

# 점탄성 물질의 온도와 주파수 의존성을 고려한 구속형 제진보의 최대 손실계수 설계

## Optimal Layout Design of Frequency- and Temperature-dependent Viscoelastic Materials for Maximum Loss Factor of Constrained-Layer Damping Beam

이 두 호\*

Doo-Ho Lee

(2007년 10월 12일 접수 ; 2008년 1월 24일 심사완료)

**Key Words** : Viscoelastic Material(점탄성물질), Constrained-layer Damping(구속형 감쇠), Loss Factor(손실계수), Frequency- and Temperature-dependent Dynamic Characteristics(주파수 및 온도 의존적 동특성), Damping Layer Optimization(감쇠배치 최적화)

### ABSTRACT

Optimal damping layout of the constrained viscoelastic damping layer on beam is identified with temperatures by using a gradient-based numerical search algorithm. An optimal design problem is defined in order to determine the constrained damping layer configuration. A finite element formulation is introduced to model the constrained layer damping beam. The four-parameter fractional derivative model and the Arrhenius shift factor are used to describe dynamic characteristics of viscoelastic material with respect to frequency and temperature. Frequency-dependent complex-valued eigenvalue problems are solved by using a simple re-substitution algorithm in order to obtain the loss factor of each mode and responses of the structure. The results of the numerical example show that the proposed method can reduce frequency responses of beam at peaks only by reconfiguring the layout of constrained damping layer within a limited weight constraint.

### 기 호 설 명

$b$  : 설계변수(design variable)  
 $H_1$  : 보의 두께  
 $H_2$  : 제진층의 두께  
 $H_3$  : 구속층의 두께  
 $k_i$  : 모달강성(generalized modal stiffness)  
 $K$  : 복소강성행렬(complex stiffness matrix)

$m_i$  : 모달질량(generalized modal mass)  
 $x$  : 변위(displacement)  
 $y$  : 복소 고유벡터(complex eigenvector)  
 $\mu_i$  : 공진주파수(natural frequency)  
 $\eta_i$  : 손실계수(loss factor)  
 $\lambda$  : 복소 고유값(complex eigenvalues)

### 1. 서 론

구조물이나 기계장치의 진동을 저감하기 위해서 점탄성 물질의 제진재가 많이 쓰이고 있다. 점탄성 물질의 특성을 나타내는 데는 복소계수(complex

\* 교신저자 : 정희원, 동의대학교 기계공학과  
E-mail : dooho@deu.ac.kr  
Tel : (051)890-1658, Fax : (051)890-2232

modulus)가 유용하게 쓰이고 있다. 응력과 변형율과의 복소비례상수로 도입되는 복소계수는 특히 주파수영역에서 점탄성 물질의 특성을 나타내는데 편리하다. 복소계수의 실수성분을 저장계수(storage modulus)라고 부르며 허수성분의 저장계수에 대한 비를 손실계수(loss factor)라고 정의한다. 점탄성 물질의 복소계수는 일반적으로 가진 주파수와 온도에 따라서 큰 변화를 보인다. 그러므로, 제진층을 포함하는 구조물의 응답예측을 위해서 저장계수와 손실계수는 주파수와 온도의 함수로 표시되어야 정확한 동적 해석을 수행할 수 있다.

구조물의 표면에 제진재를 부착하는 방식은 구속형(constrained type)과 비구속형(unconstrained type)으로 나눌 수 있다. 구속형 제진층은 비구속형에 비하여 높은 제진 효율을 얻을 수 있어 큰 진동 감쇠가 요구되는 구조물에 많이 사용되고 있다. 구속형제진층이 부착되어 있는 구조물의 진동응답을 최소화하는 문제는 많은 연구자들이 관심을 갖고 있는 문제이다. Hajella와 Lin<sup>(1)</sup>은 구속형 복합재 외팔보의 최대감쇠를 얻기 위한 구속형제진층의 설계를 유전자 알고리즘을 이용하여 풀었고, Marcelin 등<sup>(2)</sup>도 비슷한 방법으로 복합재 외팔보의 적층순서 등을 최적화 하였다. Ro와 Baz<sup>(3)</sup>는 능동 구속형보에서 제진층무게에 대한 감쇠비를 최대화하는 최적설계문제를 다루었다. 최근에 Kim과 Kim<sup>(4)</sup>은 과도진동응답을 최소화하는 구속형 제진보의 위상최적설계문제를 다루었다. 이들은 점탄성 물질의 동특성을 기술하기 위해 Golla-Hughe-McTavish(GHM) 모델을 사용하였다. Zheng 등<sup>(5)</sup> 등은 또한 유전자 알고리즘을 사용하여 구속형 단순 지지보에 대하여 진동에너지를 최소화하는 제진층 설계 방법을 제시하였다. 그러나 많은 경우 제진층을 모델링 하는데 복소계수나 손실계수를 주파수에 무관한 상수로 가정하거나<sup>(1,2,5)</sup> 온도의 영향을 살펴보지 않았다<sup>(1-5)</sup>. 또한 많은 경우 각 구조모드의 손실계수를 예측할 때 실수 고유벡터를 사용하는 변형율에너지법(modal strain energy method)를 사용하여 손실계수를 근사화하는 방법을 사용한 경우가 많은데 감쇠가 큰 경우 오차가 커진다는 단점이 있다. 저자<sup>(6)</sup>는 선행연구들의 단점을 보완할 수 있도록 분수차 미분모델(fractional derivative model)과 등가강성법을 이용한 비구속형 제진보의 제진재 배치 최적설계에 관한 연구를 수행한

바 있다.

이 논문에서는 이전의 연구를 확장하여 구속형 제진보의 진동응답을 최소화하기 위한 제진층의 최적설계문제를 다룬다. 제진층의 모델링을 위해서는 복소계수와 분수차 미분모델(fractional derivative model)을 이용하고 복소고유값 문제를 정의하여 주파수와 온도에 따른 점탄성 물질의 물성변화를 고려하였다.

## 2. 구속형 제진보의 해석

구속형 제진층을 갖는 보의 해석을 위해서 유한요소법을 이용한 방법을 설명한다. 우선 Fig. 1과 같이 보의 일부분에 구속형 제진층이 부착된 경우를 생각한다. 부분적으로 구속형 제진층이 부착된 보의 해석을 위해서 Fig. 2와 같은 10자유도를 갖는 보요소를 도입한다. 10자유도 보요소의 유한요소 정식화 과정은 참고문헌 (8)에 잘 정리되어 있다. Fig. 2의 변위장에 의한 포텐셜 에너지와 운동에너지 및 외력에 의한 일을 정의한 후, 가상일의 정리를 적용하고 유한요소로 이산화하면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$M\ddot{x} + Kx = F \quad (1)$$

여기서  $M$ 과  $K$ 는 각각 전체 질량행렬 및 강성행렬이고  $x$ 와  $F$ 는 변위벡터와 힘벡터이다. 여기서 전체 강성행렬  $K$ 는 제진층의 강성계수가 복소값을 가지므로 복소행렬이 된다. 고유값 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$Ky = \lambda My \quad (2)$$

위 식에서  $y$ 는 복소 고유벡터이고  $\lambda$ 는 복소 고유값이다.  $i$ -번째 고유벡터  $y_i$ 는 다음과 같은 직교조건을 만족한다.

$$y_i^T M y_j = \delta_{ij} m_j \quad (3)$$

$$y_i^T K y_j = \delta_{ij} k_j \quad (4)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker 델타함수이고  $m_j$ 와  $k_j$ 는 각각  $i$ 번째 모드의 일반화된 모달질량과 모달강성이다. 유일한 고유벡터를 얻기 위해서는 다음과 같이

$m$ 번째 성분을 단위값으로 지정하는 정규화조건 (normalization condition)이 필요하다.

$$y_i^m = 1 \quad (5)$$

다음으로  $i$ 번째 모드의 공진주파수  $\mu_i$ 와 모달 손실 계수  $\eta_i$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_i = \frac{\sqrt{\text{Real}(\lambda_i)}}{2\pi}, \quad \eta_i = \frac{\text{Imag}(\lambda_i)}{\text{Real}(\lambda_i)} \quad (6)$$

위 식에서 *Real*과 *Imag*는 각각 인자의 실수부와 허수부를 의미한다.

복소계수 개념을 이용하면 점탄성 물질의 응력-변형을 관계는 주파수 영역에서 다음과 같이 기술될 수 있다. 온도의 변화에 따른 점탄성 물질의 복소계수 변화는 온도-주파수 중첩원리(temperature-frequency superposition principle)를 이용하면 온도의 영향을 주파수의 영향으로 환산할 수 있고, 환산량은 온도  $T$ 만의 함수인 이동계수  $\alpha(T)$ 로 표

현된다. 대부분의 점탄성 물질에서  $\log \alpha(T)$ 와  $1/T$ 는 비례하는 관계로 모델링 할 수 있고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\log(\alpha(T)) = d_1 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (7)$$

위 식에서  $d_1$ 은 비례상수이고  $T_0$ 는 절대온도로 표시된 기준온도이다.

환산 주파수의 변화에 따른 점탄성 물질의 복소계수는 일차 유리미분모델(fractional derivative model)<sup>(3)</sup>을 이용하면 주파수영역에서 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있다.

$$E^* = E(1+i\eta) = \frac{a_1 + b_1(\text{if } \alpha(T))^\beta}{1 + c_1(\text{if } \alpha(T))^\beta} \quad (8)$$

여기서  $a_1, b_1, c_1, \beta$ 는 물질의 특성을 나타내는 상수이다. 그러므로 상수  $a_1, b_1, c_1, \beta$ 를 알고 있다면 점탄성 물질의 감쇠특성을 식 (8)을 이용하여 주파수 및 온도에 따라서 쉽게 기술할 수 있다. 점탄성 물질의 물질상수  $a_1, b_1, c_1, \beta$ 는 감쇠 특성시험을 여러 환경에 대하여 행한 다음 곡선적합 등을 통하여 결정할 수 있다.

점탄성 물질의 주파수 및 온도에 따른 동특성의 변화를 고려하기 위하여 식 (8)의 복소계수 표현식을 사용하면 식 (2)로 나타내어지는 고유값 문제는 주파수의 함수인 강성행렬을 갖는 문제가 된다. 이와 같은 고유값 문제를 풀기 위해서는 Newton-Rhapson 방법과 같은 반복적인 축차과정이 필요하다. 이 논문에서는 참고문헌 (6)에서 사용된 것과 같이 재대입법을 사용하여 고유값이 특정한 값에 수렴할 때까지 축차과정을 반복하는 방법을 사용하여 고유값 문제를 풀었다. 고유값 문제를 풀면 외력  $F$ 가 작용할 때 구속형 제진보의 강제진동응답을 모드중첩법(modal superposition method)을 사용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x = \sum_{i=1}^{N_m} a_i y_i \quad \text{where} \quad a_i = \frac{y_i^T F}{(\lambda_i - \omega^2) m_i} \quad (9)$$

위 식에서  $N_m$ 은 모드 수이며  $a_i$ 는  $i$ 번째 모드의 좌표이다.

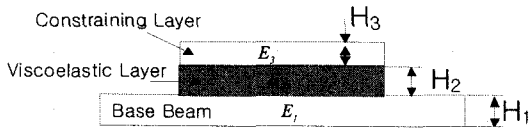
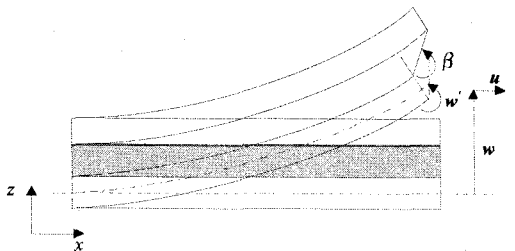
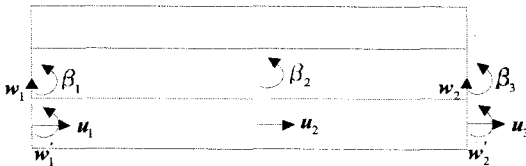


Fig. 1 Constrained layer damping beam



(a) The definition of displacements



(b) Nodal degrees of freedom of the beam element

Fig. 2 The 10-DOF finite element for constrained layer damping beam

### 3. 감쇠배치 최적설계

구조물의 강제진동응답을 최소화하기 위한 구속형 제진재의 최적배치 문제를 정식화한다. 구조물의 응답을 최소화하기 위해서는 응답 표현식을 직접 최소화하는 방법보다는 응답 피크 주변에서는 응답의 크기에 가장 영향을 크게 미치는 인자는 감쇠이므로 구조물의 진동 모드의 손실계수를 최대화하는 것이 최적설계 정식화에 간편하다.

Fig. 3과 같이 구속층과 제진층의 두께가 일정하다고 가정하면 구속형 제진재 배치 최적설계문제는 다음 식과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Find } \mathbf{b} = \{L, H_1, H_2, H_3\}^T \text{ such that} \\
 & \text{maximize } \sum \eta_i(\mathbf{b}) \\
 & \text{subject to } g(\mathbf{b}) \leq g_0 \\
 & \text{and } b_L \leq b \leq b_U
 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서  $b$ 는 설계변수이고,  $b_L$ 과  $b_U$ 는 각각 설계변수의 하한값과 상한값이다. 제약조건함수  $g(b)$ 는 제진에 사용된 점탄성 물질의 양을 제한하기 위해서 도입되었으며 사용된 제진재의 총 무게를 의미한다. 식 (10)으로 정의된 최적설계문제의 해를 얻기 위해서 기울기 기반의 수학적 계획법을 이용한다. 목적함수인 손실계수에 대한 설계민감도를 계산하기 위해서는 식 (6)에서 알 수 있듯이 복소 고유값에 대한 설계민감도 공식이 필요하다.  $i$ 번째 복소 고유값에 대한 설계민감도  $\partial \lambda_i / \partial b$ 는  $i$ 번째 고유값과 고유벡터가 만족하는 식 (2)를 직접 미분함으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b} = \frac{1}{m_i} \cdot \left( \mathbf{y}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \mathbf{y}_i - \lambda_i \mathbf{y}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \mathbf{y}_i \right) \tag{11}$$

식 (11)의 설계민감도 공식을 계산하기 위해서는  $i$ 번째 모드의 고유값, 고유벡터, 질량값과 질량행렬 및 강성행렬에 대한 미분값이 필요하다. 이와 같은 값

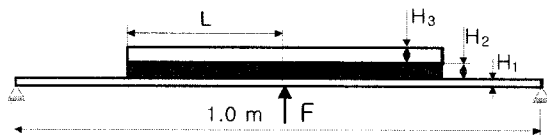
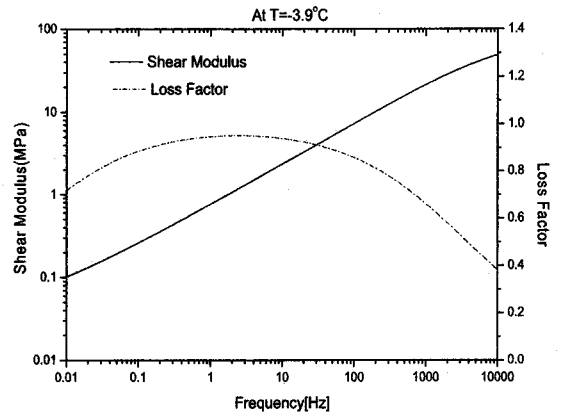


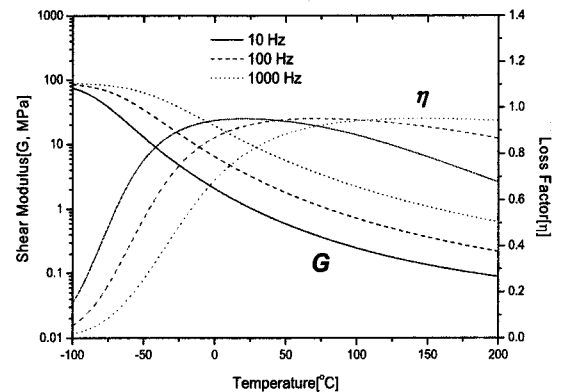
Fig. 3 A simply supported beam problem

들은 한번의 유한요소 해석과 강성행렬 및 질량행렬에 대한 정보로부터 구할 수 있다<sup>(7)</sup>. 최적설계 소프트웨어로는 DOT [10]를 사용하였다.

식 (10)으로 정의된 구속형 제진재 배치 최적설계 문제를 Fig. 3과 같은 단순 고정정보에 대하여 풀었다. 목적함수가 되는 손실계수의 대상 모드는 두 가지 경우에 대하여 수행하였다. 첫 번째는 대상 모드를 첫 번째로 한정된 것이고 두 번째 경우는 대상모드를 첫 번째와 세 번째 모드로 한 경우이다. 두 번째 모드는 보의 중심점이 노드점이 되는 까닭으로 주어진 힘 위치에서 가진이 되지 않으므로 제외하였다. 단순보는 알루미늄으로 이루어져 있고 두께와 폭은 각각 20 mm와 50 mm이다. 점탄성 물질은 ISD-110으로 선정하였으며 식 (8)로 표현되는 분수차 미분모델 및 온도에 관한 이동계수 표현식은 참고문헌 (9)에서 찾을 수 있고 ISD-110의 주파수와 온도에



(a) Frequency variation



(b) Temperature variation

Fig. 4 The complex modulus variation of a viscoelastic damping material (ISD-110)

따른 물성변화를 Fig. 4에 보였다. 초기조건으로 구속형 제진층은 중앙선에 대칭으로 50%만 피복하고 구속층 및 제진층의 초기 두께는 모두 2mm였다. 제약조건으로 부여된 제진재의 총 중량은 기준보 중량의 5%를 넘지 않도록 제한하였다. Fig. 5는 두 가지의 목적함수에 대하여 각각의 온도에서 초기와 최적설계의 손실계수 값을 비교하고 그렸고 Fig. 6에는 최적화된 구속형 제진재의 두께 및 길이를 그렸다. 그림에서 보듯이 각 모드의 손실계수는 초기 설계보다 대폭적으로 향상되어 첫 번째 모드의 경우 초기설계에 비하여 40~370% 손실계수가 증가하였다. 세 번째 모드의 경우 목적함수에 세 번째 모드를 포함시키는 경우 손실계수가 더욱 커지는 것을

확인할 수 있다. 최적화된 제진보의 배치를 보면 온도에 따라 최적설계의 설계변수 값이 완만하게 변화다가 30~40°C의 영역에서 급격한 변화가 생기는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 제진재의 배치 설계 시 온도의 영향을 고려하는 것의 중요성을 보여주고 있으며, 동시에 보다 강건한 제진설계를 위해서는 주변온도의 변화를 고려할 필요성이 있다는 것을 보여준다. Fig. 7에는 단위 힘이 작용하였을 때 초기 설계와 첫 번째 모드의 손실계수만을 최대화한 결과의 강제진동 응답을 비교하였다. 그림을 살펴보면 제안된 방법으로 수행된 최적설계의 강제진동 응답을 살펴보면 초기 설계에 비하여 진동응답이 3~10 dB 줄어든 것을 확인할 수 있다.

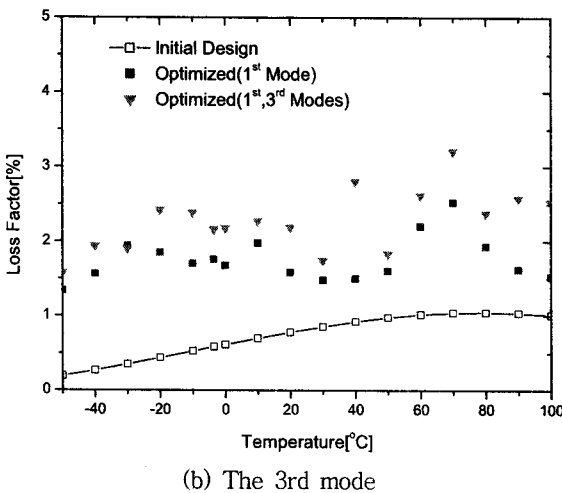
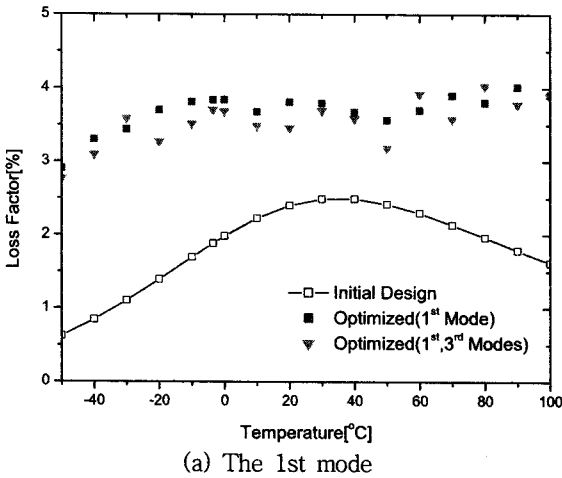


Fig. 5 Maximized loss factors at the optimal damping layouts

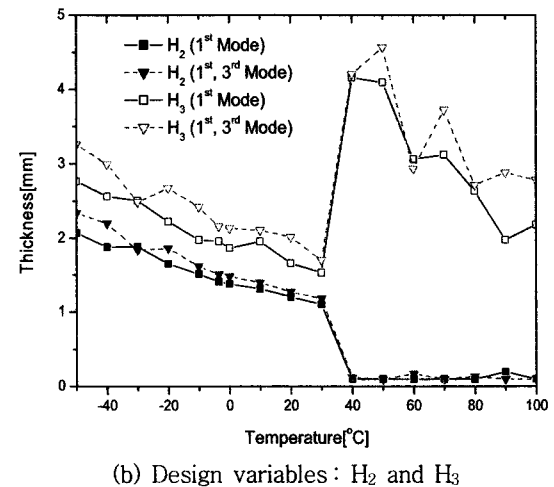
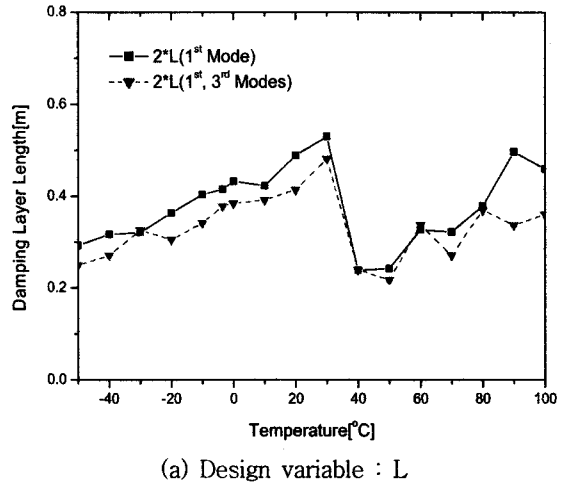


Fig. 6 The design variables at the optimal damping layouts

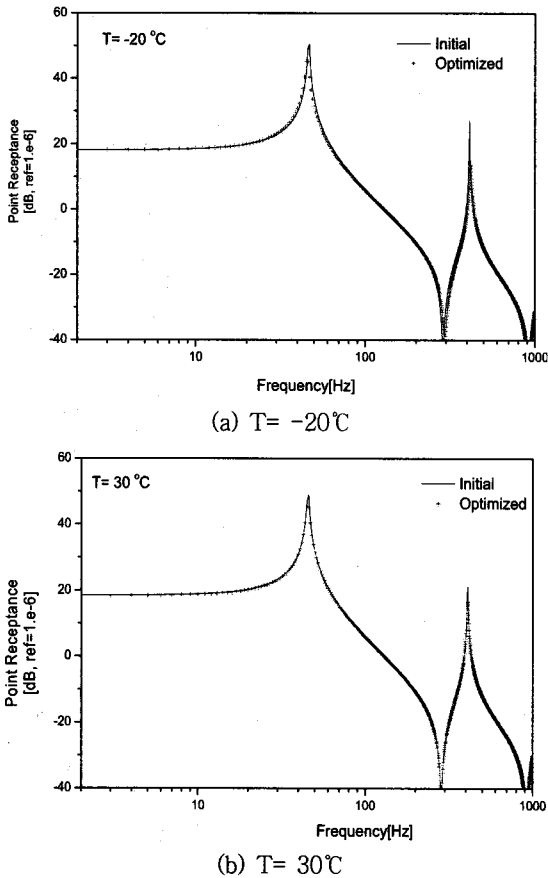


Fig. 7 Frequency responses around peaks at the initial and optimal damping layouts

#### 4. 결 론

이 연구에서는 구속형 제진보에 대하여 특정 모드의 손실계수를 최대화하는 제진재의 부착길이를 결정하는 방법을 제시하였다. 제진층을 갖는 보의 분수차 미분모델과 이동계수를 사용하여 점탄성 물질의 주파수 및 온도에 따른 강성계수의 변화를 고려하였다. 제진층의 전단변형과 구속층의 굽힘 변형을 고려할 수 있는 10자유도 2절점 유한요소를 도입하여 구속형 제진보를 모델링 하였으며 복소 고유값 문제를 정의하여 큰 감쇠에도 손실계수를 정확히 예측할 수 있도록 하였다. 모드중첩법을 이용하여 진동응답을 계산하였으며 진동응답을 최소화하기 위하여 점탄성 제진층의 배치를 설계변수로 하는 최대 손실계수를 찾는 최적화 문제를 정의하고 해석적으로 유도된 설계민감도 공식을 이용하여 최적 해를

구하였다.

수치예제를 통하여 제시된 정식화 과정을 확인하였으며 제안된 방법은 매우 효과적으로 각각의 진동 모드의 손실계수를 최대화함으로써 진동응답을 최소화할 수 있음을 보였다. 또한 최적의 제진재 배치사양은 점탄성 물질의 온도와 밀접하게 관련이 되어 있어 제진재의 설계 시 온도의 영향을 고려하는 것이 필요하다. 또한, 구속형 제진층을 이용한 제진 설계시 보다 강건한 제진 성능을 위해서는 구조물의 환경으로서의 온도를 고려하여 설계할 수 있는 방법의 개발 필요성이 있다.

#### 후 기

이 논문은 2007학년도 동의대학교 교내일반연구비 지원에 의하여 연구되었음 (과제번호 2007AA168).

#### 참 고 문 헌

- (1) Hajela, P. and Lin, C.-Y., 1991, "Optimal Design of Viscoelastically Damped Beam", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 44, No. 11, pp. S96-S106.
- (2) Marcelin, J. L., Trompette, P. and Dornberger, R., 1995, "Optimization of Composite Beam Structures Using a Genetic Algorithm", *Structural Optimization*, Vol. 9, pp. 236~244.
- (3) Ro, J. and Baz, A., 1995, "Optimum Design and Control of Partial Active Constrained Layer Damping Treatments", *Proceedings of the American Control Conference (Seattle, USA)*, pp. 4183~4187.
- (4) Kim, T. W. and Kim, J. H., 2004, "Eigenvalue Sensitivity Based Topological Optimization for Passive Constrained Layer Damping", *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference (Pam Springs, USA, 2004)*, AIAA-2004-1904.
- (5) Zheng, H., Cai, C. and Tan, X. M., 2004, "Optimization of Partial Constrained Layer Damping Treatment for Vibrational Energy Minimization of Vibrating Beams", *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 2493~2507.
- (6) Lee, D.-H., 2005, "Optimal Treatment of

Unconstrained Visco-elastic Damping Layer on Beam to Minimize Vibration Responses”, Transactions of the Korean Society of Noise and Vibration Engineering, Vol. 15, No. 7, pp. 645~651.

(7) Lee, D.-H., 2006, “Optimal Placement of a Constrained Damping Layer for Reduction of Interior Noise”, 11th AIAA/ISSMO Multi-disciplinary Analysis and Optimization Conference, Portsmouth.

(8) Lesieutre, G. A. and Lee, U., 1996, “A Finite

Element for Beams Having Segmented Active Constrained Layers with Frequency-dependent Viscoelasticity”, Smart Mater. Struct., Vol. 5, pp. 615~627.

(9) Jones, D.I.G., 2001, Handbook of Viscoelastic Vibration Damping, New York: John Wiley & Sons.

(10) DOT Users Manual Version 5.X, VR & D Inc, 2001.