EEG 동적 모델에서의 카오스 현상

배영철* · 김은주**

1. 서 론

EEG 신호들은 CNS(central nerve system)의 대뇌피질(cerebral cortex)의 생체전기 활동들로부터 모아지며, 신경시스템의 변화와 추정을 포함하는 풍부한 정보를 포함하기 때문에 임상 연구나 전기생리학(electrophysiology) 연구에서 폭넓게 사용해왔다. 비선형동력학의 연구와 더불어 최근에 대뇌(cerebrum)가 비선형 동적 시스템이며 EEG 신호들은 대뇌의 출력으로 다룰 수 있다는 것을 보여주는 많은 증거들이 연구되었다[1,2]

많은 연구자들에 의해 EEG 신호로부터 질병의 상태나 건강 상태를 감시하고자하는 노력이 지속되고 있으며, EEG 신호가 카오스 시스템으로부터 기원한다는 보고도 많이 있다[11]. 그러나 EEG 신호가 명백하게 카오스 신호라는 주장에는 주로 프랙탈 차원과 리아프노프 지수와 같은 몇몇 비선형 동적 계산의 결과에 따른다. 이에 본 설명에서는 EEG 뿐만 아니라 일반적인 1차원의 시계열 데이터로부터 상태공간을 재구성하고, 프랙탈 차원과 리아프노프 지수에 의해 1차원 시계열 데이터에서의 카오스 특성 규명에 대한 기본적인 이론을 설명하고자 한다. 여기에서 설명하고자 하는 내용은 EEG 신호 해석을 위한 수준있는 내용을 설명하기 보다는 1차원 EEG나 진동신호를 가지고 어떻게 카오스 특성 판명에 이용할 수 있는지에 대한 간단한 예만을 들어 설명하고자 한다.

※ 교신저자(Corresponding Author) : 배영철, 주소 : 전남 여수시 둔덕동 산 96-1(550-749), 전화 : 061)659-3315, FAX : 061-659-3319, E-mail : ycbae@chonnam.ac.kr
* 전남대학교 공학대학 전기 · 전자통신 · 컴퓨터 공학부 교수
** 한국과학기술정보연구원 선임연구원
(E-mail : cjkim@kisti.re.kr)

2. 매립(embedding)에 의한 상태 공간 재구성

그림 1과 같은 뇌파 신호에서 취득한 1차원의 시계열 데이터에서 카오스 특성을 판정하기 위해서는 먼저 매립에 의한 1차원 데이터를 2차원 데이터로의 변환 즉 상태공간의 재구성(reconstruction)이 필요하다.

매립은 그림 2와 같은 상태변수 $x_t \in R^n$에 관련된 식(1)과 같은 1변수의 시계열 데이터 ξ_t로부터,

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots \quad (1)$$

시간 지연의 크기 τ 및 차수 m을 선정하여 식(2)와 같은 m차원 벡터를 생성하는 것이다.

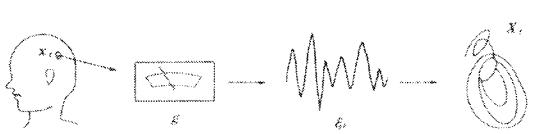


그림 1. 뇌파의 측정과 2차원 신호로의 변환

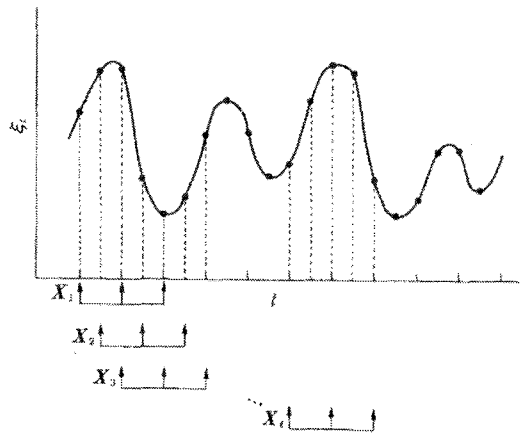


그림 2. 1차원 시계열로부터 m차원 벡터 생성

$$X_1 = (\xi_1, \xi_{1+\tau}, \cdots, \xi_{1+(m-1)\tau}) \quad (2)$$
$$\vdots$$
$$X_t = (\xi_t, \xi_{t+\tau}, \cdots, \xi_{t+(m-1)\tau})$$
$$\vdots$$
$$X_N = (\xi_N, \xi_{N+\tau}, \cdots, \xi_{N+(m-1)\tau})$$
$$\vdots$$

이때, m이 $2n+1$이상이면, 재구성된 상태 공간에서 어트렉터의 구조가 보존되는 것이 보여지고 있으며, X_N이 상태 공간내의 일정한 영역 내에 여러 개의 고리가 중첩된 이상한 모양을 나타내면 혼돈적인 성질을 가진다고 할 수 있다.

2.1 시간 선정의 최적화

실측의 EEG 진동신호로부터 상태 공간을 재구성함에 있어서 식 (2)에 나타낸 시간지연 τ의 선택은 매우 중요하며 특히, 시간 지연 τ가 너무 적으면 재구성 상태 공간내의 데이터는 극단적으로 상관이 크게 되어 상태공간의 45° 기울기를 갖는 직선상에 응집하며, 너무 크면 서로의 상관성을 잃게 된다.

본 설명에서는 EEG 진동신호의 시간 지연을 자기 상관 함수 및 포엔카레 맵을 통과하는 평균 주기를 이용하여 선정하였다.

2.1.1 자기상관 함수를 이용한 시간 지연의 선택

자기상관 함수는 식 (3)으로 표현되며,

$$R(n) = \frac{\sum_k \zeta_k \zeta_{k+n}}{\sum_k |\zeta_k|^2} \quad (3)$$

재구성 할 데이터의 선형 독립성을 보장하기 위해 자기상관(auto-correlation) 함수가 최초로 0이 될 때를 시간 지연으로 선택한다.

자기 상관 함수를 이용하여 시간 지연을 선정하면, 계산이 간단하고 데이터 수가 많지 않은 경우에 효율적으로 적용될 수 있다.

2.1.2 포엔카레 단면을 통과하는 평균 주기

포엔카레 단면이란 재구성한 상태 공간의 차원보다 1차원이 적은 평면으로, 불규칙한 진동 신호의 샘플링에 효율적으로 사용된다.

2.2 재구성 차원 설정을 위한 False nearest neighbour 법

재구성 차원은 주어진 데이터가 몇 차원 또는 몇 개의 독립 변수로 기술될 수 있는가 하는 것을 의미하며 일반적으로 프랙탈 차원의 2배 이상, 상관 차원 계산시 스케일링 영역이 최대가 되도록 하는 방법이 있으나, 본 설명에서는 재구성시에 차수의 부족으로 인한 neighbour를 식별하는 false neighbour기법을 적용하여 최적의 재구성 차원을 선정하였다.

주어진 진동신호 $s(k)$로부터 d차원의 벡터 $y(k)$를 재구성하면

$$y(k) = \{s(k),\ s(k+\tau), \cdots,\ s(k+(d-1)\tau)\} \quad (4)$$

여기서, d는 재구성 차원이고, τ는 앞에서 설명한 시간지연이다.

재구성된 $y(k)$중에서 nearest neighbor를

$y^{NN}(k)$라 한다면, $y(k)$와 이 neighbor와의 유클리디언 거리는 식(5)와 같이 표현되며,

$$R_d(k)^2 = \sum_{m=1}^{d} [s(k+(m-1)\tau) - s^{NN}(k+(m-1)\tau)]^2 \quad (5)$$

차원이 $d+1$일 때는 식 (6)으로 나타낼 수 있다.

$$R_{d+1}(k)^2 = \sum_{m=1}^{d+1} [s(k+(m-1)\tau) - s^{NN}(k+(m-1)\tau)]^2$$
$$= R_d(k)^2 + | s(k+d\tau) - s^{NN}(k+d\tau) |^2 \quad (6)$$

차원이 d에서 $d+1$로 1차 증가 시에 상대 거리는 식(5)와 식(6)으로부터 다음과 같이 정리할 수 있으며,

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}(k)^2 - R_d(k)^2}{R_d(k)^2}} = \frac{| s(k+d\tau) - s^{NN}(k+d\tau) |}{R_d(k)} \quad (7)$$

false neighbour는 차원을 1씩 증가시키면서 식(7)을 계산했을 때, 어떤 임계치 이상 증가하는 값으로 정의된다. 이는 실제 동특성에 의한 neighbour가 아니라 저차원의 사영으로 인하여 생기는 것으로 false neighbour가 존재하지 않는 최소 차원이 최적의 재구성 차원이 된다.

EEG 신호의 false neighbour는 재구성 차원이 얼마 이상에서 존재하지 않는지를 파악하여 재구성 차원을 선정하는 것이 필요하다..

그림 3-5에 EEG와 관련한 시계열 데이터를 각각 나타내었으며 식(3)-식(7)의 과정을 통하여 구한 재구성한 어트렉터를 그림 6-8에 각각 나타내었다.

그림 3-5의 시계열 데이터를 통하여 본 시계열 데이터의 형태는 복잡한 카오스적인 신호가 있을 것으로 추정할 수 있다.

그림 7,8에서 보듯이 재구성한 어트렉터로는 명확한 어트렉터가 구성되지 않음을 알 수 있다. 이는 EEG 진동신호 측정시 잡음이 혼재한 것으

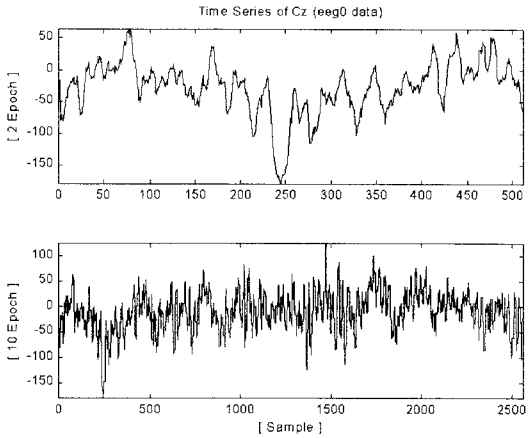


그림 3. EEG 시계열 데이터

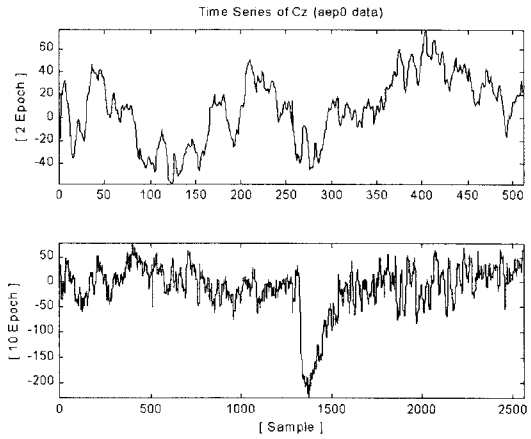


그림 4. AEP 시계열 데이터

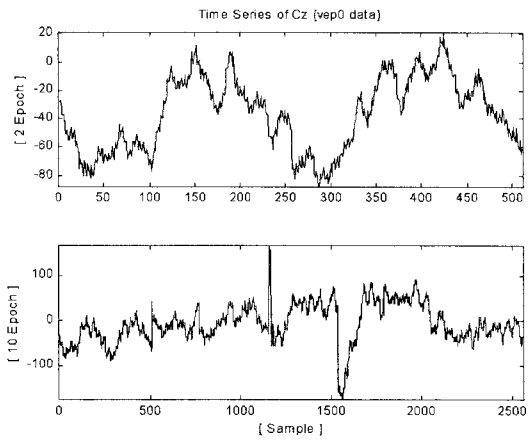


그림 5. VEP 시계열 데이터

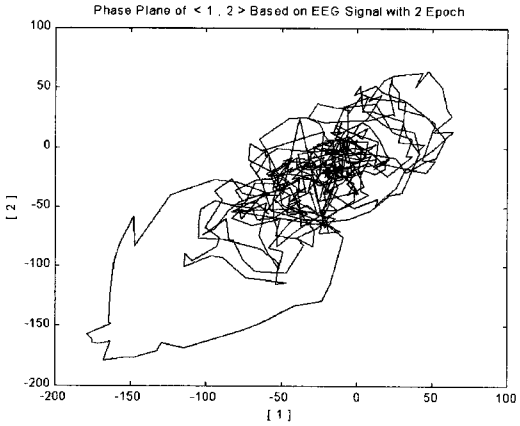


그림 6. EEG 위상공간

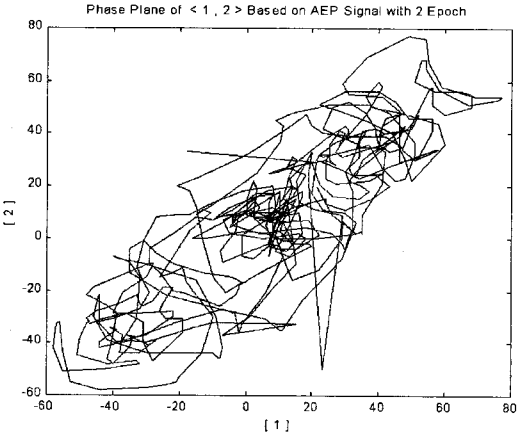


그림 7. AEP 위상공간

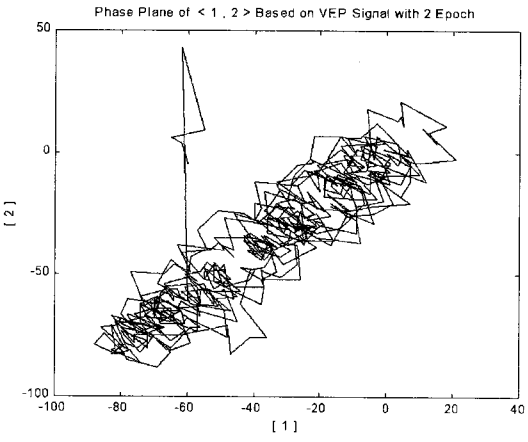


그림 8. VEP 위상공간

로 생각되며 이에 대한 필터링 내지 다른 알고리즘이 필요하다고 본다.

그림 6-8의 EEG 시계열 데이터를 매립법에 의해 시간지연 3, 차원 5로 매립한 경우의 위상 공간에서 같은 정확한 어트렉터를 구성할 수는 없었지만 어느 정도의 특성을 가짐을 알 수 있다.

3. 포엔카레 맵을 이용한 EEG신호의 특징 추출

포엔카레 맵(Poincare map)은 위상 공간내의 궤적을 수직으로 교차하는 포엔카레 단면(Poincare section)을 설정한 후 그 단면을 위상 공간에 나타낸 것으로, 혼돈 신호를 이산(discrete) 신호로 샘플링하는 방법이다.

포엔카레 맵에서 1주기 운동은 한점, 2주기 운동은 2점, 준주기(torus) 운동은 닫힌 폐곡선으로 혼돈 신호는 무수히 많은 점이 다른 모양을 보이므로 주기 운동, 준주기 운동과 쉽게 구별할 수 있다.

포엔카레 맵은 단면의 위치에 따라 다르게 되므로, 현상의 특성을 가장 잘 나타낼 수 있도록 선정하여야 하며 본 논문에서는 베어링 진동신호 특성이 명확히 보이도록 평균에 직교하는 포엔카레 단면과 평균을 지나는 단면을 설정하여 그림 9-11에 각각 보였다.

그림 9는 그림 3의 시계열 데이터에 의한 포엔카레 단면이고 그림 10은 그림 4의 시계열 데이터에 의한 포엔카레 단면, 그림 11은 그림 5의 시계열에 의해 얻어진 위상공간에서의 포엔카레 단면을 보여주고 있다.

그림 9-11을 통하여 EEG의 경우 명확한 포엔카레 단면이 나타나지만 그림 9와 11은 약간 불분명함을 확인할 수 있다.

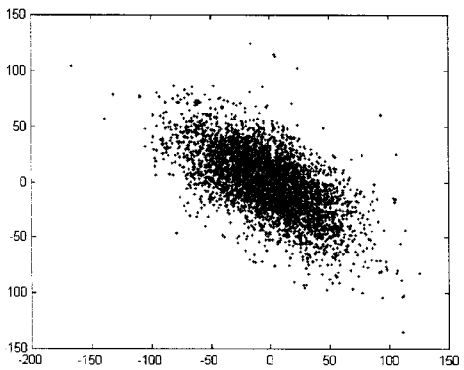


그림 9. EEG 포엔카레 단면

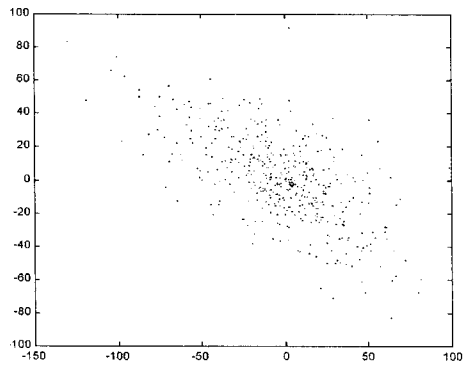


그림 10. AEP 포엔카레 단면

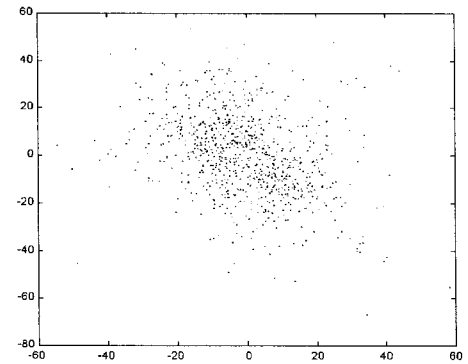


그림 11. VEP 포엔카레 단면

4. 리아프노프 지수 및 리아프노프 차원계산을 이용한 EEG 신호의 카오스 거동

리아프노프 지수는 혼돈의 특징 중 궤도 불안정성을 정량적으로 평가하는 양이며, 이를 다차원적으로 확장한 것이 리아프노프 스펙트럼이다. 불규칙적인 EEG 진동 신호 본질에 결정론적 혼돈이 존재하고 있음을 리아프노프 스펙트럼으로 설명하였다.

진동신호를 유발시키는 n차원 이산 역학계가 식(8)과 같이 정의된다면,(여기서, x_t는 이산시간 t에 있어서 상태, μ는 파라미터 벡터, F는 n차원 사상이다.)

$$x_{t+1} = F(x_t,\mu), \qquad x_t \in R^n \tag{8}$$

미소변위 δx_t에 관한 자코비안 행렬 $DF(x_t)$를 N회 사상한 식(9)의 고유치 $\sigma_i(N)$을 이용해서, 리아프노프 지수(λ_i)는 식(10)과 같이 정의된다.

$$DF_N = DF(x_{N-1})DF(x_{N-2})\cdots DF(x_0) \tag{9}$$

$$\lambda_i = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}log|\sigma_i(N)| \tag{10}$$

그러나, EEG 진동 신호에서는 식(8)과 같은 이산 역학계를 정의할 수가 없기 때문에 재구성된 상태 공간 내 궤적 중 1점 X_t를 중심으로 하여, 미소반경 ϵ의 m차원 공간내의 초구(ε구)에 들어가는 다른 점 X_{ki}(M개,$i=1,2,\cdots,M$)의 변화율로부터 추정하여야 한다.

즉, X_{ki}에 대한 변위 벡터 y_i는 식(11)이 되고,

$$y_i = X_{ki} - X_t, \qquad y_i \in R^m \tag{11}$$

시간이 몇 초 정도 경과한 후에 ε구의 중심 X_t는 X_{t+s}로, ε구 내 의 각점 X_{ki}는 X_{ki+s}로 각각 변화한다. 따라서, 시간 $t+s$에서의 변위벡터 z_i는 식(12)로 된다.

$$z_i = X_{ki+s} - X_{t+s}, \qquad z_i \in R^m \tag{12}$$

ε구의 반경과 시간 s가 충분히 작다면, 식(11)

의 y_i와 식(12)의 z_i의 관계는 행렬 G_t를 이용해서 식(13)과 같이 근사적으로 나타낼 수가 있다.

$$z_i = G_t y_i \tag{13}$$

식 (13)의 G_t를 구하기 위해 평가 함수 S를 다음과 같이 정의하면

$$S = \sum_{i=1}^{M} |z_i - G_t y_i|^2 \tag{14}$$

거리 S의 각 g_{ki}(G_t의 ki성분)에 대한 극소 조건인 식(15)로 나타내며, 식(15를 통하여 식(16)이 구해진다.

$$\frac{\partial S}{\partial g_{ki}} = 0 \tag{15}$$

$$G_t V = C$$

$$v_{ki} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_{ik} y_{il} \tag{16}$$

$$c_{ki} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} z_{ik} y_{il}$$

식 (16)의 행렬 G_t를 이용하여 리아프노프 지수를 구한다.

매립 차원 5, 시간 지연 5를 가지고 EEG, AEP, VEP 진동신호의 리아프노프 지수와 리아프노프 스펙트럼을 구하여 각각 표 1-3, 그림 12-15에 나타내었으며 이를 통하여 카오스적인 거동이 있음을 확인하였다.

표 1. EEG의 리아프노프 지수

Lyapunov Exponent	λ_1 = 0.1483
	λ_2 = -0.0432
	λ_3 = -0.1346
	λ_4 = -0.4983
	λ_5 = -0.6618
Lyapunov Dimension	D_L = 2.7807

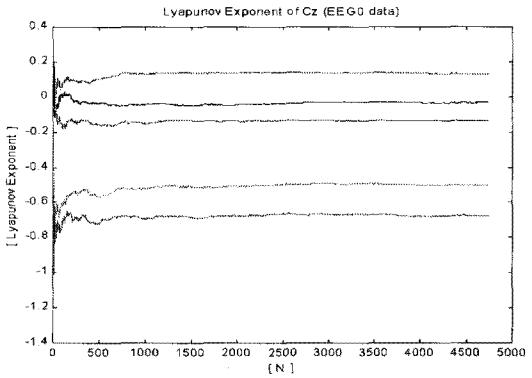


그림 12. EEG의 리아프노프 스펙트럼

표 2. AEP의 리아프노프 지수

Lyapunov Exponent	λ_1 = 0.4209
	λ_2 = 0.1210
	λ_3 = 0.1039
	λ_4 = -0.2584
	λ_5 = -0.2784
Lyapunov Dimension	D_L = ?

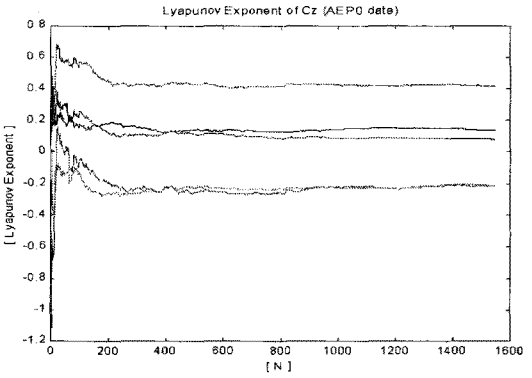


그림 13. AEP의 리아프노프 스펙트럼

표 3. VEP의 리아프노프 지수

Lyapunov Exponent	λ_1 = 0.2783
	λ_2 = 0.0385
	λ_3 = -0.0313
	λ_4 = -0.4055
	λ_5 = -0.4175
Lyapunov Dimension	D_L = 3.7041

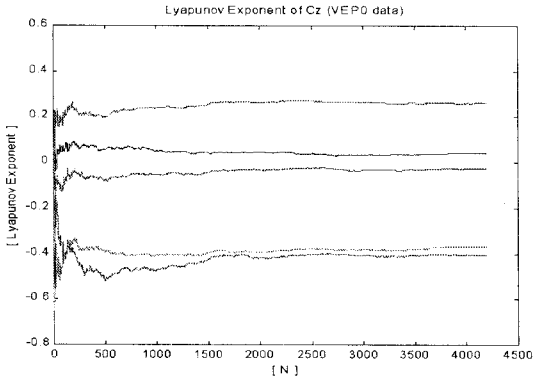


그림 14. VEP의 리아프노프 스펙트럼

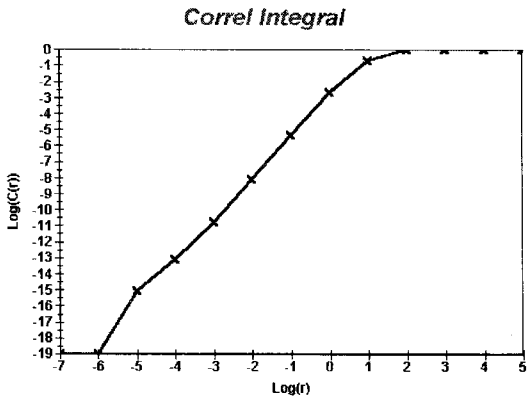


그림 15. 상관 차원

5. 상관 차원을 이용한 EEG의 카오스 거동

프랙탈 차원은 혼돈을 정량적으로 표시하는 것으로 본 설명에서는 상관적분에 의한 상관 차원으로 나타내었다. 재구성된 어트랙터 상의 1점을 $x_i \in R^m$이라고 하면, 상관적분은 다음 식 (17)로 정의되며,

$$C^m(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} H(r - |X_i - X_j|) \qquad (17)$$

여기서, $H(t)$는 heavy-side 함수로 식(18)과 같이 표현된다,

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (\tau \geq 0) \\ 0 & (\tau < 0) \end{cases} \qquad (18)$$

상관적분의 알고리즘은 m차원 공간에 있어서 재구성된 어트랙터 상의 1점 X_i를 고려하고, 나머지 (N-1)개의 점에 대해서 중심을 X_i로 했을 때 반경 r의 m차원 초구(hyper-ball)내로 들어가는 점 X_j를 계산한 후, 모든 X_i를 중심으로 해서 반복함으로써, 식 (17)에 나타낸 상관적분이 얻어진다.

상관적분이 식 (19)와 같이 반경 r의 적당한 영역에서 스케일링된다고 하면,

$$C^m(r) \propto r^{\nu(m)} \qquad (19)$$

식 (19)의 스케일링 지수 v(m)를 상관지수(correlation exponent)라고 하고 상관지수는 이 식의 양변에 대수를 취한 후에

$$\log C^m(r) \propto \upsilon(m) \log\gamma \qquad (20)$$

어트랙터를 스케일 범위 $r_1 \leq r \leq r_2$에서 관측했을 때, 식 (19)가 성립하면 이 범위에서 자기상사성이 성립한다. 결국 $\nu(m)$은 횡축으로 $\log_r$, 종축으로 $\log C^m(r)$을 취해서 그린 그래프에 있어서 직선 부분의 기울기로, 재구성 차원 m의 증가와 함께 $\nu(m)$이 포화되어 점근해 가는 값이 상관차원이 되며, 그림 9에 압연기 베어링의 진동 신호에 대한 상관 차원을 나타내었다. 본 알고리즘은 Wolf 알고리즘을 적용하여 계산하였다.

6. 결 론

본 설명에서는 EEG 진동신호를 시간 지연과 차원을 계산하고, 매립법에 의해 어트렉터를 재구성하였으며, 포엔카레 단면을 살펴보았다. 또한 상관 차원과 리아프노프 지수를 이용하여 카오스 특성을 판별하였다. 어트렉터에서는 정확한 카오스 패턴을 찾기가 곤란하였으나 포엔카레 단면에서는 자기 유사성이 확인되어 카오스 특성이 비교적 명확하게 나타났다. 앞으로 정성적인 카오스

특성 뿐만 아닌 정량적인 카오스 특성 즉 리아프노프 지수, 프랙탈 차원 등에 대한 보완적인 연구가 진행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] P. Faure, H. Korn, Is there chaos in the brain? Concepts of nonlinear dynamics and methods of investigation, Life Sci. 324 (2001), 773-793.

[2] H. Korn, P. Faure, Is there chaos in the brain? II. Experimental evidence and related models, Comp. Rendus Biol. 326 (2003) 787-840.

[5] W.S. Pritchard, D.W. Duke, Measuring "chaos" in the brain: a tutorial review of EEG dimension estimation, Brain Cogn. 27 (1995), 353-397.

[6] A. Babloyantz, A. Destexhe, Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy, Proc. Natl. Acad. Sci. 83 (1986) 3513.3517.

[7] A.M. Lindenberg, The evolution of complexity in human brain development: an EEG study, Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol. 99 (1996) 405-411.

[8] H. Preißl, W. Lutzenberger, F. Pulvermu¨ ller, et al., Fractal dimensions of short EEG time series in humans, Neurosci. Lett. 225 (1997) 77-80.

[9] K. Lehnertz, Non-linear time series analysis of intracranial EEG recordings in patients with epilepsy . an overview, Int. J.Psychophysiol. 34 (1999) 45-52.

[10] C.E. Elger, G. Widman, R. Andrzejak, et al., Nonlinear EEG analysis and its potential role in epileptology, Epilepsia 41 (3) (2000), 34-38.

[11] S.N. Sarbadhikari, K. Chakrabarty, Chaos in the brain: a short review alluding to epilepsy, depression, exercise and lateralization, Med. Eng. Phys. 23 (2001) 445-455.

[12] R. Ferri, M. Elia, S.A. Musumeci, et al., Nonlinear EEG analysis in children with epilepsy and electrical status epilepticus during slow-wave sleep (ESES), Clin. Neurophysiol. 112 (2001) 2274-2280.

[13] R. Ferri, L. Parrino, A. Smerieri, et al., Nonlinear EEG measures during sleep: effects of the different sleep stages and cyclic alternating pattern, Int. J. Psychophysiol. 43 (2002) 27-286

[14] Jun - Wei Hsieh, Min-Tat Ko, Hong-Yuan, Kuo- Chin Fan, "A new wavelet-based edge detector via constrained optimization," Image and Vision Computing, 15, pp. 511-527, 1997.

[15] Christopher J. Deschenes, "Fuzzy Kohonen Network for Classification of Transients Using the Wavelet Transform for Feature Extraction," Information Science 87, pp. 247-266, 1995.

[16] Ratcliffe G.A. 'Condition Monitoring of Rolling Element Bearings Using the Envelope Techique' Proc. I Mech. E Seminer on Machine Condition Monitoring, Jan. 1990.

[17] K. F. Martin and P. Thrope, 'Normalized Spectra in Monitoring of rolling Bearing Elements' Wale, 159, pp153-160. 1992.

[18] Kantz, H. "A Robust method to estimate the maximalLyapunov exponent of a time series," Phys. Lett. A185. pp. 77-87, 1994

[19] Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D.,Ciliberto, S. "Liapunov exponents from time series," Phys. Rev. A34(6), pp. 4971-4979, 1986

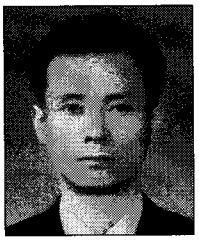
[20] Ko, J. H., Shim, J. C., Ryu, C. W., Park, C. G.,Yim, W. Y. "Detection of high impedance faults using neural nets and chaotic degree,"

[21] Takens, F. "Detecting strange attractors in turbulence, in dynamical systems and turbulence," Lecture Notes in Mathematics, 898, pp. 363-381, Springer 1981

[22] Grassberger, P., Procaccia, I. "Measuring strangeness of strange attractors," Physica 9D, pp. 189-208, 1983.

배 영 철

- 1984년 광운대 전기공학과 졸업(공학사).
- 1986년 광운대 대학원 전기공학과 졸업(공학석사)
- 1997년 광운대 대학원 전기공학과 졸업(공학박사)
- 1986년~1991년 한국전력공사
- 1991년~1997년 한국과학기술정보연구원
- 1997년~2006년 여수대학교 교수
- 2001년~2002년 Brigham Young University 방문교수
- 2006년~현재 전남대학교 공학대학 전기·전자통신·컴퓨터 공학부 교수
- 관심분야 : 로봇 제어, 카오스 제어 및 동기화, 비선형 제어, 산업통신망 제어



김 은 주

- 1991년 전남대학교 전기공학과 졸업 (공학사)
- 2002년 전남대학교 대학원 전기공학과 졸업(공학석사)
- 1991년~현재 한국과학기술정보연구원 선임연구원
- 관심분야 : 카오스 제어, 고출력 BLDC, SRM, 다중통신