

# 매개 가진되는 얇은 외팔보의 비선형 진동 안정성

## Stability of Nonlinear Oscillations of a Thin Cantilever Beam Under Parametric Excitation

방 동 준\* · 이 계 동\* · 조 한 동\* · 정 태 건†

Dong-Jun Bang, Gye-Dong Lee, Han-Dong Jo and Tae-Gun Jeong

(2007년 9월 17일 접수 ; 2007년 11월 19일 심사완료)

**Key Words** : Parametric Excitation(매개가진), Perturbation Analysis(섭동해석), Mathieu Equation(마티유 방정식), Method of Multiple Scales(다중척도법), Combination Resonance(조합공진)

### ABSTRACT

This paper presents the study on the stability of nonlinear oscillations of a thin cantilever beam subject to harmonic base excitation in vertical direction. Two partial differential governing equations under combined parametric and external excitations were derived and converted into two-degree-of-freedom ordinary differential Mathieu equations by using the Galerkin method. We used the method of multiple scales in order to analyze one-to-one combination resonance. From these, we could obtain the eigenvalue problem and analyze the stability of the system. From the thin cantilever experiment using foamax, we could observe the nonlinear modes of bending, twisting, sway, and snap-through buckling. In addition to qualitative information, the experiment using aluminum gave also the quantitative information for the stability of combination resonance of a thin cantilever beam under parametric excitation.

### 1. 서 론

기계 시스템 설계에서 기본적으로 고려되어야 하는 안정성 문제에 관해 기계진동 분야를 중심으로 많은 연구가 진행되고 있다<sup>(1)</sup>. 대부분의 시스템이 선형보다는 비선형에 가깝고, 시스템을 비선형으로 모델링하면 시스템 특성의 새로운 측면을 예측할 수 있기 때문에, 비선형시스템의 안정성을 해석하는 연구가 활발히 진행되어 왔다<sup>(2)</sup>.

이 연구는 수직가진되는 얇은 보의 비선형진동 안정성에 관한 연구이다. 이러한 현상을 가진 예는 로터 블레이드와 같은 회전하는 보나 마이크로 디바이

스 등에서 찾을 수 있다<sup>(3)</sup>. 이것은 보의 자중에 의한 시스템 가진효과가 나타나는 매개가진(para-metric excitation) 시스템이다.

Dugundji와 Mukhopadhyay<sup>(4)</sup>는 Yamamoto<sup>(5)</sup>의 이론을 바탕으로 수직가진 보의 조합공진(combination resonance)현상을 이론과 실험으로 규명했다. 이들은 보의 조합공진 이론보다는 실험을 통한 현상확인 에 그 초점을 두었다. Mukhopadhyay는 Hsu<sup>(6)</sup>가 고려한 비선형 감쇠를 시스템에 적용하여 매개가진 시스템에서 일어나는 조합공진을 재분석하였다<sup>(7)</sup>. Branko와 Milisavljevic<sup>(8)</sup>은 외팔보의 끝에 일정한 하중을 가할 때 일어나는 좌굴 현상과 분기현상을 규명하였다. Zhang 등<sup>(9)</sup>은 외팔보의 비선형 비평면 진동의 전체 분기현상과 혼돈역학(chaotic dynamics)을 분석하면서 공진현상으로 2:1 내부공진과 1/2 분수조화공진(subharmonic resonance), 그리고 주공

† 교신저자: 정태건, 건국대학교 공과대학 기계공학부  
E-mail : tgjeong@konkuk.ac.kr  
Tel : (02)450-3471, Fax : (02)447-5886

\* 건국대학교 대학원 기계공학과

진(primary resonance)을 가정했고 다중척도법(method of multiple scale)을 적용하여 비선형 해석을 하였다. Cusumano와 Moon<sup>(10)</sup>은 얇은 사각 단면을 가진 외팔보를 사인파로 가진할 때 생성되는 굽힘과 비틀림에 관한 비선형모드를 구했다. Cartmell과 Roberts<sup>(11,12)</sup>는 방정식에 섭동법을 적용시켜 비선형 거동에 관한 동특성 해석을 하였고, 보의 끝에 두 번째 보를 부착시킬 때 일어나는 비선형 거동을 해석하였다.

이 연구에서는 Dugundji와 Mukhopadhyay에 의해 제안된 매개가진 시스템에서 일어나는 비평면 비선형 운동의 1:1 조합공진을 자세히 분석하기 위해 다중척도법을 적용하여 안정성 해석을 하였다. 이러한 시스템의 안정성은 Dokumaci<sup>(13)</sup>가 굽힘과 비틀림 변형을 근사화시킨 무차원방정식을 보에 적용하여 해석한 바 있다. 이 연구에서는 다중척도법을 적용하여 조합공진을 이론적으로 규명했고 실험을 통하여 검증했다.

포맥스와 알루미늄 시편을 사용하여 예비실험과 본실험을 수행했다. 예비실험에서는 얇은 보를 수직으로 가진시킬 때 일어나는 선형모드와 비선형 모드를 관측했다. 본실험에서는 예비실험에서 얻은 비선형현상에 대한 정보를 바탕으로 알루미늄 시편을 이용하여 일대 일 조합공진 현상을 규명했다. 조합공진이 일어나는 주파수 대역에서 시스템의 안정성에 관한 실험결과를 얻을 수 있었으며, 이를 이론에서 얻은 결과와 비교해 보았다.

## 2. 운동방정식

Fig. 1에서 가진함수는  $u(t) = u \cos(\Omega t)$ 이며,  $u$ 는 진폭,  $\Omega$ 는 가진주파수를 나타낸다. 보를 수직으로

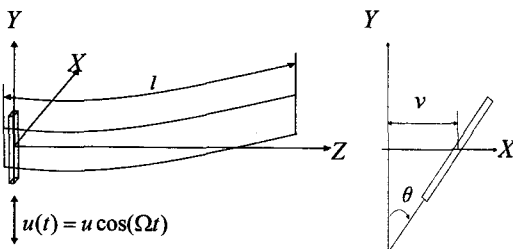


Fig. 1 Configuration of a thin cantilever beam subject to harmonic excitation

가진시키면 X축 방향으로 변형이 일어나는데, 이때 X축 방향으로 움직인 변위는  $v$ , XY평면에서 보의 회전각은  $\theta$ 로 표현한다.

보의 운동은 굽힘 현상과 비틀림 현상을 표현할 수 있는, 굽힘 방정식과 비틀림 방정식으로 유도된다<sup>(4)</sup>. 굽힘방정식과 비틀림방정식의 연성항은  $l-z$  부분에 대한 자유물체도를 사용하여 자체질량 때문에 생기는 X축 방향 모멘트를 구해서 유도한다<sup>(15)</sup>.

$$EI_y \frac{d^4 v}{dz^4} - \frac{m}{2} (g - \ddot{u}) [(l-z)^2 \theta]'' + m \ddot{v} = 0 \quad (1)$$

$$-GJ \theta'' + \frac{m}{2} (g - \ddot{u}) [(l-z)^2 v]' + I \ddot{\theta} = 0 \quad (2)$$

여기서  $EL_y$ 와  $GJ$ 는 각각 보의 굽힘 강성(flexural rigidity)과 비틀림 강성(torsional rigidity)이고  $I_y$ 는 Y축에 대한 2차 면적모멘트,  $J$ 는 단면의 극관성 모멘트이다.

## 3. 갤러킨 방법을 이용한 2자유도 표현

보의 운동을 동기(synchronous)운동으로 가정하여  $v(z,t)$ 와  $\theta(z,t)$ 를 아래와 같이 변위와 시간에 관한 함수의 곱으로 변수분리한다.

$$v(z,t) \approx IV(z)\eta(t) \quad (3)$$

$$\theta(z,t) \approx \Theta(z)\phi(t) \quad (4)$$

여기서,  $V(z)$ 와  $\Theta(z)$ 는 보의 1차 굽힘 모드와 1차 비틀림 모드를 나타내는 시험함수로서 아래와 같이 엄밀해를 이용하여 각각 정의할 수 있다.

$$V(z) = \sin \beta z - \sinh \beta z - \frac{\sin \beta l + \sinh \beta l}{\cos \beta l + \cosh \beta l} (\cos \beta z - \cosh \beta z) \quad (5)$$

$$\Theta(z) = \sin \frac{\pi z}{2l} \quad (6)$$

식 (5), (6)을 운동방정식 (1), (2)에 대입한 후 보의 길이에 대하여 적분하여 굽힘과 비틀림에 관한 방정식을 아래와 같이 구한다.

$$\ddot{\eta}(t) + \omega_B^2 \eta(t) + (\delta_B + \mu_B \cos \Omega t) \phi(t) = 0 \quad (7)$$

여기서,

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k_B}{m_B}} = 3.52 \sqrt{\frac{EI_y}{ml^4}}$$

$$\delta_B = \frac{\alpha_B}{m_B} = -0.1543 \frac{g}{l}$$

$$\mu_B = \frac{\psi_B}{m_B} = -0.1543 \frac{u}{l} \Omega^2$$

$$\ddot{\phi}(t) + \omega_T^2 \phi(t) + (\delta_T + \mu_T \cos \Omega t) \eta(t) = 0 \quad (8)$$

여기서,

$$\omega_T = \sqrt{\frac{k_T}{m_T}} = 1.57 \sqrt{\frac{GJ}{I l^2}}$$

$$\delta_T = \frac{\alpha_T}{m_T} = -0.7370 \frac{mlg}{I}$$

$$\mu_T = \frac{\psi_T}{m_T} = -0.7370 \frac{ml}{I} u \Omega^2$$

식 (7), (8)은 세 번째 항의 계수가 시간에 따라 조화함수 형태로 변하는 마티유 방정식(Mathieu equation)임을 알 수 있다.

#### 4. 다중척도법을 이용한 안정성 해석

##### 4.1 시스템의 특성 추출

식 (7), (8)에 다중척도법<sup>(14)</sup>을 적용하기 위하여 일 반적인 시간  $t$ , 섭동시간  $\varepsilon t$ , 미분연산자  $D$ 를 아래와 같이 표현한다.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (10)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1)^2 = D_0^2 + \varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (11)$$

매개가진 시스템에서 매개가진력은 주로 매우 작은 양을 나타내므로 식 (7), (8)의 가진항을  $\varepsilon$ 을 이용하여 표현하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$i\ddot{\eta}(t) + \omega_B^2 \eta(t) + \varepsilon \delta_B \phi(t) + \varepsilon \mu_B \phi(t) \cos \Omega t = 0 \quad (12)$$

$$\ddot{\phi}(t) + \omega_T^2 \phi(t) + \varepsilon \delta_T \eta(t) + \varepsilon \mu_T \eta(t) \cos \Omega t = 0 \quad (13)$$

식 (10), (11)을 식 (12), (13)에 대입하고 계수를 비교하여  $\varepsilon$  차수에 따라 시스템의 특성을 아래와 같이 추출한다.

차수  $\varepsilon^0$

$$D_0^2 \eta_0 + \omega_B^2 \eta_0 = 0 \quad (14)$$

$$D_0^2 \phi_0 + \omega_T^2 \phi_0 = 0 \quad (15)$$

차수  $\varepsilon^1$

$$D_0^2 \eta_1(t) + \omega_B^2 \eta_1(t) = -\delta_B \phi_0(t) - 2D_0 D_1 \eta_0(t) - \mu_B \phi_0(t) \cos \Omega t \quad (16)$$

$$D_0^2 \phi_1(t) + \omega_T^2 \phi_1(t) = -\delta_T \eta_0(t) - 2D_0 D_1 \phi_0(t) - \mu_T \eta_0(t) \cos \Omega t \quad (17)$$

$\varepsilon$ 에 관한 영 차수로부터 추출한 식 (14), (15)는 2계 상미분 방정식이고 그 해를 아래와 같이 정의 할 수 있다.

$$\eta_0(T_0, T_1) = A_1(T_1) e^{i\omega_B T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_B T_0} \quad (18)$$

$$\phi_0(T_0, T_1) = A_2(T_1) e^{i\omega_T T_0} + \bar{A}_2(T_1) e^{-i\omega_T T_0} \quad (19)$$

여기서,  $A_1, A_2$ 는 시스템의 진폭을 나타내는 값으로  $T_1$ 의 함수이다. 또한,  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ 는 각각  $A_1, A_2$ 의 켈레복 소수이다.

식 (18), (19)를 식 (16), (17)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$D_0^2 \eta_1 + \omega_B^2 \eta_1 = [-2i\omega_B \frac{dA_1}{dT_1} - \frac{\mu_B}{2} \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1}] e^{i\omega_B T_0} + cc + NST \quad (20)$$

$$D_0^2 \phi_1 + \omega_T^2 \phi_1 = [-2i\omega_T \frac{dA_2}{dT_1} - \frac{\mu_T}{2} \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1}] e^{i\omega_T T_0} + cc + NST \quad (21)$$

여기서,  $cc$ 는 켈레복소수,  $NST$ (not produce secular term)는 세칼리 항을 포함하지 않는 잔여항을 말한다.  $\sigma$ 는 조합공진의 가진주파수를 조절하는 조절매개변수(detuning parameter)이고  $\Omega \approx \omega_B + \omega_T + \varepsilon \sigma$

로 정의된다.

식 (20), (21)의 세쿨러 항을 제거하면 시스템의 특성을 나타내는 두 개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$2i\omega_B \frac{dA_1}{dT_1} + \frac{\mu_B}{2} \bar{A}_2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (22)$$

$$2i\omega_T \frac{dA_2}{dT_1} + \frac{\mu_T}{2} \bar{A}_1 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (23)$$

여기서,  $A_1, A_2$ 는 조합공진이 일어났을 경우 1차 굽힘과 1차 비틀림의 진폭의 크기를 나타낸다. 시간에 따른  $A_1$  과  $A_2$  의 응답으로 조합공진 주파수에서의 시스템의 안정성 해석을 할 수 있다.

#### 4.2 시스템 안정성 해석

(1) 고유치 해석에 의한 안정성 해석

식 (22), (23)의 해  $A_1, A_2$  를 구하면 아래와 같이 고유치  $\lambda$ 가 포함된 식을 얻게 된다.

$$A_1(T_1) = \bar{X} e^{-i\lambda T_1} \quad (24)$$

$$A_2(T_1) = \bar{Y} e^{i(\bar{\lambda} + \sigma) T_1} \quad (25)$$

여기서,  $\bar{X}$  와  $\bar{Y}$  가 각각  $A_1$  과  $A_2$  의 진폭을 나타낸다.  $\bar{X}$  와  $\bar{Y}$  가 유용해가 되기 위한 조건으로부터  $\lambda$  에 관한 특성방정식은 다음과 같다.

$$-4\omega_B \omega_T \lambda (\bar{\lambda} + \sigma) - \frac{\mu_B \mu_T}{4} = 0 \quad (26)$$

여기서,  $\lambda$  의 실수부와 허수부를 분리시켜 비교하면  $\lambda$  값을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \frac{\mu_B \mu_T}{4\omega_B \omega_T}} \right] \quad (27)$$

여기서  $\sigma^2 - (\mu_B \mu_T)/(4\omega_B \omega_T) > 0$  이면 조합공진 대역에서 안정하며,  $\sigma^2 - (\mu_B \mu_T)/(4\omega_B \omega_T) < 0$  이면 불안정함을 알 수 있다.

(2) 무차원 진폭비와 고유치  $\lambda$  의 물리적 의미

$A_1$  과  $A_2$  를 아래와 같이 정의한다.

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2} a_1 e^{i\beta_1} \quad (28)$$

$$A_2(T_1) = \frac{1}{2} a_2 e^{i\beta_2} \quad (29)$$

이때,  $a_1$  과  $a_2$  는 1차 굽힘과 1차 비틀림에 관한 진폭을 의미하며,  $\beta_1$  과  $\beta_2$  는 각 응답에 대한 위상의 변화량을 의미한다. 그리고, 네 개의 변수 모두  $T_1$  의 함수이다.

식 (28), (29)를 식 (22), (23)에 대입한 후, 실수부와 허수부의 값을 비교하여 정리하면 아래와 같이 네 개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\omega_B a_1' + \frac{\mu_B}{4} a_2 \sin \gamma = 0 \quad (30)$$

$$\omega_B a_1 \beta_1' - \frac{\mu_B}{4} a_2 \cos \gamma = 0 \quad (31)$$

$$\omega_T a_2' + \frac{\mu_T}{4} a_1 \sin \gamma = 0 \quad (32)$$

$$\omega_T a_2 \beta_2' - \frac{\mu_T}{4} a_1 \cos \gamma = 0 \quad (33)$$

여기서,

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta_1 - \beta_2 \quad (34)$$

식 (34)의 양변을  $T_1$ 에 관하여 미분한 후 식 (31) 과 (33)을 대입하여 정리하면,

$$\sigma - \gamma' = \frac{\mu_B a_2}{4a_1 \omega_B} \cos \gamma + \frac{\mu_T a_1}{4a_2 \omega_T} \cos \gamma \quad (35)$$

식 (30), (32), (35)를 아래와 같이 자율시스템 (autonomous system)으로 표현할 수 있다.

$$a_1' = -\frac{\mu_B}{4\omega_B} a_2 \sin \gamma \quad (36)$$

$$a_2' = -\frac{\mu_T}{4\omega_T} a_1 \sin \gamma \quad (37)$$

$$\gamma' = \sigma - \left( \frac{\mu_B a_2}{4a_1 \omega_B} \cos \gamma + \frac{\mu_T a_1}{4a_2 \omega_T} \cos \gamma \right) \quad (38)$$

정상상태(steady-state)를 고려하면  $\sin \gamma = 0$  이다. 이때, 식 (38)은 아래와 같이 표현된다.

$$\sigma = \left( \frac{\mu_B a_2}{4a_1 \omega_B} + \frac{\mu_T a_1}{4a_2 \omega_T} \right) \quad (39)$$

식 (39)에서 해  $a_1/a_2$ 를 구하면 아래와 같다.

$$\frac{a_1}{a_2} = \left( \frac{2\sigma\omega_T}{\mu_T} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{2\sigma\omega_T}{\mu_T} \right)^2 - \frac{\mu_B\omega_T}{\mu_T\omega_B}} \quad (40)$$

좌변의  $a_1/a_2$ 는 1차 굽힘 모드와 1차 비틀림 모드의 진폭비이며, 우변 또한 각 항의 분모와 분자의 차원이 동일하게 무차원화 되었음을 알 수 있다. 양변에  $\mu_T/2\omega_T$ 를 곱하면 아래와 같다.

$$\frac{a_1\mu_T}{4a_2\omega_T} = \frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \frac{\mu_B\mu_T}{4\omega_B\omega_T}} \right] \quad (41)$$

식 (41)과 (27)을 비교하면  $\lambda$ 가  $(a_1\mu_T)/(4a_2\omega_T)$ 임을 알 수 있고, 고유치  $\lambda$ 는 시스템의 1차 굽힘과 1차 비틀림의 진폭비와 관계되는 물리적인 특성을 지니고 있음을 알 수 있다.

(3) 무차원시스템 안정성 판정 결과

실험용 알루미늄 시편(200×40×0.3 mm)의 특성치를 식 (27)에 대입하여 고유치  $\lambda$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2}[\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1.14^2}] \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}[\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1.14^2}] \end{aligned} \quad (42)$$

Fig. 2는 조절매개변수  $\sigma$ 의 변화에 대한 고유치  $\lambda$ 의 변화를 표현한 것이다. 조절매개변수  $\sigma$ 는 가진 주파수  $\Omega \approx \omega_b + \omega_r$ 에 변화를 주는 값으로 그 값이 영인 경우는 시스템을 주파수  $\Omega \approx \omega_b + \omega_r$ 로 가진시키고 있음을 말하며, 양수와 음수인 경우는 그 크기만큼 주파수  $\Omega \approx \omega_b + \omega_r$ 를 증가시키거나 감소시킴을 의미한다. Fig. 2에서는 조절매개변수  $\sigma$ 의 크기에 따라서 시스템의 안정성 여부를 판정할 수 있다.  $\sigma$ 의 크기가  $\sigma < -1.14$ 와  $\sigma > 1.14$ 인 경우 시스템의 응답은 안정하며,  $-1.14 < \sigma < 1.14$ 인 경우에는 시스템의 응답이 불안정하게 되는 것을 알 수 있다.

5. 실험

예비실험에서는 포맥스 자재를 이용하여 보의 길이 대 폭의 비의 변화에 따라서 생성되는 선형모드와 비선형 모드를 관찰했다. 본실험에서는 실험 자재를 알루미늄으로 바꾸어, 1차 굽힘 고유진동수와 1차 비틀림 고유진동수의 합에서 일어나는 비선형 현상을 확인하여 일 대일 조합공진을 규명했다. 조합공진 주파수를 조금씩 증가 또는 감소시켜 시스템의 안정성에 관한 주파수의 경계값을 찾아서 이론값과 비교하여 검증했다.

5.1 실험장치

스트레인 게이지를 사용하여 보의 진폭을 측정했다. 보는 가진기 위에 클램프로 고정되며, 보를 수평 가진하는 클램프와 수직가진하는 클램프를 각각 사용한다. 스트레인 게이지로부터 얻은 신호를 측정하는 장비로 오실로스코프(TDS2002)를 사용했으며, 입력신호를 선별하기 위해 함수발생기(HP8116A)를 사용했다. 시스템의 주파수 응답함수는 신호분석기(HP35670A)로 구했다. 변위측정 센서(VA-11)를 사용하여 가진기의 실제 진폭 값을 구했다.

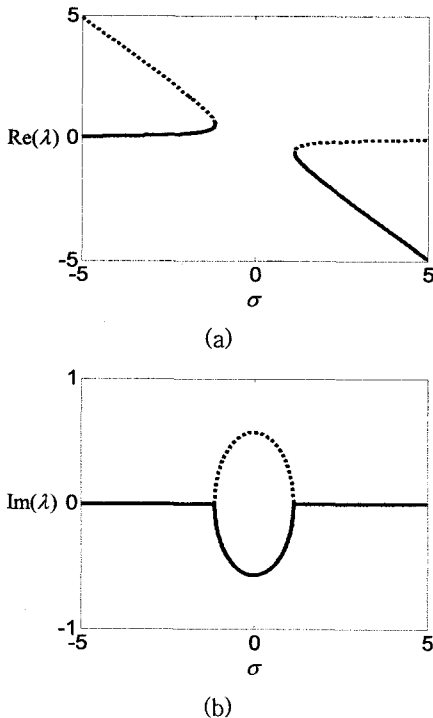


Fig. 2 Real and imaginary plots with respect to frequency. (a) real curve of  $\lambda$  with respect to  $\sigma$  and (b) imaginary curve of  $\lambda$  with respect to  $\sigma$ . Solid lines denote  $\lambda_1$  and dashed lines denote  $\lambda_2$ .

### 5.2 예비실험

예비실험에서는 얇은 보를 수직가진할 때 일어나는 선형모드와 비선형모드를 관찰했다. Fig. 3은 보의 길이와 폭의 비를 변화시킬 때 일어나는 선형모드를 관찰한 결과이다. 여기서 선형모드라 함은 가진주파수와 동일한 주파수로 진동하는 작은 진폭의 진동을 말한다. 주파수에 따라 2차 굽힘, 1차 비틀림, 3차 굽힘, 스웨이(sway), 4차 굽힘 모드가 순차적으로 일어나는 것을 볼 수 있다. 이때, 시편은 매우 유연한 자재이므로 1차 굽힘 모드는 육안으로 관찰되지 않았다. 보의 길이가 폭에 비해 클수록 선형모드는 더 낮은 주파수에서 발생한다.

Fig. 4는 길이와 폭을 변화시킬 때 일어나는 비선

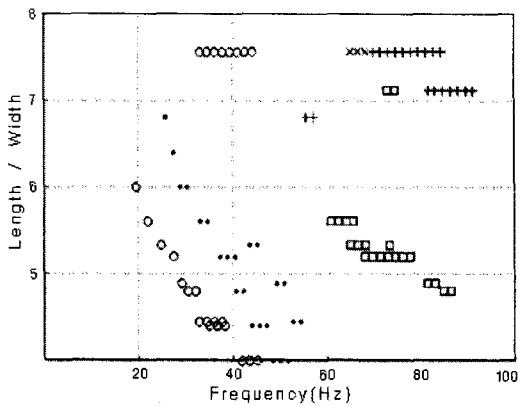


Fig. 3 Linear modes according to the ratio of length to width. O : 2<sup>nd</sup> bending, □ : 3<sup>rd</sup> bending, + : 4<sup>th</sup> bending, \* : 1<sup>st</sup> twisting, X : sway

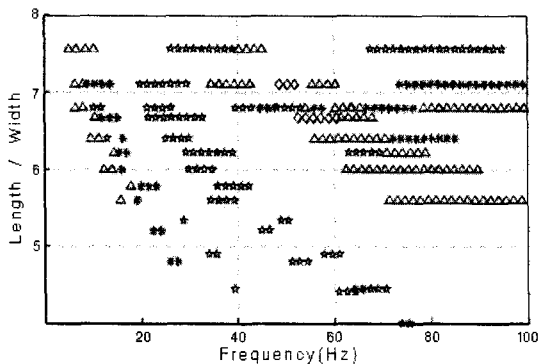


Fig. 4 Nonlinear modes according to the ratio of length to width. \* : nonlinear bending, ◇ : nonlinear twisting, ☆ : nonlinear sway, △ : buckling

형모드를 관찰한 결과이다. 여기서 비선형모드라 함은 가진주파수와 다른 주파수로 진동하는 매우 큰 진폭의 진동을 말한다. 이들은 선형모드와는 달리 주파수를 증가시키에 따라 순차적으로 발생하지 않으며 길이를 증가시키에 따라 불규칙하게 발생한다. 보를 진동시킬 때 보의 비선형모드는 보의 길이와 폭의 크기에 따라 그 모드가 결정된다는 것을 알 수 있다. Fig. 4를 보면, 폭에 비해 길이가 클수록 비선형 현상이 더욱 잘 나타나는 것을 확인 할 수 있다.

### 5.3 일대 일 조합공진의 측정

#### (1) 보의 고유진동수 측정

보는 램덤신호로 가진된다. Fig. 5는 주파수 응답 함수의 진폭선도를 나타낸다. 알루미늄 시편 (Al1010)의 규격은 200×40×0.3 mm이다. 1차 굽힘 고유진동수는 6.2 Hz, 2차 굽힘 고유진동수는 39.5 Hz, 1차 비틀림 고유진동수는 61.7 Hz임을 알 수 있다. 여기서 모드형상은 프로이 메카니카(Pro-E Mechanical)를 사용해서 확인했다.

#### (2) 수직가진 실험

보의 일대 일 조합공진현상을 규명하기 위해 1차 굽힘 고유진동수 6.2 Hz과 1차 비틀림 고유진동수 61.7 Hz을 합한 값 68 Hz를 중심으로 가진주파수를 조금씩 증감시키면서 가진했다.

Fig. 6은 가진주파수에 대한 응답 진폭의 크기를 나타낸 결과이다. 가진주파수는 68 Hz를 기준으로 60에서 80 Hz까지 변화시켰고 보의 진동주파수는 0에서 100 Hz까지 측정되었다. 이때 1차 굽힘모드 (6.2 Hz)의 진폭이 너무 커서 다른 영역의 진폭의

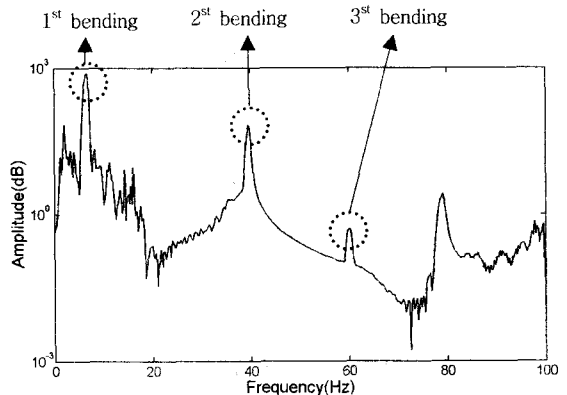


Fig. 5 Magnitude plot of frequency response function

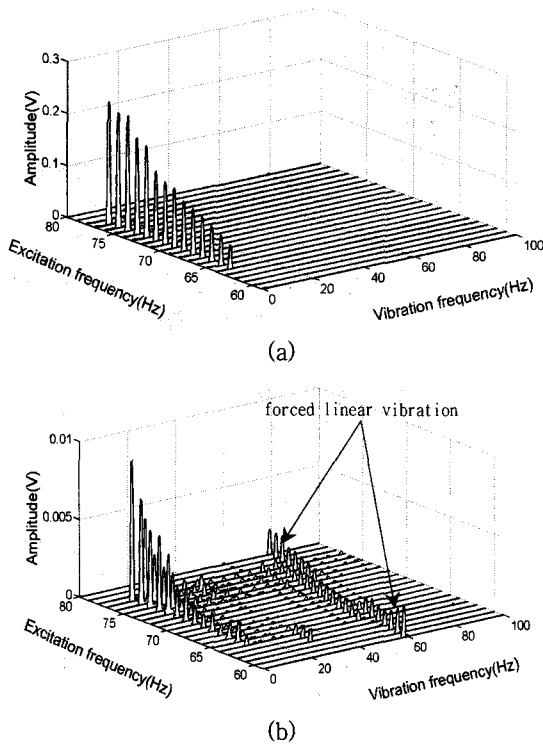


Fig. 6 Waterfall plots for the amplitude of response with respect to excitation frequency and vibration frequency of beam. Range of vibration frequency is: (a) from 0 to 100 Hz and (b) from 7 to 100 Hz

변화를 볼 수 없다. 따라서 진동주파수 7~100 Hz 사이에서 표시한 그래프(Fig. 6(b))를 제시했다. 선형 모드는 가진주파수가 63 Hz 이하와 78 Hz 이상일 때 나타남을 볼 수 있다. 63 Hz부터 78 Hz 사이의 주파수로 가진 경우, 보는 가진주파수와 다른 주파수로 진동하는 것을 확인할 수 있는데, 이는 보가 비선형모드로 진동함을 의미한다. 1차 굽힘 고유진동수와 1차 비틀림 고유진동수를 합한 값  $\Omega \approx \omega_b + \omega_t = 68 \text{ Hz}$  부근에서 보가 비선형모드로 진동하는 것을 볼 수 있어 조합공진현상이 일어났음을 확인할 수 있었다.

#### 5.4 시스템 안정성 해석

Fig. 6을 보면, 6 Hz 진동성분의 진폭이 가장 크다는 것을 알 수 있다. 이는 조합공진이 일어날 때, 시스템을 불안정하게 하는 공진은 주로 6 Hz 진동성분으로 나타나기 때문이다. 따라서, 시스템의 안정성은

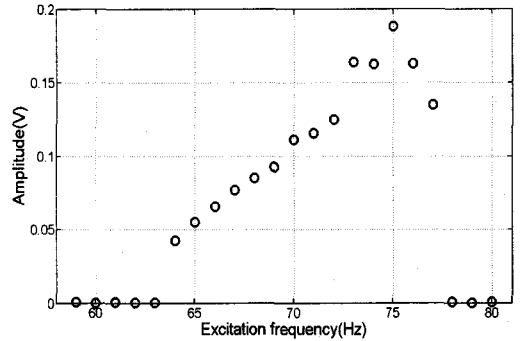


Fig. 7 Response curve with respect to excitation frequency for 6 Hz vibration component

가진주파수의 변화에 따른 6 Hz 진동성분의 진폭으로 판정할 수 있다.

Fig. 7은 가진주파수와 6 Hz 진동의 진폭의 크기를 그래프로 나타낸 것이다. 63 Hz부터 공진이 일어나며 주파수가 커질수록 진폭은 거의 선형 증가하는 것을 볼 수 있다. 가장 큰 진폭을 보이는 주파수는 74.5 Hz이며, 그 이상에서는 진폭의 크기가 급강하하여 78 Hz부터 안정 구간으로 들어선다. 즉, 가진주파수가 63 Hz 이하, 78 Hz 이상인 경우는 선형구간으로 시스템은 안정하고, 63 Hz와 78 Hz 사이는 비선형 구간으로 시스템은 불안정하다. 이 구간을 조절매개변수로 표현하면  $-4.8 < \sigma < 10.2$ 이다. 이는 앞에서 이론적으로 얻은 식  $-1.14 < \sigma < 1.14$ 와는 다소 큰 차이를 보이고 있다. 이러한 오차가 발생하는 이유는 시스템의 지배방정식에서 감쇠가 고려되지 않았기 때문이고, 또 다른 이유로는 본실험에서 사용한 알루미늄 시편은 너무 얇아서 이론에서 모델링한 것과 같이 완전한 평면을 유지하지 못하고 약간의 잔류변형이 생기기 때문이다. 이러한 차이는 시스템의 초기조건을 변화시킬 수 있으며 안정성 판정결과에 영향을 미치게 된다.

#### 6. 결 론

이 연구에서는 매개가진 시스템의 조합공진 현상을 섭동법으로 해석하였으며, 조합공진이 일어나는 주파수 대역에서 시스템 안정성 판정을 하였다. 이론에서 얻은 결과를 실험을 통하여 검증하였고, 외팔보의 선형, 비선형 모드를 관측할 수 있었다. 연구 결과 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 시스템의 지배방정식을 굽힘과 비틀림에 관한 연속계 방정식으로 모델링하였다. 갤러킨 방법을 이용하여 지배방정식을 2자유도 방정식으로 변환시켜 마띠유 방정식을 유도했다.

(2) 두 개의 마띠유 방정식에 다중척도법을 적용하여 일대 일 조합공진이 발생하는 상황을 검토하였다. 고유치를 계산해서 시스템의 안정성을 판정할 수 있는 기준을 구했고, 시스템을 정상상태로 가정함으로써 고유치의 물리적 의미는 1차 굽힘과 1차 비틀림의 진폭비에 관계된다는 것을 확인할 수 있었다.

(3) 예비실험에서는 보의 길이와 폭의 비를 변화시켜 일어나는 선형과 비선형 모드를 관측하였다. 보의 길이가 길수록 더 낮은 주파수에서 그 모드가 발생함을 확인할 수 있었으며, 이때 일어나는 비선형 모드로는 비선형 굽힘, 비선형 비틀림, 비선형 스웨이, 스냅스루 버클링이 확인되었다.

(4) 본실험에서는 주파수 응답 함수를 구하여 보의 고유진동수를 측정하였다. 일대 일 조합공진을 규명하기 위하여, 1차 굽힘 고유진동수 6.2 Hz와 1차 비틀림 고유진동수 61.7 Hz를 합한 68 Hz에서 시스템을 가진했다. 이때 보가 비선형모드로 진동하는 것을 확인하여 일대 일 조합공진현상이 일어났음을 확인하였다. 보를 가진하는 가진주파수와 보가 좌우로 진동하는 진동주파수에 대한 진폭을 3차원 그래프로 표현할 때, 6 Hz 진동성분이 가장 큰 진폭을 보이면서 시스템의 안정성에 가장 큰 영향을 미치고 있음을 볼 수 있었다. 63 Hz와 78 Hz 사이에서는 가진주파수와 진동주파수가 일치하지 않는 비선형모드로 진동하고 있어, 이 구간에서 시스템이 불안정하게 됨을 알 수 있었다.

## 후 기

이 논문은 서울시 산학연 협력사업의 지원을 받아 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

(1) Nayfeh, A. H. and Haider, N. A., 1998, "Nonlinear Response of Cantilever Beams to Combination and Subcombination Resonances",

Shock and vibration, Vol. 5, No. 5, pp.277~288.

(2) Takahashi, K., Wu, M. and Nakazawa, S., 1998, "Vibration, Buckling and Dynamic Stability of a Cantilever Rectangular Plate Subjected to In-plane Force", Structural Engineering and Mechanics, Vol. 6, No. 8, pp. 939~953.

(3) Dowell, E. H., Traybar, J. and Hodges, D. H., 1977, "An Experimental-theoretical Correlation Study of Non-linear Bending and Torsion Deformations of a Cantilever Beam", Journal of Sound and Vibration, Vol. 50, No. 4, pp. 533~544.

(4) Dugundji, J. and Mukhopadhyay, V., 1973, "Lateral Bending-Torsion Vibrations of a Thin Beam under Parametric Excitation", Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, No. 3, pp. 693~698.

(5) Yamamoto, T. and Saito, A., 1970, "On the Vibrations of 'Summed and Differential Types' under Parametric Excitation", Memories of the Faculty of Engineering, Nagoya University, Vol. 22, No. 1, pp. 54~123.

(6) Hsu, C. S., 1975, "Limit Cycle Oscillations of Parametrically Excited Second-order Nonlinear Systems", Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, pp. 176~182.

(7) Mukhopadhyay, V., 1980, "Combination Resonance of Parametrically Excited Coupled Second Order Systems with Non-linear Damping", Journal of Sound and Vibration, Vol. 69, No. 2, pp. 297~307.

(8) Branko, M. M., 1995, "On Lateral Buckling of a Slender Cantilever Beam", International Journal of Solids Structures, Vol. 32, No. 16, pp. 2377~2391.

(9) Zhang, W., Wang, F. and Yao, M., 2005, "Global Bifurcations and Chaotic Dynamics in Non-linear Non-planar Oscillations of a parametrically Excited Cantilever Beam", Nonlinear Dynamics, Vol. 40, No. 3, pp. 251~279.

(10) Cusumano, J. P. and Moon, F. C., 1995, "Chaotic Non-planar Vibrations of the Thin Elastica, Part I: Experimental Observation of Planar Instability", Journal of Sound and Vibration, Vol. 179, No. 2, pp. 185~208.



- (11) Cartmell, M. P. and Roberts, J. W., 1987, "Simultaneous Combination Resonances in a Parametrically Excited Cantilever Beam", *Strain*, Vol. 23, No. 3, pp. 117~126.
- (12) Cartmell, M. P. and Roberts, J. W., 1988, "Simultaneous Combination Resonances in an Autoparametrically Resonant System", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 123, No. 1, pp. 81~101.
- (13) Dokumaci, E., 1978, "Pseudo-coupled Bending-Torsion Vibrations of Beams under Lateral Parametric Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 58, No. 2, pp. 233~238.
- (14) Nayfeh, A. H., 1973, *Perturbation Method*, Wiley, New York.
- (15) Bang, D.-J., 2007, *Study on the Stability of Nonlinear Oscillations of a Thin Cantilever Beam Under Parametric Excitation*, MS Thesis, Konkuk University, Seoul, Korea.