

중공단면을 갖는 포물선형 아치의 면내 자유진동 해석

In-plane Free Vibration Analysis of Parabolic Arches with Hollow Section

이 태 은* · 이 병 구† · 이 재 영** · 윤 희 민***

Tae Eun Lee, Byoung Koo Lee, Jae Young Lee and Hee Min Yoon

(2007년 11월 30일 접수 ; 2008년 1월 9일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Parabolic Arches(포물선형 아치), Hollow Section(중공단면), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

The differential equations governing free vibrations of the elastic arches with hollow section are derived in polar coordinates, in which the effect of rotatory inertia is included. Natural frequencies is computed numerically for parabolic arches with both clamped ends and both hinged ends. Comparisons of natural frequencies between this study and reference are made to validate theories and numerical methods developed herein. The lowest four natural frequency parameters are reported, with the rotatory inertia, as functions of three non-dimensional system parameters: the breadth ratio, the thickness ratio and the rise to span length ratio.

1. 서 론

아치는 축력이 거동을 지배하므로 구조적으로 매우 이상적일 뿐만 아니라 그 외관이 수려하여 예부터 교량 등 각종 구조물에 많이 이용되었다. 특히 재료공학의 발달로 인한 강구조물의 경량화는 지점간의 길이가 긴 아치교의 가설을 가능하게 하여 자연경관과 조화를 이루는 아름다운 아치교가 등장하게 되었다.

비교적 세장한 아치 구조에 풍압이 가해지는 경우 와류에 의하여 진동이 발생할 수 있으며, 와류에 의한 진동이 구조물의 고유진동수와 유사해지면 다소 큰 진폭의 진동이 발생하게 된다. 이러한 진동은 반복적으로 큰 응력을 발생시켜 피로파괴의 원인이 되

거나 좌굴에 대한 안전도가 저하하여 종종 구조물의 안정성에 문제를 일으키기도 한다. 아치교를 통행하는 차량에 의해 발생하는 동하중도 이와 유사한 문제점을 야기할 수 있다. 이렇듯 아치교의 거동에 있어서 진동이 미치는 영향은 상당히 크기 때문에 아치구조의 동적거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요구되고 있다⁽¹⁾.

아치의 자유진동해석에 관한 연구는 많은 연구자들에 의해 진행되어 왔으며, 최근에는 연구분야도 세분화되고 있는 추세이다. 기존의 연구에서 아치의 선형은 이론적 전개가 비교적 용이한 원호아치를 주 대상으로 하였으나^(2,3) 최근에는 다양한 선형에 대한 연구가 활발히 수행되고 있다^(4,5). 또한 아치의 구조적 안정성을 향상시킬 수 있는 단면형상에 대한 연구가 활발히 수행되고 있으며^(6,7), 대표적인 예로 아치의 단면을 중공단면으로 채택하는 경우 폭과 두께를 적절히 조절함으로써 동일한 단면적에서 보다 큰 동적안정성을 갖는 단면을 채택할 수 있다.

이 연구에서는 원호아치에 비해 구조적 안정성이

† 교신저자: 정희원, 원광대학교 토목환경공학과

E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr

Tel : (063)850-6718, Fax : (063)857-7204

* 정희원, 원광대학교 토목환경공학과

** 호원대학교 토목환경공학과

*** 정희원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

우수하여 널리 사용되고 있는 포물선 아치를 대상 아치의 선형으로 채택하였으며, 아치의 단면 또한 현장에서 가장 많이 이용되는 중공원형단면과 중공사각형 단면을 대상으로 하였다. 중공단면을 갖는 포물선 아치의 면내 자유진동특성을 고찰함으로써 아치의 진동에 대한 이론을 확장하고, 실제 아치구조물의 설계 및 공용중인 아치구조의 유지관리에 더욱 정확한 동적해석자료를 제공하는데 이 연구의 목적이 있다.

2. 수학적 모형

2.1 단면의 정의

일반적으로 강재를 이용한 아치는 중공원형단면과 중공사각형단면이 그 주류를 이루고 있다. 중공원형 단면은 단면이 원통면을 이루고 있기 때문에 평판에 비해 국부좌굴에 대해 유리하고, 단면에 방향성이 없기 때문에 설계가 간편하다. 이러한 장점으로 인해 중공원형단면은 많은 아치구조물에 다양하게 이용되고 있으나 공장에서 제작되는 직경과 두께에 한계가 있으므로 원형단면의 사용이 불가능한 경우에는 평판을 조립하여 제작하는 사각형단면이 주로 이용된다.

이 연구에서 대상 아치의 단면은 중공원형단면과 중공사각형단면을 대상으로 하였으며, 사각형단면은 원형단면과 이론전개가 유사한 정방형 사각형단면 즉, 정사각형단면을 채택하였다.

Fig. 1은 이 연구에서 채택한 중공단면을 나타낸 것이다. (a)는 중공원형단면을 나타낸 것으로 d 는 원의 외직경, t 는 두께이며, (b)는 정사각형단면을 나타낸 것으로 d 는 정사각형의 한 변의 길이, t 는 두께이다.

이 연구에서는 단면의 폭(원형단면의 외경)에 대한 두께의 비를 다음과 같이 두께비 α 로 정의하였다.

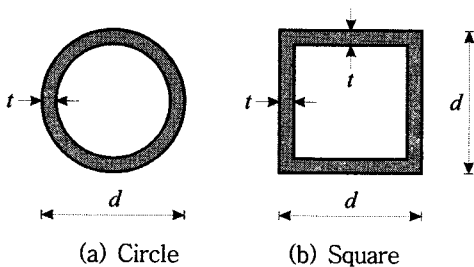


Fig. 1 Hollow section

$$\alpha = \frac{t}{d} \quad (1)$$

위의 식을 이용하면 원형단면 및 정사각형단면의 단면적 A 와 단면2차모멘트 I 는 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = A_1(1 - c^2) \quad (2)$$

$$I = I_1(1 - c^4) \quad (3)$$

위의 식에서 $c = 1 - 2\alpha$ 이며, A_1 과 I_1 은 속이 채워진 중실단면의 단면적과 단면2차모멘트로 다음의 식들과 같다.

$$\text{정사각형단면 : } A_1 = d^2, I_1 = d^4/12 \quad (4a)$$

$$\text{원형단면 : } A_1 = \pi d^2/4, I_1 = \pi d^4/64 \quad (4b)$$

2.2 지배미분방정식

Fig. 2는 지점간 길이 l , 아치의 높이 h , $y = y(x)$ 의 임의 선형을 갖는 본 연구대상 아치의 기하학적 형상을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 (x, y) 는 아치의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며, ρ 및 ϕ 는 부재축상의 임의점에서 곡률반경 및 x 축과 곡률중심 방향이 이루는 각도이다. v , w 및 ψ 는 각각 접선방향 변위, 곡률중심방향 변위 및 단면 회전각을 나타내며, α 는 중심각, ϕ_L 및 ϕ_R 은 각각 좌단과 우단에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이다.

Fig. 2에 보인 아치가 면내 진동하게 되면 진동변위에 의하여 아치단면에는 축방향력 N , 전단력 Q 및 휨모멘트 M 의 합응력이 발생한다. 또한 질량을 가지고 있는 아치가 진동함으로써 아치의 미소요

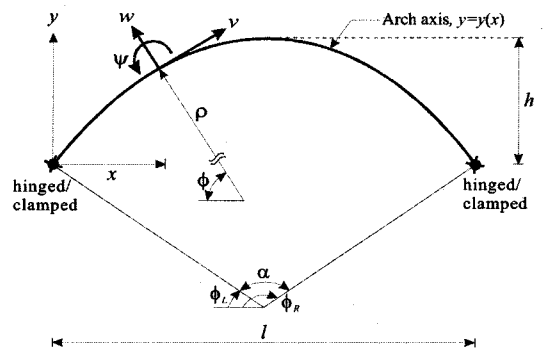


Fig. 2 Arch geometry

소에는 곡률중심방향 관성력 F_w , 접선방향 관성력 F_v 및 회전관성우력 C_ψ 가 발생한다.

Fig. 3은 아치의 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력을 나타낸 것이며, 아치의 미소요소에 작용하는 이 힘들의 접선방향, 곡률중심방향 및 모멘트에 대한 동적 평형방정식을 세우면 각각 다음의 식 (5)~(7)과 같다.

$$\frac{dN}{d\phi} + Q + \rho F_v = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dQ}{d\phi} - N + \rho F_w = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\phi} - Q - C_\psi = 0 \quad (7)$$

변위에 의해 발생하는 합응력 및 단면회전각은 다음의 식들과 같이 나타낼 수 있다⁽⁸⁾.

$$N = \frac{EA}{\rho} \left[(v' + w) + \frac{r^2}{\rho^2} (w'' + w) \right] \quad (8)$$

$$M = \frac{EA r^2}{\rho} (w'' + w) \quad (9)$$

$$\psi = \frac{1}{\rho} (w' - v) \quad (10)$$

여기서 ($'$)= $d/d\phi$ 이며, E 는 탄성계수, A 는 단면적, r 은 단면회전반경($r = \sqrt{I/A}$)이다.

아치의 진동을 조화진동으로 가정하면 곡률중심방향 관성력 F_w , 접선방향 관성력 F_v 및 회전관성우력 C_ψ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽⁹⁾.

$$F_w = m\omega_i^2 w \quad (11)$$

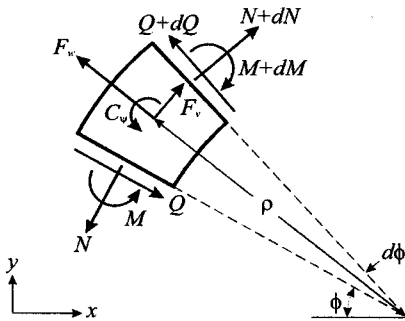


Fig. 3 Loads on an arch element

$$F_v = m\omega_i^2 v \quad (12)$$

$$C_\psi = m\omega_i^2 \frac{r^2}{\rho} (w' - v) \quad (13)$$

여기서 m 은 부재재료의 단위길이당 질량이며, ω_i 는 고유각진동수(rad/sec), i 는 모드번호이다.

식 (8), (9)로부터 $dN/d\phi$ 와 $dM/d\phi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{EA}{\rho} \left[(v'' + w') + \frac{r^2 \rho'}{\rho^2} (w''' + w') - \frac{\rho'}{\rho} (v' + w) - \frac{3r^2 \rho'}{\rho^3} (w'' + w) \right] \quad (14)$$

$$\frac{dM}{d\phi} = -\frac{EA r^2}{\rho^2} \left[(w''' + w') - \frac{2\rho'}{\rho} (w'' + w) \right] \quad (15)$$

식 (13), (15)를 식 (7)에 대입하고, 전단력 Q 에 대하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$Q = -\frac{EA r^2}{\rho^3} \left[(w''' + w') - \frac{2\rho'}{\rho} (w'' + w) \right] - \frac{m\omega_i^2 r^2}{\rho} (w' - v) \quad (16)$$

식 (16)으로부터 $dQ/d\phi$ 를 구하면 다음 식과 같다.

$$\frac{dQ}{d\phi} = -\frac{EA r^2}{\rho^3} \left[(w'''' + w'') - \frac{5\rho'}{\rho} (w''' + w') + 2 \left(\frac{4\rho'^2}{\rho} - \rho'' \right) (w'' + w) \right] - \frac{m\omega_i^2 r^2}{\rho} \left[(w'' - v') - \frac{\rho'}{\rho} (w' - v) \right] \quad (17)$$

이 연구에서는 수치해석 과정의 효율성을 높이기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (18)$$

$$\eta = \frac{y}{l} \quad (19)$$

$$\delta = \frac{w}{l} \quad (20)$$

$$\lambda = \frac{v}{l} \quad (21)$$

$$f = \frac{h}{l} \quad (22)$$

$$b = \frac{d}{l} \quad (23)$$

$$\zeta = \frac{\rho}{l} \quad (24)$$

$$s = \frac{l}{r} \quad (25)$$

$$C_i = \pi^3 \omega_i l \sqrt{m/(EA)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (26)$$

위의 식에서 (ξ, η) 는 무차원 직교좌표계, δ, λ, f, b 는 w, v, h, d 를 지점간 길이 l 로 정규화 한 것이고, ζ 는 무차원 곡률반경, s 는 세장비, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (17), (8) 및 식 (11)을 식 (6)에, 식 (14), (16) 및 식 (12)를 식 (5)에 대입하고, 식 (18)~(26)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음의 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \delta'''' = & a_1 \delta'''' + \left(a_2 + \frac{a_3}{\pi^6} C_i^2 \right) \delta'' + \left(a_1 + \frac{a_4}{\pi^6} C_i^2 \right) \delta' \\ & + \left(a_5 + \frac{a_6}{\pi^6} C_i^2 \right) \delta + \left(a_7 - \frac{a_3}{\pi^6} C_i^2 \right) \lambda' - \frac{a_4}{\pi^6} C_i^2 \lambda \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \lambda'' = & a_8 \delta'' + \left(\frac{a_9}{\pi^6} C_i^2 - 1 \right) \delta' + a_{10} \delta + a_{11} \lambda' \\ & + \frac{a_{12}}{\pi^6} C_i^2 \lambda \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, 미분방정식 식 (27), (28)에 포함된 계수 $a_1 \sim a_{12}$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{5\zeta'}{\zeta} \quad (29a)$$

$$a_2 = \frac{2\zeta''}{\zeta} - \frac{8\zeta'^2}{\zeta^2} - 2 \quad (29b)$$

$$a_3 = -\zeta^2 \quad (29c)$$

$$a_4 = \zeta \zeta' \quad (29d)$$

$$a_5 = \frac{2\zeta''}{\zeta} - \frac{8\zeta'^2}{\zeta^2} - s^2 \zeta^2 - 1 \quad (29e)$$

$$a_6 = s^2 \zeta^4 \quad (29f)$$

$$a_7 = -s^2 \zeta^2 \quad (29g)$$

$$a_8 = \frac{\zeta'}{s^2 \zeta^3} \quad (29h)$$

$$a_9 = \frac{1}{s^2} \quad (29i)$$

$$a_{10} = \frac{\zeta'}{\zeta} \left(1 + \frac{1}{s^2 \zeta^2} \right) \quad (29j)$$

$$a_{11} = \frac{\zeta'}{\zeta} \quad (29k)$$

$$a_{12} = -\frac{s^2 \zeta^2 + 1}{s^2} \quad (29l)$$

미분방정식 식 (27), (28)을 수치해석하기 위해서는 단부조건에 대한 경계조건이 필요하며, 아치의 단부조건에 따른 경계조건을 식 (18)~(21)의 무차원 변수들을 이용하여 유도하면 다음과 같다.

회전단인 경우 접선방향 변위 v , 곡률중심방향 변위 w 및 휨모멘트 M 이 "0"이므로 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\lambda = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (30)$$

$$\delta = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (31)$$

$$\delta' = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (32)$$

고정단은 접선방향 변위 v , 곡률중심방향 변위 w 및 단면회전각 ψ 가 "0"이므로 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\lambda = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (33)$$

$$\delta = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (34)$$

$$\delta' = 0, \quad \phi = \phi_L \text{ 또는 } \phi = \phi_R \text{ 에서} \quad (35)$$

2.3 형상함수

앞에서 유도한 무차원 미분방정식 식 (27), (28)을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_{12}$ 에 포함되어 있는 형상함수 ζ', ζ'' 이 정의되어야 한다. 이 형상함수는 주어진 곡선부재의 선형이 주어지면 다음과 같이 대수적으로 산출할 수 있다. Fig. 2에 주어진 $y = y(x)$ 의 선형식은 무차원 변수인 식 (18), (19)에 의하여 다음과 같이 무차원 선형식으로 나타낼 수 있다.

$$\eta = \eta(\xi) \quad (36)$$

아치축상 임의점에서 x 축과 곡률중심방향 η 는 각도 ϕ 와 곡률반경 ζ 는 다음 식들과 같다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) \quad (37)$$

$$\zeta = \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2} \quad (38)$$

나머지 변화곡률계수 ζ' 과 ζ'' 은 다음 식들로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \quad (39)$$

$$\zeta'' = \frac{d\zeta'}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \quad (40)$$

이상의 식 (36)~(40)을 이용하면 주어진 곡선부재의 선형에 대한 변화곡률항인 ζ' 과 ζ'' 을 계산할 수 있다. 이 연구에서는 대상 아치의 선형으로 포물선형의 아치를 채택하였다.

포물선 아치에서 Fig. 2와 같은 아치의 기하학적 제변수가 정의되면 다음과 같이 포물선 아치의 무차원 선형식을 얻을 수 있다.

$$\eta = -4f\xi(\xi - 1), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (41)$$

식 (41)을 식 (37)~(40)에 대입하고 정리하면 포물선 아치의 자유진동해석에서 필요한 ϕ 및 곡률항 ζ , ζ' , ζ'' 을 각각 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}[-4f(2\xi - 1)] \quad (42)$$

$$\zeta = \frac{1}{8f} [1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (43)$$

$$\zeta' = \frac{3}{2}(2\xi - 1)[1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (44)$$

$$\zeta'' = \frac{3}{8f} [1 + 64f^2(2\xi - 1)^2][1 + 16f^2(2\xi - 1)^2]^{3/2} \quad (45)$$

포물선 아치의 중심각 α 는 식 (42)를 이용하여 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha = 2 \tan^{-1}(4f) \quad (46)$$

3. 수치해석 방법

이상에서 유도한 상미분방정식 식 (27), (28)에 경계조건식 식 (30)~(35) 및 형상 함수식 식 (42)~(45)를 대입하면 포물선 아치의 무차원 고유진동수 C_i 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다. 이 연구에서 이용한 수치해석방법을 간략히 요약하면 다음과 같다.

(1) 유도된 미분방정식 식 (27), (28)을 수치적분하기 위해서는 6개의 초기조건이 필요하나 각 단부조건별로 3개의 초기조건만을 알고 있다. 따라서 각 단부조건별로 기지의 경계조건식과 미지의 경계조건식을 포함하는 3조의 초기치 문제로 형성한다.

(2) 미분방정식에는 불확정량인 무차원 고유진동수 C_i 가 포함되어 있으므로 이를 C 로 가정하여 미분방정식에 대입한다.

(3) 가정한 3조의 초기조건별로 좌단($\phi = \phi_L$)에서 우단($\phi = \phi_R$)까지 3회의 수치적분을 시행하며, 수치적분의 결과로 아치축의 임의좌표에서 $\delta(\phi)$, $\delta'(\phi)$, $\delta''(\phi)$, $\delta'''(\phi)$, $\lambda(\phi)$, $\lambda'(\phi)$ 가 산정된다.

(4) 3조의 초기치문제로 형성하였으므로 이들 사이의 선형결합에 의해 우단의 경계조건을 만족하는 행렬식 D 를 산정할 수 있으며, (2)의 과정에서 가정한 C 값이 대상 구조의 고유한 값이라면 수치적분의 결과로 우단($\phi = \phi_R$)에서 얻어지는 값들은 단부조건별 경계조건식을 만족해야 한다.

(5) (4)의 과정에서 행렬식 $D \neq 0$ 이면 앞에서 가정한 C 값은 대상아치에 대한 고유치가 아니므로 불확정량 C 를 $C + \Delta C$ 로 재가정하여 위의 과정을 반복시행한다. 이러한 과정에서 $D = 0$ 인 정확한 C 값을 찾을 수 없으므로 이 논문에서는 $|D| = 1 \times 10^{-8}$ 이면 해는 수렴한 것으로 판단하고, 해석결과를 산출하였다.

(6) $C_1 = C$ 와 $C_2 = C + \Delta C$ 에 대한 행렬값을 D_1 과 D_2 라 하고, $D_1 \times D_2 < 0$ 이면 C_1 과 C_2 사이의 고유치가 존재하므로 비선형해법에 의하여 대상 아치의 무차원 고유진동수 C_i 를 산정한다.

(7) 가정한 무차원 고유진동수 C 를 고유치에 근접시키는 비선형해법의 시행과정에서 $D_1 \times D_2 < 0$ 인 C_1 , C_2 가 $|(C_1 - C_2)/C_1| < 10^{-5}$ 을 만족하면 해는 수렴한 것으로 판단하고 해석결과를 산출하였다.

이 연구에서는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치적분하기 위하여 미분방정식의 수치해

석 방법들 중 정확도가 매우 높아 진동문제에 많이 이용되고 있는 4차 Runge-Kutta법⁽¹⁰⁾을 이용하였다. 또한 지배미분방정식에 포함된 고유진동수를 산정하기 위한 시행착오적 행렬값 탐사법에서 가정한 고유진동수를 참 값의 고유진동수에 근접시키는 수치해석 기법을 적용하였으며, 이 연구에서는 비선형 방정식의 수치해석 방법으로 효율성이 높아 많은 공학문제에 이용되고 있는 Regula-Falsi법⁽¹⁰⁾을 이용하였다.

4. 수치해석 결과 및 토의

이 연구에서는 수치해석을 실시하기 전에 먼저 미분방정식의 수치적분 과정에서 아치 중심각의 분할에 따른 수치해의 정확성을 평가하기 위하여 수렴해석을 실시하였다.

Fig. 4는 고정-고정의 단부조건을 갖고, $b=0.05$, $\alpha=0.01$, $f=0.3$, $s=57.14$ 인 원형단면 아치의 수렴 해석 결과를 나타낸 것이다. 수렴해석 결과 아치 중심각의 분할개수가 약 40($1/\Delta\alpha=0.025$)인 경우 제 4모드까지의 모든 수치해는 유효숫자 4자리까지 수렴하였으나 이 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 분할개수를 100($1/\Delta\alpha=0.01$)으로 하여 모든 결과를 산출하였다.

Fig. 5는 이 연구에서 비선형 방정식의 해법에 이용한 Regula-Falsi법에 의하여 무차원 고유진동수 C_i 를 산정하는 과정을 나타낸 그림이다. 대상 아치는 회전-회전의 단부조건을 갖고, $b=0.05$, $\alpha=0.02$, $f=0.3$, $s=49.98$ 인 정사각형 단면의 아치이다. 이 그림을 살펴보면 가정한 무차원 고유진동수 C 의 증가에 따라 행렬값 D 는 감소와 증가를 반복하며, $D=0$ 이 되는 C 값이 존재함을 알 수 있다. 이때의 C 가 대상아치의 고유치이며, 행렬값 D 의 부호가 바뀌는 곳에서 고유치가 존재하므로 Regula-Falsi법을 이용하여 무차원 고유진동수를 산정하였다. 이러한 과정을 반복적으로 수행하면 구하고자 하는 차수의 무차원 고유진동수를 산정할 수 있으며, 이 연구에서는 최저차 4모드의 무차원 고유진동수를 산정하였다.

Table 1은 이 연구의 이론적 전개과정 및 수치해석과정의 타당성을 검증하기 위하여 문헌⁽⁹⁾의 결과와 본 연구의 수치해를 비교한 것이다. Table 1에 나타낸 문헌의 결과는 세장비 $s=10, 20, 30, 50$,

100인 경우에 대한 값이므로 이 연구에서는 단면폭비 b 와 두께비 α 를 적절히 조절하여 문헌의 변수와 일치시켰다. 이 표를 살펴보면 이 연구에서 채택한 원형 및 정사각형 단면의 단면폭과 두께를 적절히 조절하여 문헌의 세장비와 일치시킨 결과 원형단면의 경우 최대오차가 0.46%, 정사각형 단면의 경우 최대오차가 0.37%로 매우 작게 나타나 이 연구에서 유도한 이론식 및 수치해석과정의 타당성을 검증할 수 있다.

Table 2는 두께비 α 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. 고정-고정, $f=0.3$ 인 정사각형단면 아치와 회전-회전, $f=0.3$ 인 원형단면 아치의 특정 단면폭비 b 에 대하여 α 를 변

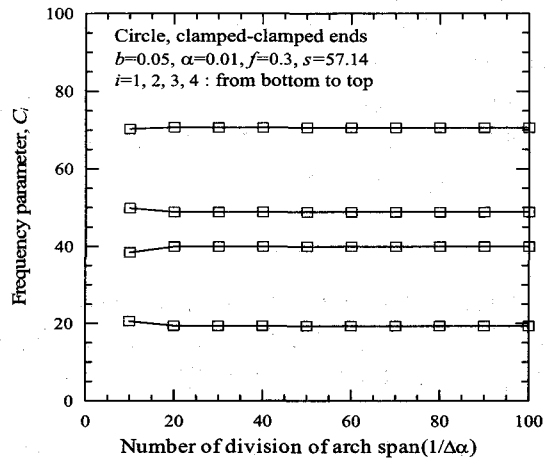


Fig. 4 Convergence analysis

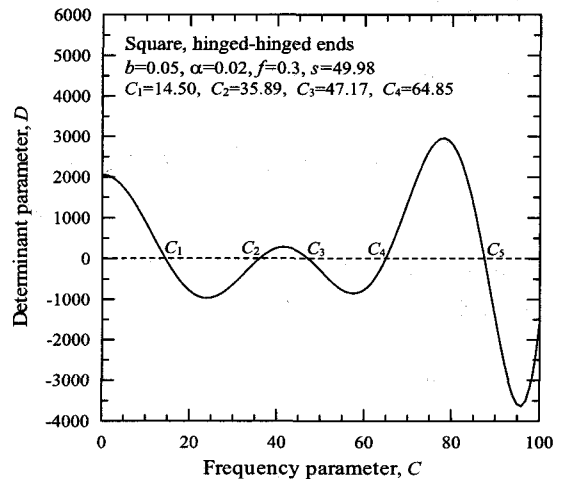


Fig. 5 D-C curves

Table 1 Comparisons of natural frequencies C_i between this study and reference⁽⁹⁾

Geometry of arch	Circle		Square		s	C_i	This study		Reference ⁽⁹⁾	Deviation(%)*	
	b	α	b	α			Circle	Square		Circle	Square
Hinged - hinged $f=0.1$	0.3	0.06	0.25	0.02	10	C_1	10.99	10.98	10.94	0.46	0.37
						C_2	28.78	28.75	28.72	0.21	0.10
						C_3	33.83	33.80	33.73	0.30	0.21
	0.15	0.06	0.13	0.06	20	C_1	16.34	16.33	16.30	0.25	0.18
						C_2	34.76	37.75	34.71	0.14	0.12
						C_3	62.82	62.78	62.75	0.11	0.05
	0.1	0.06	0.09	0.1	30	C_1	22.40	22.42	22.37	0.13	0.22
						C_2	35.73	35.73	35.71	0.06	0.06
						C_3	80.37	80.38	80.31	0.07	0.09
	0.06	0.06	0.05	0.02	50	C_1	35.20	35.16	35.15	0.14	0.03
						C_2	26.25	36.25	36.23	0.06	0.06
						C_3	83.13	83.13	83.10	0.04	0.04
	0.03	0.06	0.025	0.02	100	C_1	36.47	36.47	36.45	0.05	0.05
						C_2	64.82	64.76	64.76	0.09	0.00
						C_3	89.10	89.07	89.06	0.05	0.01

* Deviation(%)=(this study - reference) / reference × 100

화시키면서 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다. α 값이 증가하면 중공단면의 속이 점점 채워지게 되며, $\alpha=0.5$ 이면 속이 완전히 채워진 중실단면을 의미한다. 이 표를 살펴보면 α 값의 증가에 따라 정사각형단면 및 원형단면의 무차원 고유진동수는 감소함을 알 수 있으며, $\alpha=0.5$ 인 중실단면의 경우 $\alpha=0.01$ 인 중공단면에 비하여 정사각형단면의 경우 평균 28.42%, 원형단면의 경우 평균 28.15% 정도 제 1무차원 고유진동수가 감소한 것을 알 수 있다. 이는 중공단면의 외경은 그대로이고 두께가 증가하면 단면적 A 와 단면2차모멘트 I 가 증가하게 되는데 이 때 A 의 증가율이 I 의 증가율보다 크게 나타나 단면회전반경 r 값이 감소하게 되며, 이는 세장비의 증가를 가져와 결론적으로 무차원 고유진동수가 감소하는 것으로 분석되었다. 따라서 중공단면을 갖는 아치구조의 고유진동수를 증가시키기 위하여 단면의 두께만을 증가시키는 것은 바람직하지 않으며, 단면폭과 두께를 적절히 조절함으로써 동일한 단면적에서 보다 큰 고유진동수를 갖는 단면의 선택이 가능할 것으로 판단된다.

이 연구에서는 동일한 단면적에서 폭과 두께의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하기 위하여 중공단면의 단면적이 일정값이 되도록 폭과 두께를 변화시키면서 무차원 고유진동수를 산정하였다.

Fig. 6은 단면적 A 가 일정한 경우에 두께비 α 의

Table 2 Effect of thickness ratio α on C_i

Geometry of arch	b	α	Natural frequency, C_i				Deviation (%)*
			C_1	C_2	C_3	C_4	
Square, C-C, $f=0.3$	0.01	0.01	4.50	9.73	16.68	24.97	0.00
		0.02	4.45	9.63	16.52	24.72	1.11
		0.05	4.32	9.35	16.03	24.00	4.00
		0.1	4.12	8.90	15.26	22.86	8.44
		0.2	3.75	8.11	13.90	20.83	16.67
		0.5	3.21	6.95	11.92	17.88	28.67
	0.05	0.01	22.26	43.46	51.94	80.15	0.00
		0.02	22.05	43.28	51.63	79.52	0.94
		0.05	21.41	42.69	50.80	77.57	3.82
		0.1	20.40	41.52	49.71	74.27	8.36
		0.2	18.61	38.81	48.41	68.10	16.40
		0.5	15.99	33.95	47.40	58.78	28.17
Circle, H-H, $f=0.3$	0.02	0.01	5.10	12.73	23.11	35.97	0.00
		0.02	5.05	12.61	22.88	35.62	0.98
		0.05	4.90	12.24	22.21	34.61	3.92
		0.1	4.67	11.65	21.14	32.98	8.43
		0.2	4.25	10.61	19.26	30.09	16.67
		0.5	3.65	9.10	16.52	25.85	28.43
	0.1	0.01	25.01	46.88	62.00	87.61	0.00
		0.02	24.77	46.87	61.44	87.60	0.96
		0.05	24.07	46.83	59.77	87.57	3.76
		0.1	22.95	46.74	57.14	87.52	8.24
		0.2	20.96	46.46	52.56	87.37	16.19
		0.5	18.04	43.90	47.95	80.05	27.87

* Deviation(%)=[($C_{i(\alpha=0.01)} - C_i$) / $C_{i(\alpha=0.01)}$] × 100

변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. 단면적 A 가 일정하기 위해서는 α 가 증가할 때 단면폭비 b 가 감소하여야 하며, 식 (2)로부터 $b = \sqrt{(A/I^2)/(1-c^2)}$ 로 산정할 수 있다. 고정-고

정, $A/l^2=0.005$, $f=0.3$ 인 원형단면 아치를 대상으로 두께비 α 를 변화시키면서 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 고찰하였다. α 값이 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 감소하게 되며, 작은 α 에서 그 감소율은 더 크게 나타났다. 동일한 단면적에서는 α 값이 증가하면 b 가 감소하게 되므로 세장비가 증가하여 무차원 고유진동수가 감소하는 것으로 판단된다. 따라서 동일한 단면적을 갖는 중공단면의 경우 단면의 두께가 얇고, 폭이 클수록 진동에 대한 강성이 크음을 알 수 있다.

한편 Fig. 6에서 ■로 표시된 점은 두 개의 고유진동수 곡선이 만나는 점으로 두 곡선이 만나기 전까지 진동형을 살펴보면 제 1모드와 제 3모드는 대칭진동모드, 제 2모드와 제 4모드는 역대칭진동모드이며, 두 곡선이 만난 후에는 제 1모드와 제 3모드가 역대칭진동모드, 제 2모드와 제 4모드가 대칭진동모드로 전환된다. 따라서 두 곡선이 만나는 ■점의 제원을 갖는 아치는 동일한 고유진동수에서 2개의 진동모드가 존재하게 된다. 이후의 그림들에 표시된 ■도 Fig. 6과 동일한 의미를 갖는다.

Fig. 7은 단면적 A 가 일정할 때 단면폭비 b 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. 단면적 A 가 일정하기 위해서는 b 가 증가할 때 두께비 α 가 감소해야 하며, 식 (2)로부터 $\alpha = [1 - \sqrt{1 - (A/l^2)/b^2}]/2$ 로 산정할 수 있다. 회전-회전, $A/l^2=0.001$, $f=0.3$ 인 정사각형단면 아치를 대상으로 단면폭비 b 를 변화시키면서 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다. 단면폭비 b 가 증가하면

무차원 고유진동수 C_i 는 증가하며, 작은 b 값에서 증가율은 더 크게 나타났다. b 값이 증가하면 단면회전반경이 증가하며 이는 세장비의 감소를 가져와 무차원 고유진동수가 증가하는 것으로 분석되었다. 이때 작은 b 값에서 세장비가 매우 크게 감소하고, 일정 b 값에 도달하면 세장비의 변화가 거의 없게 되며, 이로 인하여 작은 b 값에서 C_i 값의 증가가 크게 나타나는 것으로 판단된다. 예로서 제 1모드의 무차원 고유진동수 곡선은 처음에는 매우 크게 증가하나 점차 증가율이 감소하며, 특정값에 도달하면 증가율이 매우 작음을 알 수 있다. 또한 제 4모드의 무차원 고유진동수 곡선은 증가하다가 특정값에서 최대값을 보이고 이후에는 감소한다. 따라서 중공단면 아치의 진동에 대한 강성을 증가시키기 위하여 단면 폭을 증가시키는 것은 매우 효과적인 방법이나 단면

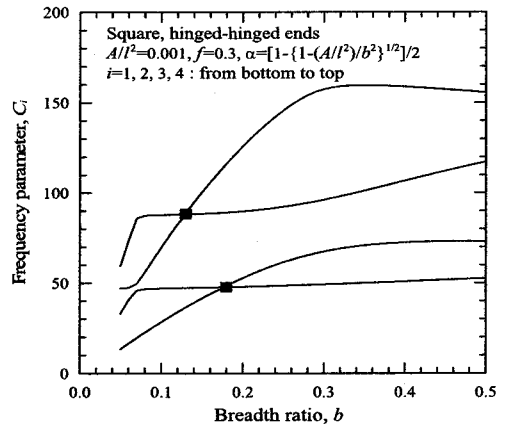


Fig. 7 $C_i - b$ curves

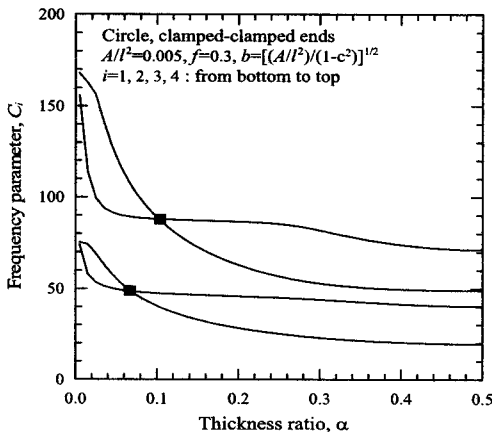


Fig. 6 $C_i - \alpha$ curves

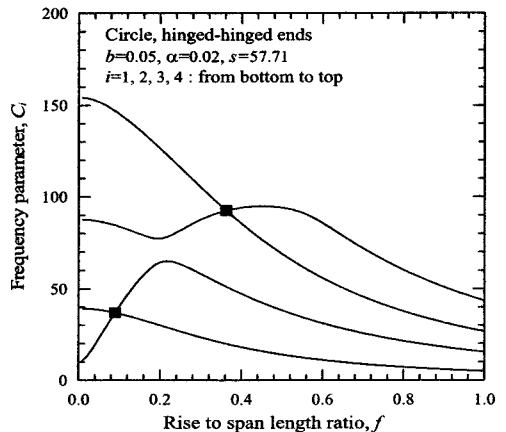


Fig. 8 $C_i - f$ curves

폭을 특정 값 이상으로 증가시키는 것은 무의미하며, 이 연구의 결과를 이용하면 동일한 단면적에서 진동에 대한 강성이 보다 큰 중공단면의 폭과 두께를 결정할 수 있을 것으로 사료된다.

Fig. 8은 아치높이비 f 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. 회전-회전의 단부조건을 갖고, $b=0.05$, $\alpha=0.02$, $s=57.71$ 인 원형 단면 아치를 대상으로 높이비 f 를 변화시키면서 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다. 아치높이비 f 가 증가하면, 즉 높은 아치일수록 낮은 아치에 비해 무차원 고유진동수 C_i 가 작음을 알 수 있다. 그러나 일부구간에서는 f 가 증가함에 따라 C_i 가 증가하는 구간이 있는데 이는 아치높이가 어느 정도 증가할 때 까지는 면내진동에 대한 강성이 커져서 고유진동수가 증가하는 것으로 판단된다. 이러한 결과를 이용하면 동일 제원을 갖는 아치에 비하여 진동에 대한 강성이 상대적으로 큰 아치높이를 결정할 수 있을 것으로 사료된다.

5. 결 론

이 논문은 중공단면을 갖는 포물선형 아치의 면내 자유진동에 관한 연구이다. 이 연구에서는 중공단면의 형상으로 원형단면과 정사각형단면을 채택하였으며, 원호아치에 비해 구조적 안정성이 우수한 포물선형 아치를 대상아치의 선형으로 결정하였다. 대상아치의 면내 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하고, 미분방정식을 효율적으로 해석하여 정확한 고유진동수를 산정할 수 있는 수치해석 알고리즘을 개발하였으며, 제 변수 변화에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다. 이 연구의 수치해석 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 중공단면의 단면폭(원형단면의 외경)은 일정하고 두께가 증가하면 고유진동수는 감소한다.
- (2) 단면적이 일정한 중공단면의 두께가 증가하면 고유진동수는 감소한다.
- (3) 단면적이 일정한 중공단면의 단면폭(원형단면의 외경)이 증가하면 고유진동수는 증가한다.
- (4) 이 연구의 결과를 이용하여 중공단면의 폭과 두께를 적절히 조절하면 동일한 단면적에서 진동에 대한 강성이 우수한 아치의 단면을 결정할 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- (1) Hikami, Y., 1982, "Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation", IHI Report, Vol. 6, pp. 47~52.
- (2) Johnson, E. R., 1982, "Load-Frequency Relations for a Clamped Shallow Circular Arch", AIAA Journal, Vol. 20, pp. 1763~1765.
- (3) Auciello, N. M. and De Rosa, M. A., 1994, "Free Vibrations of Circular Arches: A Review", Journal of Sound and Vibration, Vol. 176, No. 4, pp. 433~458.
- (4) Wilson, J. F. and Lee, B. K., 1995, "Free Vibrations of Catenary Arches with Unsymmetric Axes", Structural Engineering and Mechanics, An International Journal, Vol. 3, No. 5, pp. 511~525.
- (5) Lee, B. K., Lee, Y. S. and Oh, S. J., 2000, "Free Vibrations of Tapered Cantilever Arches with Variable Curvature", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 10, No. 2, pp. 353~360.
- (6) Maurizi, M. J., Rossi R. E. and Belles, P. M., 1991, "Lowest Natural Frequency of Clamped Circular Arcs of Linearly Tapered Width", Journal of Sound and Vibration, Vol. 144, No. 3, pp. 357~361.
- (7) Lee, B. K. and Oh, S. J., 1996, "Planar Free Vibrations of Stepped Arches", Proceeding of 3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Seoul, pp. 815~820.
- (8) Borg, S. F. and Gennaro, J. J., 1959, Advanced Structural Analysis, New Jersey: Van Nostrand.
- (9) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature", Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp. 75~89.
- (10) Al-Khafaji, A. W. and Tooley, J. R., 1986, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc.