 무게중심  $G$ 는  $(A, m_1), (C, m_3)$ 의 무게중심  $B_1$ 과 B를 연결한 선분에도 속하며,  $(B, m_2), (C, m_3)$ 의 무게중심  $A_1$ 과 A를 연결한 선분에도 속한다. 그런데 질량점  $(A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)$ 의 무게중심  $G$ 는 유일하므로(성질 1), 선분  $AA_1, BB_1, CC_1$ 은 한 점 G에서 교차한다. □



&lt;그림 1&gt;

성질 3에서는 선분  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ 이 한 점에서 교차할 충분조건이 ‘점  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ 이 질량점 B와 C, A와 C, A와 B의 무게중심이 되도록 A, B, C에 무게  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ 를 놓을 수 있다’임을 보였다. 즉 삼각형의 각 꼭지점과 대변의 점을 연결한 선분들이 한 점에서 교차한다는 것을 보이려면, 대변의 점이 그 변의 양끝에 놓인 꼭지점들(질량점)의 무게중심임을 각각 보이면 된다. 그리고 이 충분 조건이 체바 조건  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ 과 동치라는 것도 보일 수 있다.

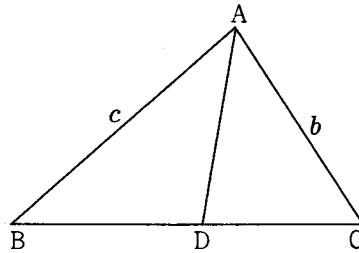
본 연구에서는 성질 3을 이용하여, 삼각형의 세 각의 이등분선이 한 점에서 교차하는 것, 삼각형의 세 수선이 한 점에서 교차하는 것, 삼각형의 외심이 존재하는 것을 증명하고, 이에 관련된 등식 또는 부등식을 지렛대 원리를 이용하여 증명할 것이다.

### 3. 삼각형의 각의 이등분선의 성질

삼각형은 세 내각과 외각이 있다. 내각들의 이등분선은 한 점에서 교차하며, 이 교점을 내심이라 부른다. 지렛대 원리를 이용하여 삼각형에서 세 내각의 이등분선이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하고, 내심에 관련된 새로운 등식, 부등식을 증명하자.

**성질 4.** 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 교차한다.

**증명.** 증명을 위해 각의 이등분선의 성질인 ‘AD가 각 A의 이등분선일 필요충분조건은  $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ ’이라는 것을 생각하자(<그림 2>). 꼭지점 A, B, C에 적당히 무게를 놓으면, 점 D가 질량점 B, C의 무게중심이 된다는 것을 보이자.



&lt;그림 2&gt;

삼각형 ABC의 각 꼭지점에 무게  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 를 놓으면 질량점  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, c)$ 를 얻게 된다. <그림 2>에서 AD는 각의 이등분선이므로  $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$ 인데, 지렛대 원리에 의해 D는 질량점  $(B, b)$ ,  $(C, c)$ 의 무게중심이 된다. 그러므로 세 질량점  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, c)$ 의 무게중심은 선분 AD에 속 한다.

같은 방법으로, 각의 이등분선 BE, CF를 그으면, E와 F는 각각 질량점  $(A, a)$ 와  $(C, c)$ ,  $(A, a)$ 와  $(B, b)$ 의 무게중심이 됨을 알 수 있다. 그러므로 성질 3에 의해 세 내각의 이등분선 AD, BE, CF가 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다. □

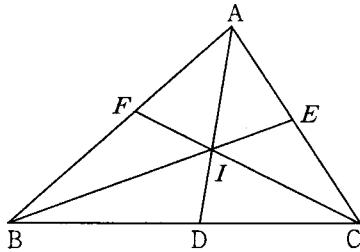
일반적으로 삼각형의 세 내각의 이등분선이 한 점에서 교차한다는 것의 증명은 ‘각의 이등분선에 서 변들에 이르는 거리는 같다’는 성질 또는 체바의 정리를 이용하여 이루어진다. 본 연구에서는 각의 이등분선의 다른 성질인 ‘AD가 이등분선일 필요충분조건은  $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$  (<그림 2>)'와 무게중심 (성질 3)을 이용하여 증명하였다.

**성질 5.** 삼각형에 세 내각의 이등분선 AD, BE, CF를 긋고, 그 교점을 I라 하자(<그림 3>). 그러면 등식  $\frac{AI}{AD} + \frac{BI}{BE} + \frac{CI}{CF} = 2$ 이 성립한다.

**증명.** 삼각형 ABC의 각 꼭지점에 무게를 놓아 질량점  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, c)$ 을 생각하자. 그러면 I는 이들 질량점의 무게중심이 된다. 이제 지렛대 원리를 생각하자. 그러면  $\frac{AI}{AD} = \frac{b+c}{a+b+c}$ ,  $\frac{BI}{BE} = \frac{a+c}{a+b+c}$ ,  $\frac{CI}{CF} = \frac{a+b}{a+b+c}$  가 된다. 이제 이들 등식을 서로 더하면, 등식  $\frac{AI}{AD} + \frac{BI}{BE} + \frac{CI}{CF} = 2$  가 증명된다. □

성질 5의 등식  $\frac{AI}{AD} + \frac{BI}{BE} + \frac{CI}{CF} = 2$ 와 양수  $a, b, c$ 에 대한 부등식  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3^2$ 을 이용하면, 부등식  $\frac{AD}{AI} + \frac{BE}{BI} + \frac{CF}{CI} \geq \frac{9}{2}$ 을 얻을 수 있다. 이제 내심에 관련된 다음 부등식을 살펴보자.

**성질 6.** 삼각형에 세 내각의 이등분선  $AD, BE, CF$ 를 긋고, 그 교점을  $I$ 라 하자(<그림 3>). 그러면 부등식  $\frac{3}{2} \leq \frac{DI}{AI} + \frac{EI}{BI} + \frac{FI}{CI} < 2$ 이 성립한다.



&lt;그림 3&gt;

**증명.** 삼각형  $ABC$ 에서 질량점  $(A, a), (B, b), (C, c)$ , 이들의 무게중심  $I$ 를 생각하자. 이제 지렛대 원리를 생각하자.  $(B, b)$ 와  $(C, c)$ 의 무게중심  $D$ 에는  $b+c$ 인 무게가 놓이므로,  $\frac{DI}{AI} = \frac{a}{b+c}$  가 성립한다. 같은 방법으로,  $\frac{EI}{BI} = \frac{b}{a+c}$ ,  $\frac{FI}{CI} = \frac{c}{a+b}$  가 얻어진다. 이제,  $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$ 를 증명하면 된다. 삼각형의 변들에 대한 이 부등식은 Bottema et al(1969, p.15)에 증명이 제시되어 있으므로, 생략한다.  $\square$

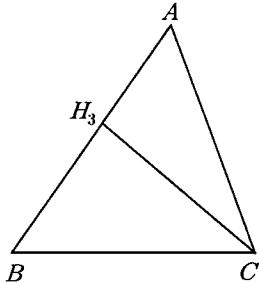
본 연구에서는 <그림 3>에서  $I$ 를 무게중심으로 삼고, 지렛대 원리를 이용하여 내심을 포함하는 선분들의 비에 관련된 부등식들을 찾아내고 증명하였다.

#### 4. 삼각형의 수선의 성질

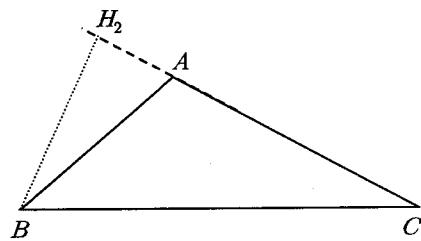
삼각형의 세 수선은 한 점에서 교차하는데, 그 교점은 삼각형의 내부(예각삼각형의 경우) 또는 외부(둔각삼각형의 경우) 또는 꼭지점(직각삼각형의 경우)에 놓여있다. 성질 3을 이용하여 예각삼각형, 둔각삼각형에 대해 세 수선이 한 점에서 교차한다는 것을 보이자.

성질 7. 삼각형에서 삼각형의 세 수선은 한 점에서 교차한다.

증명. 우선 예각삼각형인 경우를 살펴보자. 예각삼각형 ABC의 꼭지점 C로부터 변 AB에 수선  $CH_3$ 을 긋자(<그림 4>). 성질 3을 이용하기 위해,  $\frac{AH_3}{BH_3}$ 를 구하자. 직각삼각형 ACH<sub>3</sub>, BCH<sub>3</sub>에서  $\tan A = \frac{CH_3}{AH_3}$ ,  $\tan B = \frac{CH_3}{BH_3}$  이므로,  $\frac{AH_3}{BH_3} = \frac{\tan B}{\tan A}$  가 얻어진다. 같은 방법으로, 수선  $AH_1$ ,  $BH_2$ 를 그으면  $\frac{BH_1}{CH_1} = \frac{\tan C}{\tan B}$ ,  $\frac{CH_2}{AH_2} = \frac{\tan A}{\tan C}$  가 성립한다.



<그림 4>



<그림 5>

삼각형 ABC의 꼭지점 A, B, C에 무게  $\tan A$ ,  $\tan B$ ,  $\tan C$ 를 놓자. 그러면 등식  $\frac{AH_3}{BH_3} = \frac{\tan B}{\tan A}$ ,  $\frac{BH_1}{CH_1} = \frac{\tan C}{\tan B}$ ,  $\frac{CH_2}{AH_2} = \frac{\tan A}{\tan C}$  는  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ 가  $(B, \tan B)$ 와  $(C, \tan C)$ ,  $(A, \tan A)$ 와  $(C, \tan C)$ ,  $(A, \tan A)$ 와  $(B, \tan B)$ 의 무게중심이라는 것을 의미한다. 이제 성질 3을 이용하면, 수선  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$ 가 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다.

이제 둔각삼각형인 경우를 생각하자. 가령 삼각형 ABC에서 각 A가 둔각이라 하자(그림 5). 그러면 각 B와 각 C에서 내린 수선의 발이 삼각형 ABC의 외부에 놓이게 된다. 삼각형 ABH<sub>2</sub>, CBH<sub>2</sub>에서  $\tan(\pi - A) = \frac{BH_2}{AH_2}$ ,  $\tan C = \frac{BH_2}{CH_2}$  이므로,  $\frac{CH_2}{AH_2} = -\frac{\tan A}{\tan C}$  가 얻어진다. 같은 방법으로, 수선  $AH_1$ ,  $CH_3$ 를 그으면  $\frac{BH_1}{CH_1} = \frac{\tan C}{\tan B}$ ,  $\frac{AH_3}{BH_3} = -\frac{\tan B}{\tan A}$  가 성립한다.

등식  $\frac{CH_2}{AH_2} = -\frac{\tan A}{\tan C}$  와  $\frac{AH_3}{BH_3} = -\frac{\tan B}{\tan A}$  에 음의 값이 포함되어 있는데, 이것은  $H_2$ ,  $H_3$ 가 변 AC, AB의 외분점인 것과 관련되며, 이때 질량점은 음의 무게를 가지게 된다. Balk & Boltyanskii(1987)는 성질 1에서 질량점들의 무게의 합, 성질 2에서 뮤음으로 만드는 질량점들의 무게의 합이 0이 되면

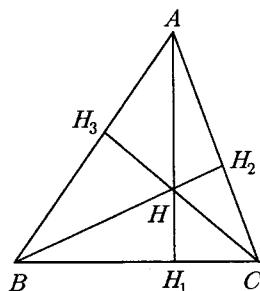
안된다는 조건을 덧붙여 질량점의 개념을 음수로 확장하였다.

이제 <그림 5>의 삼각형 ABC의 꼭지점에 질량점  $(A, -\tan A)$ ,  $(B, \tan B)$ ,  $(C, \tan C)$ 을 놓자(단,  $\tan A \neq \tan B, \tan C$ 임). 그러면 지렛대 원리에 의해,  $H_1, H_2, H_3$ 는 각각  $(B, \tan B)$ 와  $(C, \tan C)$ ,  $(A, -\tan A)$ 와  $(C, \tan C)$ ,  $(A, -\tan A)$ 와  $(B, \tan B)$ 의 무게중심이 된다. 성질 3을 이용하면, 둔각삼각형 ABC에서 수선  $AH_1, BH_2, CH_3$ 가 한 점에서 교차한다는 것이 증명된다.  $\square$

음수값인 무게를 이해하기 위해, 질량과 무게를 구분할 필요가 있다. 국어사전(남영신, 2003)에서 무게는 ‘무거운 정도’(p.805)이며, 질량은 ‘물체가 갖는 물질의 양’(p.2045)로 정의되어 있으며, 물리학에서 무게는 중력의 크기를 의미하며 용수철저울이나 앉은뱅이저울로 측정하며, 질량은 물체의 고유한 양으로 양팔저울로 측정한다. 이제 무게가 음수인 경우를 생각하기 위해, 물이 가득담긴 수조가 있다고 하자. 이제 A는 물보다 비중이 크며 B는 물보다 비중이 작다고 하자. 그러면 A는 물에 가라앉고 무게는 양수값이 될 것이지만, B는 물 위로 떠오를 것이며 무게는 음수값이 될 것이다.

양수인  $m$ 에 대해, 세 질량점  $(A, m)$ ,  $(B, -m)$ ,  $(C, m)$ 을 생각하자. 그러면 이들 세 점의 무게중심은 삼각형 ABC의 밖에 놓이게 된다. 실제로 계산해 보면, 이들 세 질량점의 무게중심은 선분 AC의 중점에 대한 점 B의 대칭점이 된다. 즉 ABCD가 평행사변형을 이루도록 하는 그러한 점 D가 질량점  $(A, m)$ ,  $(B, -m)$ ,  $(C, m)$ 의 무게중심이다. 이제 수식에 관련된 한 등식을 살펴보자.

**성질 8.** 예각삼각형에서 세 수선  $AH_1, BH_2, CH_3$ 를 긋고, 그 교점을 H라 하자(<그림 6>). 그러면 등식  $\frac{HH_1}{AH} + \frac{HH_2}{BH} + \frac{HH_3}{CH} = \frac{\tan A}{\tan B + \tan C} + \frac{\tan B}{\tan A + \tan C} + \frac{\tan C}{\tan A + \tan B}$  이 성립한다.



<그림 6>

**증명.** 삼각형 ABC의 꼭지점 A, B, C에 무게  $\tan A, \tan B, \tan C$ 를 놓자. 그러면 H는 이들 질량점의 무게중심이 된다. 이제 지렛대 원리를 생각하자. 그러면  $\frac{HH_1}{AH} = \frac{\tan A}{\tan B + \tan C}$ ,

$\frac{HH_2}{BH} = \frac{\tan B}{\tan A + \tan C}$ ,  $\frac{HH_3}{CH} = \frac{\tan C}{\tan A + \tan B}$  가 성립한다. 얻어진 세 등식을 더하면, 구하는 등식이 증명된다.  $\square$

성질 8을 유도하고 증명하기 위해, 본 연구에서는 H가 무게중심이 되도록 삼각형의 각 꼭지점에 무게를 놓아 질량점 (A,  $\tan A$ ), (B,  $\tan B$ ), (C,  $\tan C$ )을 만들고, 지렛대 원리를 이용하였다. 한편 성질 8의 식  $\frac{\tan A}{\tan B + \tan C} + \frac{\tan B}{\tan A + \tan C} + \frac{\tan C}{\tan A + \tan B}$  을 통분하여 정리하자. 그러면

$$\begin{aligned} \frac{\tan A}{\tan B + \tan C} + \frac{\tan B}{\tan A + \tan C} + \frac{\tan C}{\tan A + \tan B} &= \frac{\tan A(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} \\ &+ \frac{\tan B(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan B)}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} + \frac{\tan C(\tan A + \tan C)(\tan B + \tan C)}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} \end{aligned}$$

가 된다. 등식의 우변에 있는 각각의 가수들을 정리하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\tan A(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} &= \frac{\tan^2 A(\tan A + \tan B + \tan C) + \tan A \tan B \tan C}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} \\ \frac{\tan B(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan B)}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} &= \frac{\tan^2 B(\tan A + \tan B + \tan C) + \tan A \tan B \tan C}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} \\ \frac{\tan C(\tan A + \tan C)(\tan B + \tan C)}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} &= \frac{\tan^2 C(\tan A + \tan B + \tan C) + \tan A \tan B \tan C}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} \end{aligned}$$

이제, 얻어진 등식들을 변끼리 더하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \frac{\tan A}{\tan B + \tan C} + \frac{\tan B}{\tan A + \tan C} + \frac{\tan C}{\tan A + \tan B} \\ = \frac{(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C)(\tan A + \tan B + \tan C) + 3\tan A \tan B \tan C}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)} \end{aligned}$$

가 된다. 한편 예각삼각형에서  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C^\circ$  이므로(Andreescu & Feng, 2005, p.66), 이를 등식의 우변에 있는 문자에 대입하자. 그러면 문자는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} &(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C)(\tan A + \tan B + \tan C) + 3\tan A \tan B \tan C \\ &= \tan A \tan B \tan C(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 3) \end{aligned}$$

그런데 임의의 양수  $x$ 에 대해  $2x \leq (x^2 + 1)$  이 성립하므로,  $(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C + 3) \geq 2\tan A + 2\tan B + 2\tan C^\circ$  이다. 그리고  $2\tan A + 2\tan B + 2\tan C = 2\tan A \tan B \tan C^\circ$  이다. 결국

$$(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C)(\tan A + \tan B + \tan C) + 3\tan A \tan B \tan C \geq 2(\tan A \tan B \tan C)^2$$

가 된다. 이로부터 부등식

$$\frac{\tan A}{\tan B + \tan C} + \frac{\tan B}{\tan A + \tan C} + \frac{\tan C}{\tan A + \tan B} \geq \frac{2(\tan A \tan B \tan C)^2}{(\tan B + \tan C)(\tan A + \tan C)(\tan A + \tan B)}$$

을 얻을 수 있다. 그런데 Mitrinovic, Pecaric & Volenec(1989)에 의하면,  $\tan A \tan B \tan C =$

$\frac{2sr}{s^2 - (2R+r)^2}$ ,  $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = \frac{s^2 - r^2 - 4Rr}{s^2 - (2R+r)^2}$ 이다(단,  $s$ 는 둘레의 절반,  $R$ 은 외접원의 반지름,  $r$ 은 내접원의 반지름임). 이것을 부등식의 우변에 대입하여 정리하자. 그러면

$$\frac{\tan A}{\tan B + \tan C} + \frac{\tan B}{\tan A + \tan C} + \frac{\tan C}{\tan A + \tan B} \geq \frac{8s^2r^2}{(s^2 - r^2 - 4Rr)(s^2 - (2R+r)^2)}$$

이 얻어진다. 이로부터 성질 8의 등식으로부터

$$\frac{HH_1}{AH} + \frac{HH_2}{BH} + \frac{HH_3}{CH} \geq \frac{8s^2r^2}{(s^2 - r^2 - 4Rr)(s^2 - (2R+r)^2)}$$

을 유도할 수 있다.

한편, 성질 5와 유사한 등식이 예각삼각형의 수선  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$ 에 대해서도 성립한다. 즉 <그림 6>에서  $\frac{AH}{AH_1} + \frac{BH}{BH_2} + \frac{CH}{CH_3} = \frac{\tan B + \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} + \frac{\tan A + \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} + \frac{\tan A + \tan B}{\tan A + \tan B + \tan C} = 2$  가 유도된다.

## 5. 삼각형의 외심의 성질 탐구

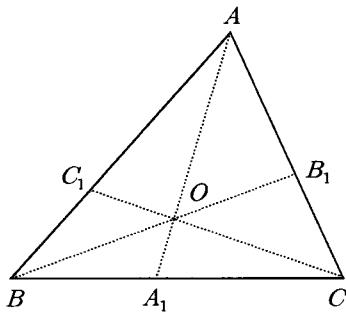
삼각형의 외심은 변들의 수직이등분선의 교점이다. 이때 삼각형에서 변의 수직이등분선은 일반적으로 마주보는 꼭지점을 지나지 않으므로, 성질 3을 이용하기 위해선 외심에 관련된 다른 성질을 이용해야 한다. 그리고 둔각삼각형의 경우에는 외심이 삼각형의 외부에 놓여있으므로, 본 연구에서는 예각삼각형의 외심에 관련된 성질을 조사할 것이다.

**성질 9.** 예각삼각형 ABC에서 외심을 O라 하고, 직선 AO, BO, CO와 변 BC, AC, AB와의 교점을 각각  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ 이라 하자. 그러면 등식  $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$ ,  $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C}$ ,  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$ 이 성립한다.

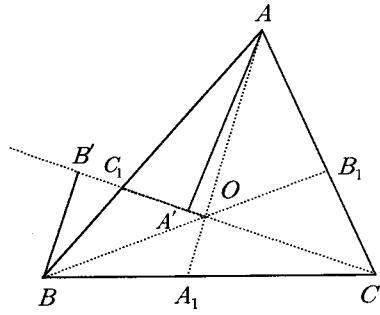
**증명.** 우선 예각삼각형 ABC에서 각 BOC가  $2\angle A$ 가 됨을 보이자(그림 7). 각 BOC는 각  $C_1OB_1$ 과 같고, 이것은 각  $AOC_1$ 과  $AOB_1$ 의 합과 같다. 삼각형 OAC는 이등변삼각형이므로, 외각  $AOC_1$ 은  $\angle OAC$ 와 같다. 그리고 이등변삼각형 OAB에서 외각  $AOB_1$ 은  $2\angle OAB$ 와 같다. 그러므로  $\angle BOC = 2\angle A$ 가 된다. 같은 이유로,  $\angle AOC = 2\angle B$ ,  $\angle AOB = 2\angle C$ 임을 알 수 있다.

이제  $\frac{AC_1}{C_1B}$ 를 구하자. 이를 위해 직선 CO에 꼭지점 A, B로부터 수선  $A'$ ,  $B'$ 을 긋자(그림 8). 그러면 삼각형  $AC_1A'$ 과  $BC_1B'$ 은 닮음이고,  $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AA'}{BB'}$ 이 된다. 이때  $AA' = OA \cdot \sin AOA'$ ,  $BB' = OB \cdot \sin BOB'$ 이다. 그런데  $\angle AOA' = \pi - \angle AOC = \pi - 2\angle B$ ,  $\angle BOB' = \pi - \angle BOC$

$=\pi-2\angle A$ 이다. 그러므로  $AA'=R\sin 2B$ ,  $BB'=R\sin 2A$ 이고,  $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$ 가 성립한다. 유사한 방법으로 등식  $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$ ,  $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin 2A}{\sin 2C}$ 을 증명할 수 있다.  $\square$



&lt;그림 7&gt;



&lt;그림 8&gt;

성질 9의 역을 생각하자. 등식  $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$ ,  $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin 2A}{\sin 2C}$ ,  $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$ 을 만족하면 지렛대 원리에 의해  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ 은 질량점  $(B, \sin 2B)$ 와  $(C, \sin 2C)$ ,  $(A, \sin 2A)$ 와  $(C, \sin 2C)$ ,  $(A, \sin 2A)$ 와  $(B, \sin 2B)$ 의 무게중심이므로, 세 선분  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ 은 성질 3에 의해 한 점에서 교차 한다.

한편 선분  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ 의 교점을 O라 하면, O로부터 꼭지점 A, B, C에 이르는 거리가 같다 는 것도 유도할 수 있다. 실제로 <그림 8>에서  $\sin \angle BOB' = \sin 2A = \frac{BB'}{OB}$ ,  $\sin \angle AOA' = \sin 2B = \frac{AA'}{OA}$ 이다. 이로부터  $\frac{\sin 2B}{\sin 2A} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{AA'}{BB'}$ 이고, 삼각형  $AC_1A'$ 과  $BC_1B'$ 의 닮음으로부터  $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC_1}{C_1B}$ 이므로,  $\frac{\sin 2B}{\sin 2A} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B}$ 가 된다. 그런데 조건에 의해  $\frac{\sin 2B}{\sin 2A} = \frac{AC_1}{C_1B}$ 이므로,  $OA = OB$ 가 유도된다. 같은 방법으로,  $OA = OB = OC$ 가 증명된다.

성질 9의 역으로부터 예각삼각형의 외심은  $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$ ,  $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A}$ ,  $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$ 을 만족하는 점  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ 에 대해 선분  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ 의 교점이라는 것을 알 수 있다. 일반적으로 삼각형의 외심은 변들의 수직이등분선의 교점으로만 한정하여 생각하는데, 본 연구에서는 예각삼각형의 변들을 일정한 비로 나누는 점을 마주보는 꼭지점과 각각 연결하여, 이때 얻어지는 선분들의 교점이 외심이 된다는 것을 보였다. 외심에 대한 이러한 접근을 통해, 다음과 같은 유형의 관계식을 쉽

게 증명할 수 있다.

**성질 10.** 예각삼각형 ABC의 외심 O를 지나는 직선 AO, BO, CO와 변 BC, AC, AB와의 교점을 각각  $A_1, B_1, C_1$ 이라 하자(<그림 8>). 그러면 등식  $\frac{OA_1}{AO} + \frac{OB_1}{BO} + \frac{OC_1}{CO} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B + \sin 2C}$   $+ \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2C} + \frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B}$  가 성립한다.

성질 10의 증명은 지렛대 원리로부터 쉽게 얻어지므로 생략한다. 그리고 예각삼각형의 외심에 대해서도 성질 5와 같은 등식을 쉽게 유도할 수 있으며, 성질 10에 산술평균-기하평균과 같은 부등식을 이용하면 새로운 관계식들을 얻을 수 있다.

## 6. 결 론

최근 몇몇 연구들에서 지렛대 원리를 이용한 문제해결 방법이 소개되었다. 본 연구에서는 이를 연구를 바탕으로 지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질을 탐구하였으며, 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심에 관련된 새로운 증명들, 명제들을 제시하였다.

우선 삼각형에서 세 꼭지점과 대변의 한 점을 각각 연결한 세 선분이 한 점에서 교차할 충분조건이 ‘각 대변의 점이 꼭지점들에 놓인 질량점들의 무게중심이다’라는 것을 보이고, 이를 이용하여 삼각형의 세 각의 이등분선이 한 점에서 교차하는 것, 삼각형의 세 수선이 한 점에서 교차하는 것, 삼각형의 외심이 존재하는 것, 이에 관련된 등식들 및 부등식들을 증명하였다.

삼각형 ABC의 각의 이등분선 AD, BE, CF가 한 점에서 교차한다는 것을 증명하기 위해, 삼각형의 각 꼭지점에 무게를 놓아 질량점 (A,  $a$ ), (B,  $b$ ), (C,  $c$ )를 만들었고, 수선  $AH_1, BH_2, CH_3$ 이 한 점에서 교차한다는 것을 증명하기 위해, 질량점 (A,  $\tan A$ ), (B,  $\tan B$ ), (C,  $\tan C$ )와 (A,  $-\tan A$ ), (B,  $\tan B$ ), (C,  $\tan C$ )을 만들었고 외심을 탐구하기 위해 질량점 (A,  $\sin 2A$ ), (B,  $\sin 2B$ ), (C,  $\sin 2C$ )를 만들었다. 이와 같이, 본 연구에서는 지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질을 조사하기 위해 삼각형의 꼭지점들에 놓아야 하는 질량점들을 찾았으며, 이를 바탕으로 몇몇 명제들을 증명하였다.

한편, 삼각형의 내심 I, 수심 H, 외심 O을 지렛대 원리를 이용하여 탐구한 결과, 본 연구에서는  $\frac{AI}{AD} + \frac{BI}{BE} + \frac{CI}{CF} = 2$ ,  $\frac{AD}{AI} + \frac{BE}{BI} + \frac{CF}{CI} \geq \frac{9}{2}$ ,  $\frac{3}{2} \leq \frac{DI}{AI} + \frac{EI}{BI} + \frac{FI}{CI} < 2$ ,  $\frac{HH_1}{AH} + \frac{HH_2}{BH} + \frac{HH_3}{CH} = \frac{\tan A}{\tan B + \tan C} + \frac{\tan B}{\tan A + \tan C} + \frac{\tan C}{\tan A + \tan B}$ ,  $\frac{OA_1}{AO} + \frac{OB_1}{BO} + \frac{OC_1}{CO} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B + \sin 2C} + \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2C}$

$+\frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B}$  등과 같은 등식들 및 부등식들을 쉽게 추측하고 증명할 수 있었다.

본 연구의 결과들은 중등학교 수준의 수학 영재교육에서 활용가능한 새로운 탐구자료가 될 수 있을 것이며, 지렛대 원리를 이용한 문제해결 방법의 확장을 위한 기초자료가 될 것으로 기대된다.

### 참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

김선희 · 김기연 (2005). 수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구, 수학교육학연구 15(3), pp.335-352.

남영신 (2003). 국어대사전, 서울: 성안당.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 · 홍동화 (2006). 지렛대 원리를 활용한 선분의 비에 관련된 도형 문제의 해결에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 20(4), pp.621-634, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 외 5인 (2007). 사면체에서 지렛대의 원리를 이용한 선분들 및 평면들의 교차에 관한 성질 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 21(4), pp.663-676, 서울: 한국수학교육학회.

Andreescu & Feng (2005). *103 Trigonometry Problems*, Boston: Birkhauser.

Balk & Boltyanskii (1987). *Geometriya Mass*, Moskva: Nauka.

Bottema et al (1969). *Geometric Inequality*, Netherlands: Wolters-Noordhoff Publishing.

Klamkin & Kung (1996). Ceva's and Menelaus' Theorem and Their Converses via Centroids, *Mathematics Magazine* 69(1), pp.49-51.

Mitrinovic, Pecaric & Volenec. (1989). *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Netherlands: Kluwer Academic Pub.

## A Study on Triangle's Properties related with Angle Bisectors, Perpendiculars, Circumcenter Using the Principle of the Lever

Han Inki

Gyeongsang National University, 660-701, Korea

inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study triangle's properties related with angle bisectors, perpendiculars, circumcenter using the principle of the lever. We analyze proof method using the principle of the lever, and describe how to investigate intersection of segments, how to prove equalities and inequalities using the principle of the lever in triangle.

---

\* ZDM Classification : D53

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

\* Key Words : triangle, the principle of the lever, the center of gravity, circumcenter, angle bisector, perpendicular.