

## 비선형 점탄성 부상모델의 회전방향모드에 대한 실험적 연구

이 성 범<sup>†</sup> · 이 성 재\* · 전 성 철\* · 송 동 루\*  
정 재 영\*\* · 박 찬 석\*\*\* · 이 우 현\*\*\*\*

<sup>†</sup>인제대학교 기계자동차공학부, \*인제대학교 의용공학과, \*\*인제대학교 기계공학과

\*\*\*Department of Mathematical Sciences, Clemson University

\*\*\*\*대흥R&T 연구소

(2008년 1월 23일 접수, 2008년 3월 13일 수정 및 채택)

### An Experimental Study of Nonlinear Viscoelastic Bushing Model for Torsional Mode

Seong Beom Lee<sup>†</sup>, Sung Jae Lee\*, Sung Chul Jun\*,  
Dong Ryul Song\*, Jae Young Jeong\*\*, Chanseok Park\*\*\*,  
and Woo Hyun Lee\*\*\*\*

<sup>†</sup>School of Mechanical & Automotive Engineering, Inje University

\*Department of Biomedical Engineering, Inje University

\*\*Department of Mechanical Engineering, Inje University

\*\*\*Department of Mathematical Sciences, Clemson University

\*\*\*\*Daeheung Rubber & Technology Co., Ltd.

(Received January 23, 2008, Revised & Accepted March 13, 2008)

**요 약 :** 자동차 부싱은 차체로 전달되는 하중을 줄여주는 역할을 하는 자동차 현가장치의 주요 부품으로 바깥쪽 슬리브와 안쪽의 축 사이에서 가운데가 비어 있는 실린더의 형상을 가진다. 차축에 작용되는 힘과 모멘트에 대한 부싱의 상대변위 및 변형각도는 점탄성 성질을 나타내며, 부싱에서 힘과 모멘트와 이에 대한 변위와 변형각도의 관계는 다물체 동역학 시뮬레이션에 매우 중요하다. 본 연구는 자동차 부싱의 회전방향 모드에 대한 모멘트와 변형각도의 점탄성 관계를 변형각도에 의존하는 모멘트 완화함수를 통하여 부상모델을 완성하였으며, 완성된 점탄성 부상 모델은 회전방향 모드에 대한 실험값과 비교하여 검증하였다.

**ABSTRACT :** A bushing is a device used in automotive suspension systems to reduce the load transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is a hollow cylinder, which is bonded to a solid steel shaft at its inner surface and a steel sleeve at its outer surface. The relation between the force and moment applied to the shaft and the relative deformation and rotational angle of a bushing exhibits features of viscoelasticity. Since a moment-rotational angle relation for a bushing is important for multibody dynamics numerical simulations, the simple relation between the moment and rotational angle has been derived from experiment. It is shown that the predictions by the proposed moment-rotational angle relation are in very good agreement with the experimental results.

*Keywords :* Automotive bushing, Viscoelastic bushing modeling, Torsional mode

<sup>†</sup> 대표저자(e-mail : mechslsb@inje.ac.kr)

## I. 서 론

자동차의 현가장치는 차축과 차체를 연결하여 차체중량을 지지하고, 주행 시 차축이 노면에서 받는 진동이나 충격을 완화하여 차체의 손상을 방지하며 노면과 휠의 이상적인 접촉을 유지하여 차체의 자세를 최적화시켜준다. 자동차의 부상은 현가장치의 주요 부품으로서 현가장치에 외력이 가해져 차륜의 자세가 변할 때, 차량의 조종 안정성 뿐만 아니라 승차감 등 동적 특성에 영향을 미쳐 자동차 현가장치의 성능을 결정짓는 중요한 변수로 작용한다.

일반적으로 자동차의 부상은 바깥쪽의 실린더형 슬리브와 안쪽의 실린더형 축 사이에서 가운데가 비어 있는 실린더의 형상을 가지며, 미국 미시간 대학교 기계공학과와 자동차 구조 내구성 센터(Center for Automotive Structural Durability Simulation)에서 수행한 일차원 반경방향 변위제어 실험(one-dimensional radial displacement control test) 결과, 부상은 힘과 변위와의 관계로 모델링되며 점탄성 성질을 가짐이 확인되었다.<sup>1</sup>

점탄성에 대한 연구는 Boltzmann(1874)으로부터 시작되었으며,<sup>2</sup> Adkins와 Gent(1954)는 원통형 고무 부상에 대해 여러 가지 실험을 통하여 힘과 변위와의 관계를 발전시켰다.<sup>3</sup> 하지만 이 연구는 선형 탄성이론을 적용하여 비선형성과 시간에 의존하는 점탄성 성질에 관해서는 설명하기가 어려웠다. Coleman과 Noll(1961)은 등방성 점탄성 고체에 대한 3차원 구성방정식을 완성하였으며,<sup>4</sup> McGuirt와 Lianis(1970)는 styrene-butadiene rubber에 대한 실험을 통하여 비선형 점탄성 구성방정식을 완성하였다.<sup>5</sup> Morman, Kao, Nagtegaal(1981)은 부상을 비선형 점탄성 고체로서 모델링하였으며, 변형을 해석하기 위하여 유한요소법을 제안하였다.<sup>6</sup> 부상에 대한 비선형 점탄성 모델링 연구는 Wineman(1995)에 의하여 본격적으로 수행되었으며,<sup>1</sup> Wineman, VanDyke, Shi(1998)에 의하여 기초적인 이론이 정리되었으며,<sup>7</sup> Lee(1997)에 의하여 부상의 비선형 점탄성 모델링에 대한 연구가 계승되어 왔다.<sup>8</sup> 한편, Lee(2002)의 부상연구는 기초 데이터를 얻는 과정에

있어서 실험에 의존하지 않고, styrene-butadiene rubber에 대한 Lianis 구성방정식을 이용하였다.<sup>9</sup> 또한, Kim과 Lee(2005)는 실험적 연구를 통하여 축방향 모드에 대한 자동차 부상에 대한 점탄성 모델을 완성하였다.<sup>10</sup>

본 연구는 자동차 부상의 회전방향 모드에 대하여, 실험을 통하여 얻어진 데이터를 바탕으로 각도에 의존하는 모멘트 완화함수(rotational angle-dependent moment relaxation function)를 구함으로써, 점탄성 부상 모델을 완성하였고, 완성된 부상 모델은 실험 결과와 비교하여 검증되었다.

## II. 회전모드에 대한 점탄성 부상 모델링

본 연구에서는 부상의 회전 방향 모드에 대한 모멘트와 변형각도의 관계를 고려하였으며, 점탄성 모델로서 Pipkin과 Rogers<sup>11</sup>에 의하여 제안된 식을 참고로 하여, 다음과 같이 모멘트와 각도에 대한 식을 정리하였다.

$$M(t) = R(\Delta(0), t) + \int_0^t \frac{\partial R(\Delta(s), t-s)}{\partial \Delta(s)} \frac{d\Delta(s)}{ds} ds \quad (1)$$

$R(\Delta, t)$ 는 시간이 0일 때 변형각도가  $\Delta$ 의 크기로 점프하여 시간이 지남에 따라 일정한  $\Delta$ 값을 갖는 스텝 변형각도(step rotational angle)로 주어졌을 때, 모멘트  $M(t)$ 가 시간에 따라 감소하는 점탄성 성질을 나타냄으로 이를 변형각도에 의존하는

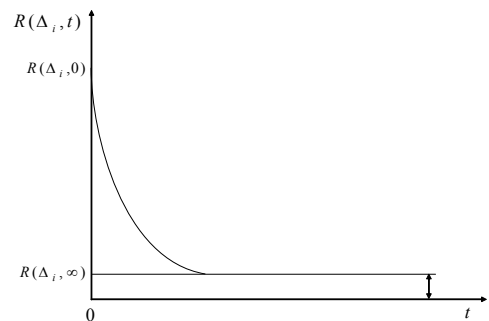


Figure 1. Rotational angle-dependent moment relaxation function for  $\Delta(t) = \Delta_i$

모멘트 완화함수라 일컫는다. 식 (1)은 모멘트와 변형각도의 관계식이며, 일반적인 모멘트 완화함수는 Figure 1과 같이 나타내어진다.

본 연구에서는 산업체 현장에서 제작한 부싱을 이용하여, 회전방향 모드에 대하여, ramp-to-constant rotational angle control test를 통하여 데이터를 획득하였다. 정확한 모멘트 완화함수를 얻기 위하여 step rotational angle control test를 수행하여야 하나, 이는 실험조건 및 장비의 오차로 인하여 원천적으로 불가능하다. 따라서 기검증된 moment extrapolation method을 이용하여,<sup>8</sup> 본 연구를 진행하였다.

즉,  $d=4, 6, 8, 10^\circ$ 의 변형각도에 대하여, rise time( $T_j^*$ )을 1, 2, 4, 8 sec.로 증가시키면서 각각의 경우에 대해 실험결과가 일정한 값을 가지는  $t=70\text{sec.}$  까지 데이터를 획득하여, 점탄성 부상 모델링을 수행하였다. 여기에서, rise time( $T_j^*$ )은 변위가 일정한 기울기로 증가하다가 일정한 값으로 바뀌는 시점에서의 시간을 말하여, 주어진 실험의 변형각도의 입력 값은 식 (2)와 같다.

$$d(t) = \frac{d_i}{T_j^*} t, \quad 0 \leq t \leq T_j^*$$

$$= d_i, \quad T_j^* \leq t \leq 70 \text{ sec.}$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_i = 4, 6, 8, 10^\circ \\ T_j^* = 1, 2, 4, 8 \text{ sec.} \end{array} \right.$$

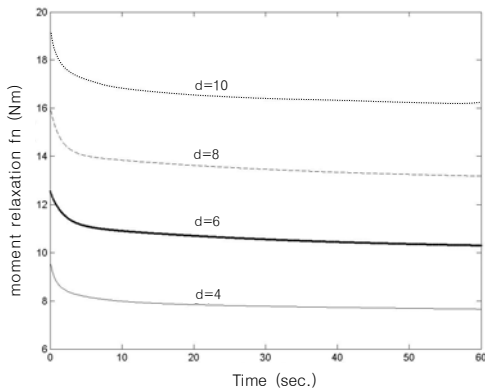


Figure 2. Rotational angle-dependent moment relaxation function for  $d=4, 6, 8, 10^\circ$

실험 데이터 값과 식 (1)에 의하여 제안된 모멘트와 변형각도와의 관계식을 바탕으로 비선형 최소 자승법(nonlinear least squares method)을 이용하여,<sup>12</sup> 각각의 변형각도 입력 값에 대한 모멘트 완화함수를 구하였다. 이를 Figure 2에 나타내었으며, 이를 변형각도에 의존하는 모멘트 완화함수라 명명하였다.

또한, 모멘트 완화함수는 간단한 부상모델을 위하여, 시간과 변형각도의 함수(explicit function)로 표현하여 변형각도  $d$ 와 시간의 함수  $G_1(t)$ 의 곱인 아래의 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.<sup>8</sup>

$$R(d, t) = dG_1(t) \tag{3}$$

그리고  $0 \leq t_i \leq 60\text{sec.}$  에 대하여, 선형 최소 자승법을 이용하여  $G_1(t_a)$ ,  $a=1, 2, 3, \dots, 601$ 을 구하였으며, 불연속값  $G_1(t_a)$ 를 연속함수  $G_1(t)$ 로 표현하면 다음과 같이 지수함수의 합으로 표현할 수 있다.

$$G_1(t) = C_{11} + C_{12}^{-t/\tau_{12}} + C_{13}^{-t/\tau_{13}} \tag{4}$$

여기에서,  $G_1(t_a)$ 는  $a=1, 2, 3, \dots, 601$ 에 대한 불연속값을 나타내며,  $G_1(t)$ 는 식(4)에 의하여 구하여진 함수를 나타낸다. 식(4)에 비선형 최소 자승법을 이용하여,<sup>12</sup>  $C_{1j}$ 와  $\tau_{1j}$ 를 구한 후,  $G_1(t_a)$ 과  $G_1(t)$ 를 그래프에 함께 표현하면, Figure 3과 같다.

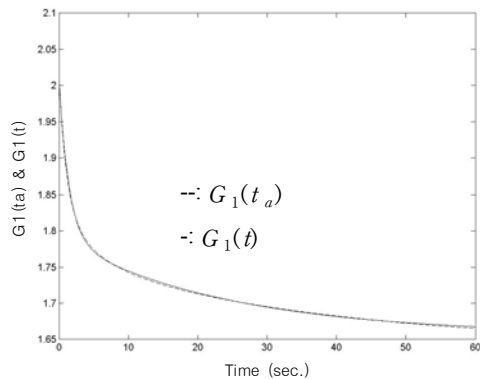


Figure 3. Coefficients:  $G_1(t_a)$ ,  $G_1(t)$

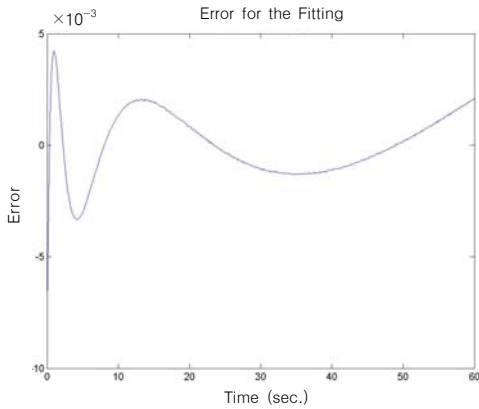


Figure 4. Error of  $G_1(t)$  with respect to  $G_1(t_a)$

Figure 4는  $G_1(t_a)$ 과  $G_1(t)$ 의 오차를 보여주고 있으며, 오차는 약 0.08%로 아주 작으므로,  $G_1(t_a)$  대신  $G_1(t)$ 을 사용할 수 있음을 알 수 있다.

식 (4)를 통하여 완성된  $C_{1j}$ 와  $\tau_{1j}$ 과 식 (1)로부터, 자동차 부싱의 회전방향 모드에 대한 점탄성 부싱모델이 완성되었으며, 이는 다음과 같다.

$$M(t) = R(d(0), t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial R(d(s), t-s)}{\partial d(s)} \frac{d}{ds}(d(s)) \right\} ds \quad (5)$$

where

$$R(d(s), t) = [C_{11} + C_{12}e^{-t/\tau_{12}} + C_{13}e^{-t/\tau_{13}}]d(s)$$

$$C_{11} = 1.657, C_{12} = 0.133, C_{13} = 0.215,$$

$$\tau_{12} = 23.8, \tau_{13} = 1.45$$

### III. 완성된 점탄성 부싱모델의 오차 해석

완성된 점탄성 부싱모델(VBM)의 정확성을 입증하고자 실험을 통해 얻어진 결과와 VBM의 결과를  $0 \leq t \leq 60$  sec. 동안 각각의 변형각도 입력 값에 대하여 구하였다. Figures 5, 6, 7, 8 은  $d=8^\circ$ 에 대하여,  $T^* = 1, 2, 4, 8$ sec.에 대한 VBM과 실험의 결과를 비교한 것으로, 점선은 실험결과를 나타내고, 실선은 VBM의 결과를 보여주고 있다.

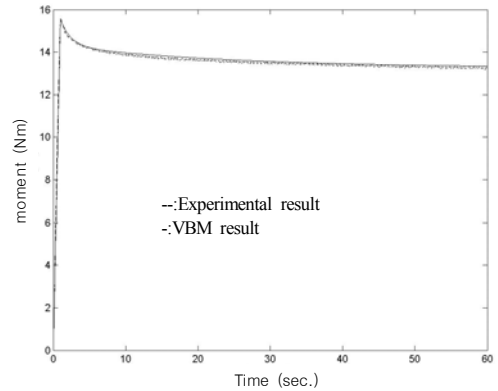


Figure 5. The results of Experiment and VBM for  $d=8^\circ, T^*=1$  sec.

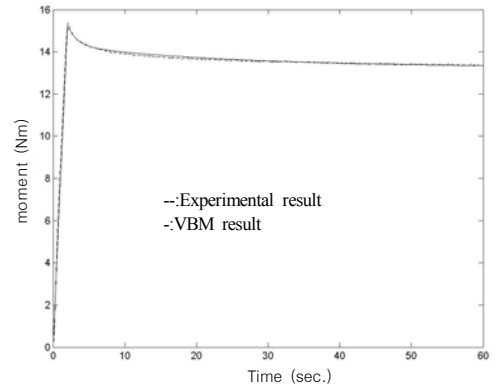


Figure 6. The results of Experiment and VBM for  $d=8^\circ, T^*=2$  sec.

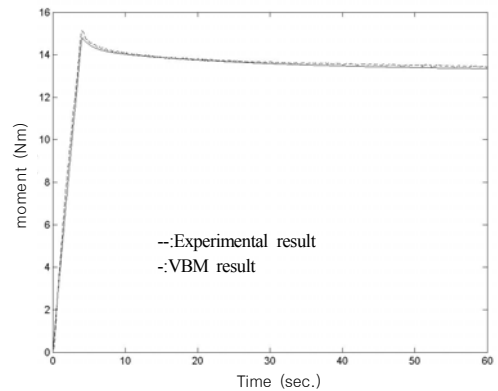
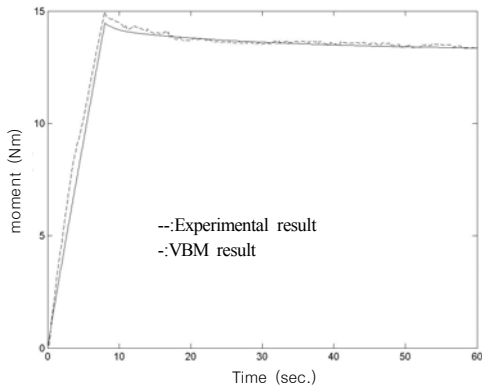


Figure 7. The results of Experiment and VBM for  $d=8^\circ, T^*=4$  sec.



**Figure 8.** The results of Experiment and VBM for  $d = 8^\circ$ ,  $T^* = 8 \text{ sec.}$

VBM 결과의 실험결과에 대한 상대오차는 식 (6)을 이용하여 상대오차( $E$ )를 확인하였다.

$$E = \frac{|(VBM \text{ outputs}) - (Experimental \text{ results})|_2}{|Experimental \text{ results}|_2} \times 100(\%) \quad (6)$$

식 (6)을 이용하여  $d = 6, 8, 10^\circ$ 의 변형각도 입력 값에 대하여 VBM의 실험에 대한 상대오차를 구하였으며, Table 1에 나타내었다.

Figures 5, 6, 7, 8 및 Table 1을 통하여 알 수 있듯이,  $d = 6, 8, 10^\circ$ 의 변형각도 입력 값에 대한 실험 결과 값과 VBM을 이용한 결과 값의 상대오차는 대하여 약 6% 미만으로서 본 연구를 통하여 완성된 회전방향에 대한 점탄성 부상 모델이  $d = 6, 8, 10^\circ$ 에서 신뢰도를 가지고 있음을 알 수 있다.

본 연구는 자동차 부상의 회전모드에 대한 실험적 연구로서, 새로운 점탄성 부상모델을 실험을 통하여 완성하였다. 실험을 수행함에 있어서, 실험상 어려움으로 변형각도의 범위를 제한하였으며, 이

범위를 벗어난 경우에는 오차의 크기가 상대적으로 커질 것이다. 따라서 실제 자동차 부상에 대한 연구를 수행함에 있어서는 주행 중에 발생하는 변형각도의 크기를 정확히 예측하여 부상의 점탄성 모델링을 수행하게 되면, 실제 사용할 수 있는 부상 모델이 될 것이다.

#### IV. 결 론

본 연구에서는 자동차 부상을 기존의 복잡한 점탄성 모델이 현장에서 직접 사용되기에는 불편한 점이 있음에 따라, 상대적으로 간단한 점탄성 부상 모델링을 수행하였으며, 결과는 실험과의 비교를 통하여 상대오차가 만족스런 범위에 있음이 확인 되었다.

본 연구는 회전방향모드에 대하여 부상의 모델링을 실험에 의존하여 수행함으로써 실제 자동차 부상 모델에 손쉽게 이용할 수 있는 근거를 마련하였다. 또한, 이러한 부상모델은 자동차 현가장치에 대한 다물체 동역학 프로그램에 손쉽게 적용될 수 있다.

자동차 부상에 대한 실험적 연구는 축방향, 반경방향, 회전방향 등의 다양한 모드에 대하여 개별적으로만 이루어졌다. 하지만, 실제 자동차의 부상에서 일어나는 현상에는 이 들 모드가 복합적으로 일어나게 됨으로, 향후에는 축방향모드, 반경방향 모드, 회전방향모드가 함께 작용하는 부상에 대한 연구가 필요하며, 이러한 연구를 통하여 점탄성부상모델의 현장 활용을 구체화하고자 한다.

#### 감사의 글

본 논문은 2006년도 인제대학교 학술연구조성비 보조에 의한 것임.

**Table 1.** Relative errors of VBM to the experimental results

|                | $T^* = 1 \text{ sec.}$ | $T^* = 2 \text{ sec.}$ | $T^* = 4 \text{ sec.}$ | $T^* = 8 \text{ sec.}$ |
|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $d = 6^\circ$  | 4.42%                  | 5.05%                  | 5.25%                  | 5.82%                  |
| $d = 8^\circ$  | 0.91%                  | 0.87%                  | 1.19%                  | 2.88%                  |
| $d = 10^\circ$ | 2.95%                  | 3.35%                  | 3.39%                  | 3.77%                  |

## 참고 문헌

1. Ford Durability Center at The University of Michigan Project Review (1995).
2. L. Boltzmann, "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkungen", *Sitzungsber. Kai-serlich Akad. Wissen Math. Naturwissen*, **70**, 275 (1874).
3. J. E. Adkins and A. N. Gent, "Load-deflection relations of rubber bush mountings", *British Journal of Applied Physics*, **5**, 354 (1954).
4. B. D. Coleman and W. Noll, "Foundations of Linear Viscoelasticity", *Reviews of Modern Physics*, **33**, 239 (1961).
5. C. W. McGuirt and G. Lianis, "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations", *Transactions of the Society of Rheology*, **14:2**, 117 (1970).
6. K. N. Morman, B. G. Kao and J. C. Nagtegaal, "Finite Element Analysis of Viscoelastic Elastomeric Structures Vibrating About Nonlinear Statically Stressed Configurations", *Fourth International Conference on Vehicle Structural Mechanics, Society of Automotive Engineers, Detroit, Michigan*, **83** (1981).
7. A. S. Wineman, T. VanDyke and S. Shi, "A nonlinear viscoelastic model for one dimensional response of elastomeric bushings", *International Journal of Mechanical Sciences*, **40**, 1295 (1998).
8. S. B. Lee, "A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response", Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 1997.
9. S. B. Lee, "A Study of Lianis Model for Elastomeric Bushing in Axial Mode", *Elastomer*, **37:3**, 151 (2002).
10. S. J. Kim, S. Y. Lee and S. B. Lee, "An Experimental Study of Pipkin-Rogers Model for Automotive Bushing", *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*, **22:11**, 118 (2005).
11. A. C. Pipkin and T. G. Rogers, "A Non-Linear Integral Representation for Viscoelastic behavior", *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, **16**, 59 (1968).
12. J. E. Dennis, "Nonlinear Least Squares and Equations", *The State of the Art in Numerical Analysis*, Academic Press, New York, 1977.