

중첩격자에 대한 이동최소자승법 적용 연구

이 관 중,¹ 이 승 수,^{*2} 조 진 연³

APPLICATION OF MOVING LEAST SQUARE METHOD IN CHIMERA GRID METHOD

K. Lee,¹ S. Lee^{*2} and J.Y. Cho³

Chimera grid methods have been widely used in Computational Fluid Dynamics due to its simplicity in constructing grid systems over complex bodies, and suitability for unsteady flow computations with bodies in relative motion. However, the interpolation procedure for ensuring the continuity of the solution over overlapped regions fails when the so-called orphan cells are present. We have adopted the MLS(Moving Least Squares) method to replace commonly used linear interpolations in order to alleviate the difficulty associated with the orphan cells. MLS is one of the interpolation methods used in mesh-less methods. A number of examples with MLS are presented to show the validity and the accuracy of the method.

Key Words : 중첩격자기법(Chimera Grid Method), Orphan Cells, 이동최소자승법(Moving Least Square Method)

1. 서 론

중첩격자기법(Chimera Grid Method)[1]은 복잡한 형상을 가진 유동장 해석과, 외부장착물 분리 문제와 같이 격자계간 상대 운동이 있는 문제에 격자계 생성이 유리하여 많이 사용되는 격자 기법이다. 이 중첩격자기법은 서로 독립적으로 구성된 격자계에서 해를 구하고 해의 연속은 격자간의 정보를 내삽을 통하여 확보하게 된다. 이때의 내삽 과정은 문제점을 내포하고 있다. 먼저 orphan cell 발생에 의한 수치해의 성능 저하이다. 중첩영역 내 하나의 내삽점에 대해 2차원에서는 4개, 3차원에서는 8개의 피내삽점(Donor cell)을 필요로 한다. 이때 피 내삽점이 존재하지 않거나 혹은 피 내삽점의 수가 부족한 경우 내삽을 수행 할 수가 없게 되는데 이러한 내삽점을 orphan cell이라 한다. 지금까지의 중첩격자기법에서는 orphan cell 발생 시 피내삽점에 인접한 격자점의 값을 기존 피내삽점에서의 값으로 대체하여 내삽을 수행하는 형태를 취해왔다. 따라서 orphan cell 발생은 해의 결과에 좋지 않은 영향을 주게 된다. 또 다른 문제점으로 격자계의 다중중첩시의 유동정

접수일: 2007년 12월 3일, 심사완료일: 2008년 3월 3일.

1 학생회원, 인하대학교 대학원 항공공학과

2 정회원, 인하대학교 기계공학부 항공우주전공

3 정회원, 인하대학교 기계공학부 항공우주전공

* Corresponding author, E-mail: slee@inha.ac.kr

보의 손실을 꼽을 수 있다. 이는 중첩영역내의 두 개 이상의 격자계가 중첩이 되어 있어도, 그 중 하나의 격자계의 정보만을 내삽 하여 가져 올 수밖에 없다는 기존의 내삽의 특성에 의해 유발되는 문제이다. 이러한 문제들은 내삽이 격자점들의 기하학적 관계에 종속적인 방법이기 때문에 발생한다.

본 논문에서는 이와 같은 문제점이 있는 기존의 내삽방법을 대체하기 위해 전산구조분야에서 개발된 무요소 보간 기법인 이동최소자승법(Moving Least Square Method)을 도입하여 새로운 중첩격자 내삽방법을 개발하였다. 무요소 보간 기법[2]은 기존 유한 요소의 형상 함수를 격자와 무관하게 생성하는 기법을 말한다. 개발된 기법을 일차원과 이차원 비점성 유동장에 적용, 기존의 중첩격자기법과의 비교를 통해 수치해의 성능 향상과 효율성을 보였다.

2. 중첩격자기법

중첩격자기법[3]은 크게 다음과 같은 절차를 따라 유동장을 해석하게 된다.

- 독립된 격자계들의 인식 및 중첩
- 고체 물체면(Solid Wall) 혹은 해석에 사용되지 않는 Hole 점 제거(Hole Cutting)를 통한 교차영역 구성
- 내삽을 통한 유동 정보의 전달

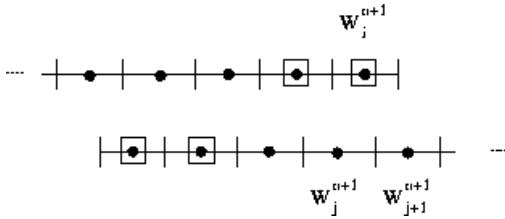


Fig. 1 Normal Interpolations in 1-D Problem.

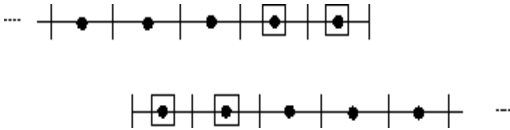


Fig. 2 Orphan cell Interpolations in 1-D Problem.

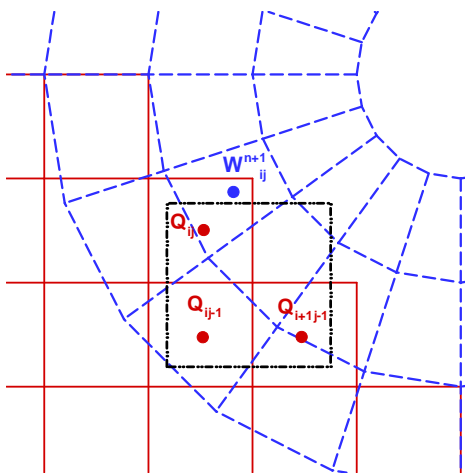


Fig. 3 Orphan cell Interpolations in 2-D problem.

본 논문에서는 위의 절차 중 orphan cell 발생에 직접적인 영향을 미치는 교차영역 구성부터 다루었다.

2.1 교차영역 구성 및 orphan cell

중첩격자기법은 독립적으로 구성된 개별 격자계의 중첩을 통해 전체 유동장의 격자계를 완성한다. 따라서 유동변수의 연속성을 전체 격자계에서 유지하기 위해 한 격자의 유동정보를 다른 격자로 이동시켜 주는 과정이 필요하게 된다. 이러한 역할은 내삽점이 수행하게 되며 이 내삽점은 격자계들이 서로 중첩되는 지역인 교차영역의 경계면에 위치한다. 이때의 교차영역은 1층 혹은 2층 이상의 다층으로 구성시킬 수 있으나, 해석자의 공간 정확도에 따라 교차영역을 구성하여야 한다.

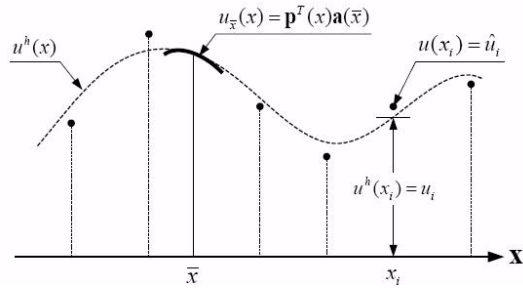


Fig. 4 Conceptual Explanation of MLS (Moving Least Square) Method.

Fig. 1은 일차원에서 이층의 교차영역 구성 시 정상 내삽점을 나타낸다. 하나의 내삽점(사각형)이 두 개의 정상점(검은 점)들의 사이에 위치하여 2개의 피내삽점을 확보 하고 있다. 이와는 달리 Fig. 2는 정상점이 개수가 부족한 orphan cell이 된다. 이러한 orphan cell은 유동장의 차원이 증가하여 필요한 피내삽점의 수가 증가되거나, 유동장의 형상이 복잡하여 충분한 교차영역이 구성되지 못하였을 때 많이 발생하게 된다. 특히 해석자의 공간 정확도가 2차 이상이라면, orphan cell의 발생은 더욱 더 증가 하게 된다. Fig. 3에는 2차원 문제에서 발생한 orphan cell을 보여주고 있다.

2.2 내삽 및 기존 orphan cell 처리 방법

기존 중첩격자기법에서 격자계간 정보교환을 수행하는 선형 내삽은 다음과 같다.

$$W_{i,j}^{n+1} = \sum_{i,j}^m Q_{i,j}^{n+1} N_{i,j} \tag{1}$$

여기서 $N_{i,j}$ 는 iso-parametric transformation이며, m 은 유동장의 차원을 나타낸다. 기존의 중첩격자기법에서는 인접한 격자점의 유동 정보를 필요한 피내삽점에서의 유동정보로 대체하여 내삽을 수행하는 형태로 orphan cell 발생을 대응하였다. 그러나 이러한 방법은 orphan cell의 존재를 인식한 후 교차영역을 재구성 하는 수준이기 때문에 orphan cell에 대한 근본적인 해결책이 될 수 없다.

3. 이동최소자승법(Moving Least Square Method)

선형 내삽이 가지는 문제들을 극복하고자 전산 구조분야에서 제안된 무요소 보간 기법 중 이동최소자승법을 적용하였다. 최소자승법을 확장한 이동최소자승법은 임의로 주어진 점들을 이용하여 정확한 근사가 가능하여 무요소 법에 최적으

로 알려져 있다[4].

이동최소자승법을 약술하면 다음과 같다. Fig. 4와 같이 임의로 주어진 N_{node} 개의 노드 \hat{u}_i 로부터, 근사되는 $u(x)$ 는

$$u(x) \cong u^h(x) = p^T(x)a(x), \text{ for all } x \in \Omega \quad (2)$$

이며 기저벡터 p 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p^T(x) &= [p_1(x), p_2(x), \dots, p_{N_{basis}}(x)] \\ &= [1, x, x^2, \dots, x^{N_{basis}-1}] \end{aligned} \quad (3)$$

n 차원 이라면, $N_{basis} = n + 1$ 이 되며, $a(x)$ 는 계수벡터이다. 여기에서 $a(x)$ 는 임의의 근사 점 \bar{x} 에서 오차를 최소화 시키는 값으로 결정 된다.

$$u(x) \cong u_{\bar{x}}(x) = p^T(x)a(\bar{x}) \quad (4)$$

L-2 error norm을 이용한 근사오차는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}}(b) &= \sum_{i=1}^{N_{node}} w_i(\bar{x}) [p^T(x_i)b - \hat{u}_i]^2 \\ &= [Pb - \hat{u}]^T w(\bar{x}) [Pb - \hat{u}] \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 $w(\bar{x})$ 는 가중치 함수이다. 근사오차 J 의 최소값은 stationarity condition에 의해 $\frac{\partial J_{\bar{x}}(b)}{\partial b} = 0$ 을 만족할 때 얻어진다. 즉,

$$\begin{aligned} P^T w(\bar{x}) Pb &= P^T w(\bar{x}) \hat{u} \\ A(\bar{x})b &= B(\bar{x})\hat{u} \end{aligned} \quad (6)$$

따라서

$$b = A^{-1}B\hat{u} = [P^T w(\bar{x})P]^{-1} [P^T w(\bar{x})\hat{u}] \quad (7)$$

식 (7)으로부터 근사오차를 최소화하는 계수벡터는 다음과 같다.

$$a(\bar{x}) = \begin{Bmatrix} a_1(\bar{x}) \\ a_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ a_{N_{basis}}(\bar{x}) \end{Bmatrix} = b, \quad \forall \bar{x} \in \Omega \quad (8)$$

그러므로 전체 영역에서의 근사 값 $u(x)$ 는 다음과 같고,

$$\begin{aligned} u(x) &\cong u^h(x) = p^T(x)a(x) \\ &= p^T(x)A^{-1}(x)B(x)\hat{u} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{node}} \sum_{k=1}^{N_{basis}} p_k(x) [A^{-1}(x)B(x)]_{ki} \hat{u}_i \end{aligned} \quad (9)$$

형상함수 ϕ 를 식 (10)와 같이 도입하면,

$$\phi_i = \sum_{k=1}^{N_{basis}} p_k(x) [A^{-1}(x)B(x)]_{ki} \hat{u}_i \quad (10)$$

그러면 식 (9)은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_{node}} \phi_i \hat{u}_i \quad (11)$$

이때 형상함수 ϕ_i 는 노드들의 기하학적 분포 조건을 요구하지 않는다. 즉, 임의로 분포된 노드들로부터 형상함수를 획득하여 근사를 수행한다. 이러한 특성은 선형 내삽이 가지는 한계를 극복한 것으로 중첩격자기법으로의 적용 시 기존의 내삽이 가지던 문제점들을 해결 할 수 있다.

4. 이동최소자승법과 중첩격자기법

중첩격자기법으로의 이동최소자승법 적용은 기존의 중첩격자기법의 내삽과정을 이동최소자승법으로의 대체함이다. 아래 Fig. 5는 정상 내삽점에 대한 이동최소자승법 적용을 보여준다. O형 격자계(점선)의 기존 내삽점인 $W_{i,j}^{n+1}$ 은 사각형 격자계(실선)로 부터의 정보 전달을 위해 반경 R (Radius of Support) 내의 노드들을 포획한다. 포획된 노드들의 분포로부터 $W_{i,j}^{n+1}$ 의 값은 근사를 통해 얻어진다.

이러한 과정을 orphan cell이 발생한 지점에 적용하면 다음 Fig. 6와 같다. 앞의 Fig. 5와는 달리 내삽과정에 사용되는 셀이 하나 부족함을 알 수 있다(검은색 사각형). 따라서 내삽점 $W_{i,j}^{n+1}$ 은 orphan cell이 되어 내삽을 수행 할 수 없는 지점이 된다. 하지만 이동최소자승법을 적용하면, 반경 R 내의 포획된 노드들로부터 근사값을 유추할 수 있다. 또한 두 내삽과정은 피내삽점의 수만 다르기 때문에 같은 알고리즘으로 내삽을 수행할 수 있다. 이는 orphan cell 발생 여부와 상관없이 전체 유동장을 해석할 수 있음을 나타낸다. 기존 중첩격자기법의 또 다른 문제점으로 지적된 격자계의 다중중첩 영역에서의 유동정보 손실 문제 역시 아래 Fig. 7과 같이 이동최소자승법

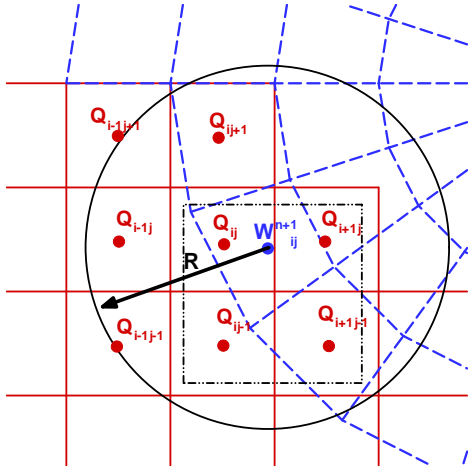


Fig. 5 MLS for Normal Interpolation Point, $W_{i,j}^{n+1}$.

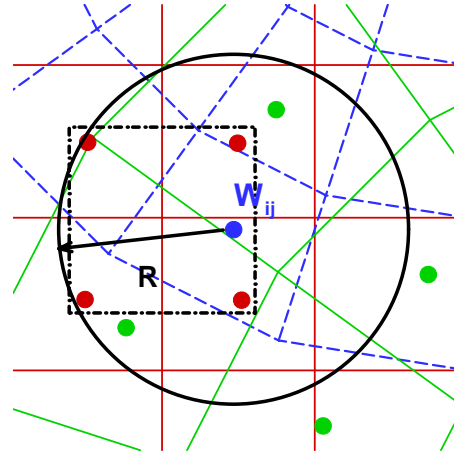


Fig. 7 MLS for Multiple Overlap.

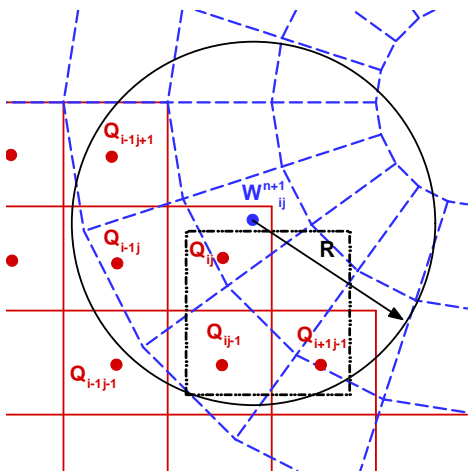


Fig. 6 MLS for orphan cells, $W_{i,j}^{n+1}$.

을 적용하면 해결할 수 있다. 기존의 선형 내삽에서는 검정색 사각형 내의 유동 정보, 즉 한 격자계의 유동 정보만을 이용할 수 있었던 것에 비해 검정색 원 안에 포함되는 모든 격자 점으로부터 유동정보를 획득할 수 있음을 확인 할 수 있다. 이는 중첩영역의 모든 격자계로부터 유동정보를 획득함을 의미하며, 이로부터 유동정보의 손실을 예방할 수 있다.

5. 적용 결과

이동최소자승법(MLS)이 중첩격자계의 내삽방법으로 사용될 수 있는가를 확인하기 위하여, 이동최소자승법이 적용된 중첩격자기법을 이용하여 1차원과 2차원 유동장을 해석 하였다.

먼저 준 1차원 노즐문제를 해석하였다. 이때 노즐의 단면적은 다음 식 (12)과 같이 구성되며, 배압과 정압의 비 (P_b/P_0)는 0.6784이다.

$$A(x) = 1.0 + 2.2(x - 1.5)^2, \quad 0 \leq x \leq 3 \quad (12)$$

격자계는 3개의 구역격자로 구성하였고, 교차영역을 적절히 구성하여 orphan cell이 발생하지 않도록 하였다. 또한 격자 크기에 따른 수렴성을 검토하였으며, 이때 오차는 다음과 같이 정의하였다.

$$e = \frac{1}{N} \sqrt{\sum (\rho - \bar{\rho})^2} \quad (13)$$

여기에서 N 은 cell의 수이며, $\bar{\rho}$ 는 엄밀해 이다. Fig. 8로부터 orphan cell이 없는 경우 기존의 내삽방법을 적용한 중첩격자기법과 이동최소자승법을 적용한 중첩격자기법과의 차이가 없음을 알 수 있다. 이때 가로축은 세 개의 구역격자 간격의 평균값을 사용하였다. 또한 Fig. 9를 통해 두 기법의 오차 역시 차이가 없음을 확인 할 수 있다. 이때 격자 수렴도의 기울기[5]는 총격과 부근에서 1차의 공간 정확도를 가지며 유동장을 해석하므로, 이론적인 값인 2보다 작은 1.3852를 나타내고 있다. Fig. 10은 orphan cell을 $x = 1.93$ 부근에 강제적으로 생성시의 결과를 나타낸다. 그림에서 보듯이 두 중첩격자기법 간의 차이가 나타나고 있다. Fig. 11은 orphan cell 존재 시의 격자 수렴도를 나타낸다. 이동최소자승법의 경우 orphan cell 존재 여부와 상관없이 거의 유사한 격자 수렴도를 보이나, 기존의 내삽을 사용한 중첩격자 기법에서는 orphan cell 존재 시 오차가 큰 폭으로 증가함을 확인 할 수 있다. 이로부터

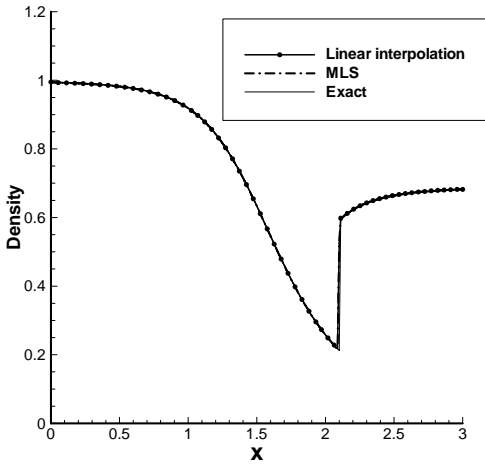


Fig. 8 Computational Results without orphan cell.

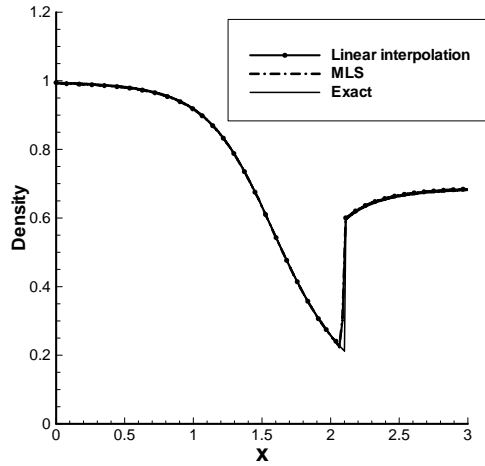


Fig. 10 Computational Results with orphan cell.

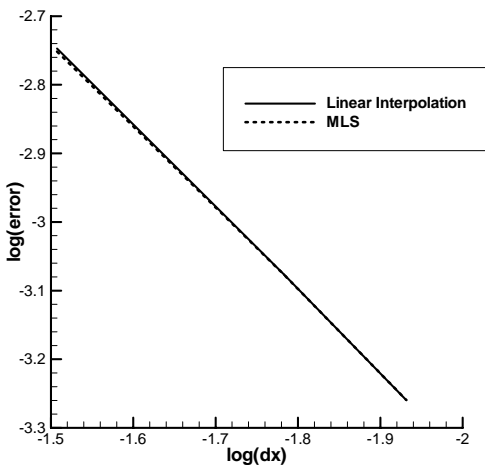


Fig. 9 Grid Convergence Test without orphan cell.

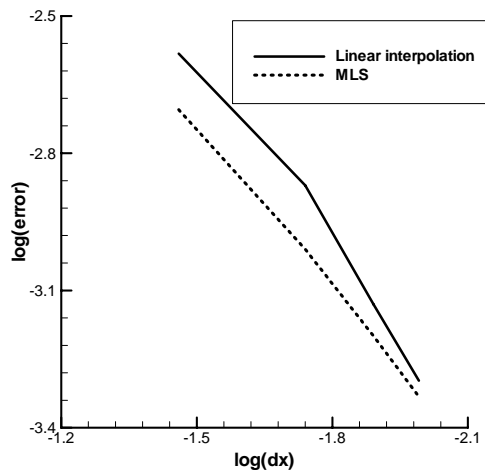


Fig. 11 Grid Convergence Test with orphan cell.

orphan cell 발생이 기존의 중첩격자기법에서 수치해의 성능 저하를 유발함을 확인 할 수 있으며, 이동최소자승법의 적용을 통해 이를 극복할 수 있음을 확인 하였다.

다음으로 비정상 문제인 Sod[6]문제를 해석하였다. 이때 초기의 밀도비와 압력비는 각각 8과 10이며, 사용된 격자계는 위 노즐문제와 같이 3개의 구역격자로 구성되어 있다. 먼저 orphan cell이 발생하지 않도록 교차영역을 구성하여 그 결과를 Fig. 12에 도시 하였다. 또한 orphan cell 을 $x = 0.72$ 부근에 강제적으로 생성하여 그 결과를 Fig. 13에 확대 도시하였다. 이로부터 orphan cell 지점에서 이동최소자승법을 적용한 중첩격자기법이 엄밀해에 보다 근접함을 확인 할 수 있다. Fig. 14와 Fig. 15는 두 경우의 격자 수렴도를 도시 하였다. 이때의 기울기는 각각 0.97과 0.91로 비정상 1차원 유동해석시의 이론적인 기울기 값인 1에 근접함을 확인 할 수 있다.

또한 위 노즐 문제의 결과와 마찬가지로 orphan cell 발생 시 기존의 내삽을 이용한 중첩격자기법에서 오차가 크게 발생함을 확인 할 수 있다.

이차원 유동장 해석은 참고문헌[7]에서 제시한 익형 외부장착물 분리 문제를 해석하였다. 아래 Fig. 16에는 사용된 격자계를 도시하였으며, 이때 각각의 격자계의 크기는 148×145 , 189×31 , 141×25 로 구성하였다. 자유류의 마하수는 $M_\infty = 0.6$ 으로 하였으며, CFL수는 10이다. 이로부터 정상 및 비정상 유동에 대해 이동최소자승법과 내삽을 적용한 중첩격자기법의 결과를 비교하였다. 먼저 정상 유동의 경우는 orphan cell이 발생하지 않는 경우이다. Fig. 17은 등압력선을 도시 하였다. 점선(이동최소자승법)과 실선(Bilinear interpolation)의 압력선이 거의 일치함을 알 수 있다. 앞의 1차원 결과와 마찬가지로 orphan cell이 존재 하지 않는 경우 두

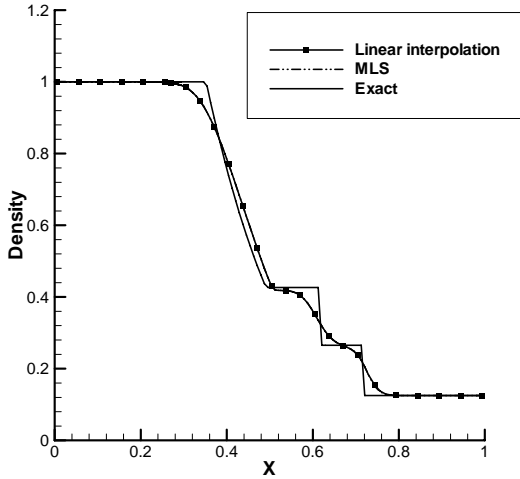


Fig. 12 Computational Results without orphan cell.

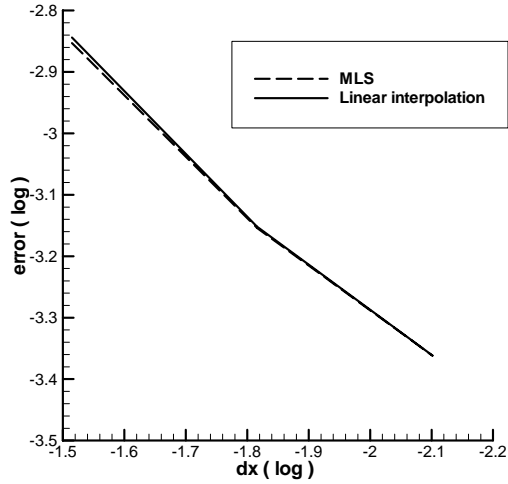


Fig. 14 Grid Convergence Test without orphan cell.

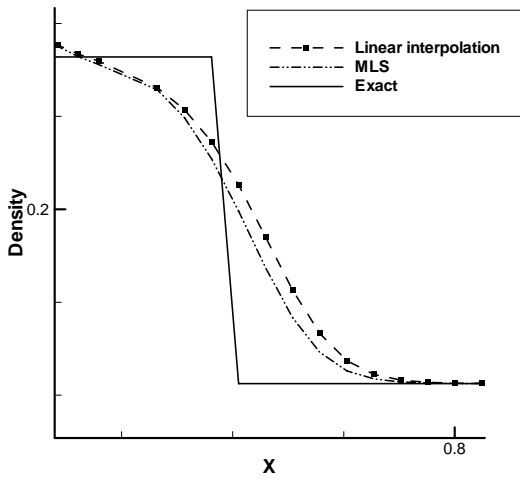


Fig. 13 Close-up View Near Overlapped Region.

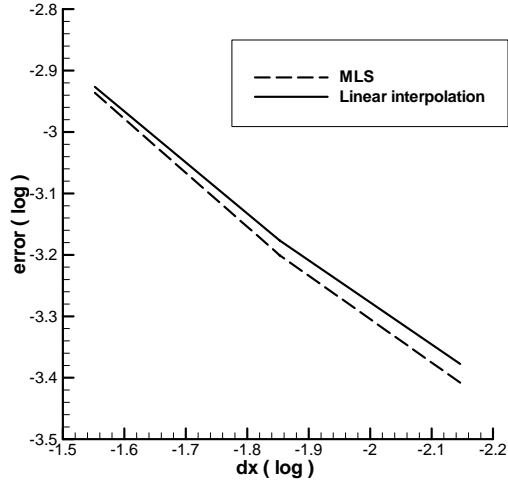


Fig. 15 Grid Convergence Test with orphan cell.

방식의 차이가 없는 것을 확인 할 수 있다. 비정상 유동은 0.35초 까지 수치 해석을 수행 하였다. 정상 유동 경우와는 달리 외부 장착물의 중량과 관성모멘트를 달리하여 무거운 외부 장착물과 가벼운 외부 장착물 경우로 나누어 해석하였다. 이때의 중량 비는 10:0.5 이며 관성 모멘트 비는 10:0.1 이다. 외부 장착물의 분리 운동이 진행함에 따라 외부장착물의 초기 위치를 벗어나게 되고 이로 부터 orphan cell이 발생한다. 전체 해석시간 동안 발생한 orphan cell은 725개(무거운 외부 장착물), 1425개(가벼운 외부 장착물)로 불안정한 분리 운동을 보이는 가벼운 외부 장착물의 경우에 두 배에 가까운 orphan cell을 발생한다. Fig. 18은 무거운 외부 장착물의 분리 운동 궤적을, Fig. 19는 가벼운 외부 장착물의 분리 운동 궤적을 도시 하였다. Fig. 20과 Fig. 21에는 외부 장착물에 작용하

는 힘과 모멘트 계수를 도시하였다. 결과로부터 orphan cell의 발생이 누적되면서 기존의 내삽을 사용한 중첩격자기법의 결과와 차이가 발생함을 확인 할 수 있다. 마지막으로 Table 1 에는 두 방법을 통한 해석 시간을 나타내었다. 위 익형 외부 장착물 분리 운동의 해석시간으로 이동최소자승법을 적용한 중첩격자기법이 정상과 비정상 유동 해석에 있어 각각 15%, 24%의 보다 많은 해석 시간을 요구함을 확인 할 수 있다. 이러한 해석시간의 증가는 기존의 중첩격자기법의 교차영역 구성 과정 이후 이동최소자승법의 적용을 위해 포획 반경 내에 존재하는 노드들을 찾는 과정을 추가하였기 때문이며, 이는 교차영역구성 과정에서부터 이동최소자승법의 적용을 고려한다면 상당한 시간을 단축할 수 있을 것으로 생각한다.

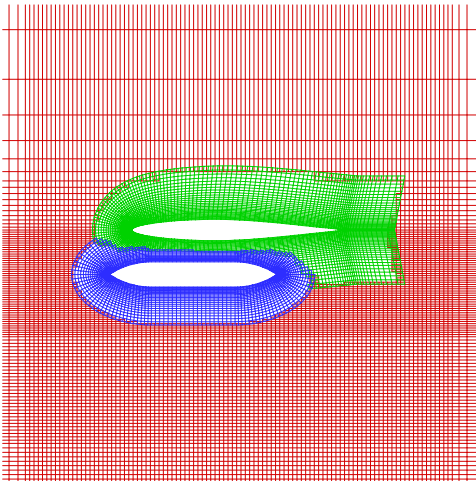


Fig. 16 Grid System for 2-Dimensional Wing Store Problem.

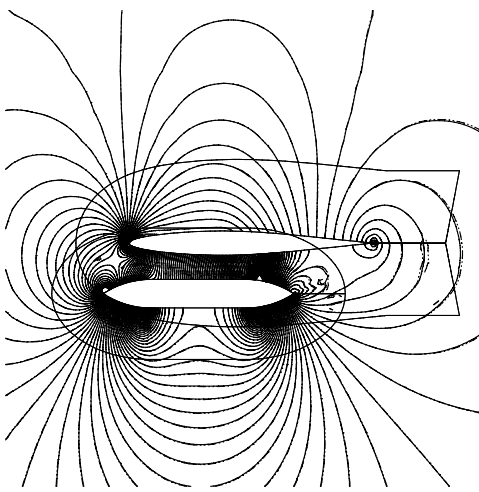


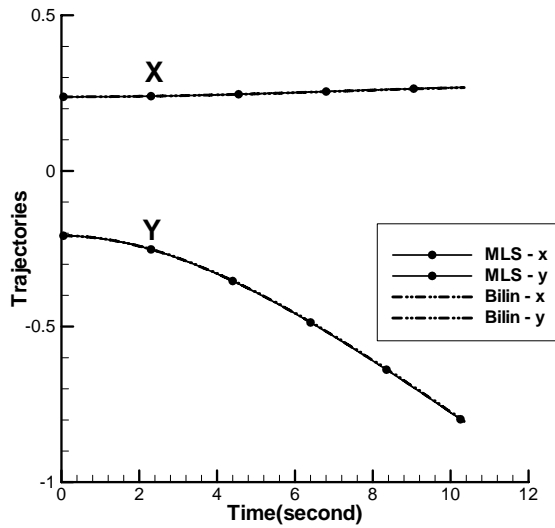
Fig. 17 Isobar Contour for 2-Dimensional Wing Store Problem.

4. 결론 및 향후 과제

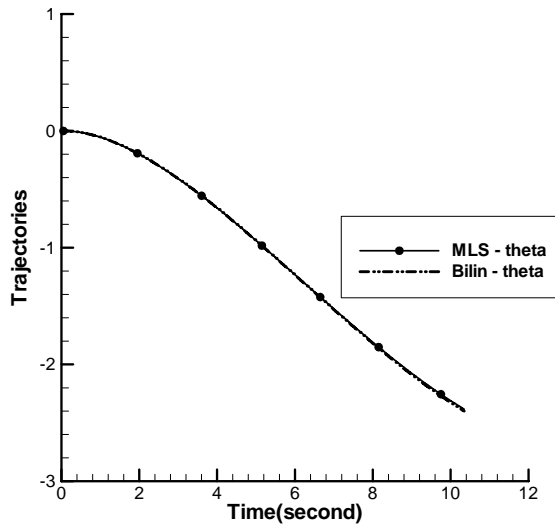
본 연구에서는 중첩격자기법에서 발생하는 orphan cell 문제를 해결하기 위하여 이동최소자승법을 도입하였다. 결과들로부터 기존 중첩격자기법의 내삽을 이동최소자승법으로의 대체가 가능하며, orphan cell 문제에서 기존 내삽을 이용한

Table 1 Computation time.

	Steady	Unsteady
Bilinear	4m 31s	54m 38s
MLS	5m 21s	71m 54s
비교	15%	24%



(a) X, Y



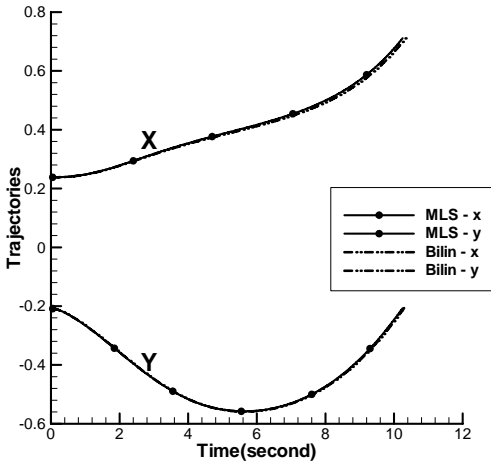
(b) Pitching angle.

Fig. 18 Trajectories of a heavy store separating from an airfoil, $M_\infty = 0.6$.

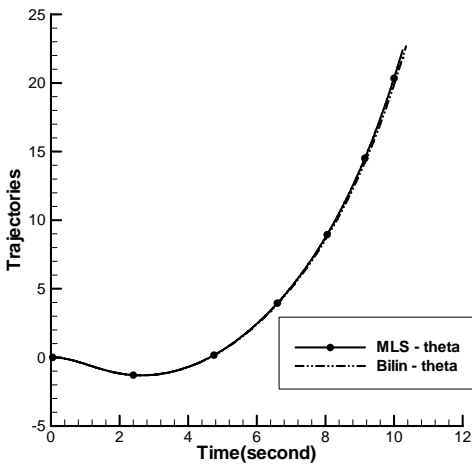
중첩격자기법 보다 자유로워짐을 확인 하였다. 앞으로는 점성 문제와 3차원 문제에의 적용 가능성 및 그 정확도에 대한 연구를 수행할 예정이다.

후 기

본 논문에서 수행한 연구는 한국학술진흥재단의 연구비 지원으로 이루어 졌음을 밝힙니다(KRF-2006-D00039). 저자는 이러한 학술 지원에 감사드립니다.



(a) X, Y



(b) Pitching angle

Fig. 19 Trajectories of a light store separating from an airfoil, $M_\infty = 0.6$.

참고 문헌

[1] 1983, Steger, J.L., Dougherty, F.C. and Benek, J.A., "A Chimera Grid Scheme," *ASME Fluids Engineering Division*, Vol.5, pp.59-63.
 [2] 1999, Atluri, S.N., Cho, J.Y. and Kim, H.G., "Analysis Of Thin Beams, Using The Meshless Local Petrov-Galerkin Method, With Generalized Moving Least Squares Interpolations," *Computational Mechanics*, Vol.24, pp.334-347.
 [3] 2006, 이승수, 김병규, 류세현, 채은정 이관중, "날개 전개

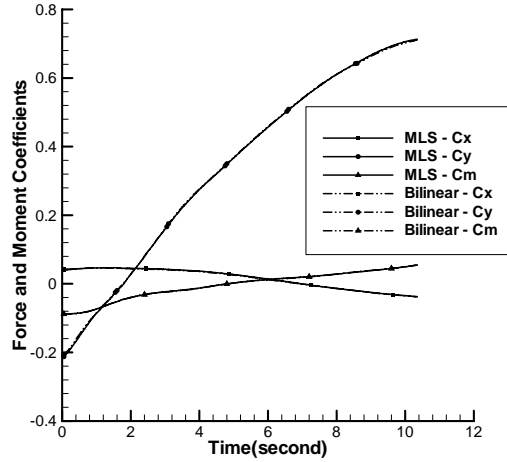


Fig. 20 Force and Moment coefficient histories of the heavy store.

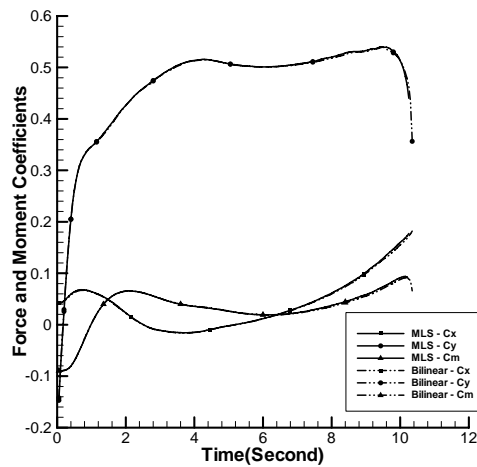


Fig. 21 Force and Moment coefficient histories of the light store.

에 따른 무장분리 특성해석," *국방과학연구소*

[4] 2004, Atluri, S.N., "The Meshless Local-Petrov-Galerkin Method for Domain & BIE Discretizations," *Tech Science Press*, Forsyth, GA.
 [5] 1998, Roach, P.J., *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Hermosa Publishers, Albuquerque, NM.
 [6] 1978, Sod, G.A., "Numerical Methods in Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comput. Phys.*, Vol.27, pp.1-31.
 [7] 2000, 이승수, 박민우, "외부장착물 분리운동해석 S/W(MSAP) 개발연구," *국방과학연구소*, MADC-401-000200.