

## 비선형 차수에 따른 Boussinesq 모형의 천수변형 특성 Shoaling Characteristics of Boussinesq Models with Varying Nonlinearity

박승민\* · 윤종태\*\*

Seung Min Park\* and Jong Tae Yoon\*\*

**요 지** : 비선형의 정도에 따른 Boussinesq 모형의 특성을 비교하기 위해 약비선형 모형인 MIKE21 BW 모듈과 완전비선형 모형인 FUNWAVE 모형을 이용하여 수치실험을 수행하였다. 진폭별 조파실험, 심해 파형경사별 천수실험 그리고 사주 지형상의 파랑 전파실험을 수행하였고, 이상의 실험을 통해 비선형성이 부각되는 천해역에서 비선형 모형의 중요성을 확인하였다. 특히 완전 비선형 모형이 약비선형 모형에 비해 비대칭 파형의 재현성이 우수하고, 천수현상에 따른 파고의 증가가 상대적으로 크게 나타나는 모형 간 특성을 확인하였다.

**핵심용어** : 약비선형, 완전비선형, Boussinesq 모형, 천수, 파랑 전파

**Abstract** : Numerical experiments with weakly nonlinear MIKE21 BW module and fully nonlinear FUNWAVE model are performed to identify the nonlinear characteristics of Boussinesq models with varying nonlinearity. Generation of waves with varying amplitudes, nonlinear shoaling and wave propagation over submerged bar experiments showed the importance of nonlinear model in shallow water where nonlinearity becomes prominent. Fully nonlinear model showed the nonsymmetrical wave form more clearly and gave larger shoaling coefficients than those of weakly nonlinear model.

**Keywords** : weakly nonlinear, fully nonlinear, Boussinesq model, shoaling, wave propagation

### 1. 서 론

Boussinesq형 방정식들은 파랑변형을 나타내는 수학적 모형의 하나로써 파랑의 비선형성과 분산성이 고려되어, 내재된 가정에 따른 적용범위 내에서는 상당히 정확한 모형이다. Peregrine(1967)은 수면변위와 수심평균 유속을 사용하여 변수심에 대한 식을 발표하였고 Freilich and Guza(1984)와 Elgar and Guza(1985)는 Peregrine의 방정식을 각 주파수에 대한 식으로 나타내어 파랑 스펙트럼의 발달을 연구하였다.

이러한 일반 Boussinesq 방정식들은 약분산성(weak dispersion)과 약비선형(weak nonlinearity) 가정 때문에 그 적용대상이 천해역과 비선형 효과가 작은 경우로 제한되었다. 일반 Boussinesq 방정식의 분산관계식은 선형 분산관계식과 비교하여 천해에서는 비교적 일치하지만 중

간수심에서부터 심해로 갈수록 그 오차가 커져 파랑의 분산성을 제대로 모의할 수가 없다. 이러한 단점을 보완하기 위해 Madsen et al.(1991)과 Nwogu(1993)는 확장형 Boussinesq 방정식을 발표하였다. Madsen et al.(1991)은 모형의 정확도 내에서는 영이 되는 항을 사용하여, 운동량 방정식에서 고차항의 정도를 높임으로써 보다 향상된 선형모형을 유도하였다. 이에 비해 Nwogu(1993)는 임의 수심에서의 유속을 새로운 종속변수로 선택하여 새롭게 지배방정식을 유도하였는데 연속방정식과 Euler 방정식으로부터의 유도과정에 일관성이 잘 유지되고 있다. 유속이 정의되는 수심은 분산관계식이 가장 정확히 나타나는 값으로 결정한다. 두 방법이 유도과정은 다르지만 분산관계식의 정확도에서는 비슷한 정도를 보여주었고, 심해역까지로의 확장은 한계가 있지만, 중간수심 영역에선 일반 Boussinesq 모형에 비해 훨씬 더 향상된 분산성을 보여준

\*경성대학교 토목공학과(Department of Civil Engineering, Kyungsoong University, Busan 608-736, Korea)

\*\*경성대학교 토목공학과(Corresponding Author: Department of Civil Engineering, Kyungsoong University, Busan 608-736, Korea. gtyun@ks.ac.kr)

다. Wei and Kirby(1995)는 Nwogu의 방정식에 대해 고차의 수치모형을 발표하고 이를 이용해 방정식의 특성을 분석하였다.

확장형 Boussinesq 방정식은 분산성에 있어서는 그 정확도가 많이 향상되었지만 비선형성에 있어서는 여전히 약비선형이라는 가정을 안고 있다. 파가 해안을 향해 전파해 오면 천수 현상에 의해 파고가 증가하게 되고 결국 쇄파가 일어나게 되는데, 파고와 수심비로 나타내어지는 이러한 비선형성이 강하게 나타나는 쇄파대 전후에서의 파랑은 약비선형 모형으로 정확히 모의되지 않는다. 따라서 파형경사가 급해지거나 쇄파가 일어나는 곳에서까지 파랑을 정확히 모의하기 위해서는 비선형성에 대한 모형의 확장이 필요하다. Wei et al.(1995)은 Nowgu의 방정식에서 처럼 특정수심에서의 유속을 변수로 선택하여 Boussinesq 방정식을 유도하였는데, 자유수면 경계조건의 비선형성을 그대로 유지함으로써 모형의 비선형성을 확장하였다. 즉, Wei et al.(1995)의 완전비선형 모형은 기존의 약비선형 모형들이 임에 반해 의 항 들을 포함하고 있다. 여기서 파장에 대한 수심비는 파장 매개변수, 수심에 대한 파고비는 진폭 매개변수이다.

이러한 Boussinesq 방정식의 개발과 함께 천해 파랑변형 모의를 위한 Boussinesq 모형의 적용이 연구 및 설계 목적으로 다양하게 수행되는데, 현재 가장 널리 사용되는 모형으로는 Madsen and Sorensen(1992)의 식에 근거한 MIKE21 Boussinesq Wave 모듈(MIKE21 BW)과 Wei et al.(1995)의 식을 이용한 FUNWAVE 모형이 있다. 두 모형 모두 분산성에 있어서는 확장형 구조를 취하고 있어 비슷한 정도의 적용영역 한계를 가지지만 비선형성에 있어서는 MIKE21 BW가 약비선형, FUNWAVE의 경우 완전비선형이란 차이가 있다.

본 연구에서는 MIKE21 BW와 FUNWAVE 모형을 이용한 천해 파랑변형 모의를 통해 비선형성의 정도에 따른 모형의 특성을 비교하였다. 진폭별 내부조파, 심해 파형경사에 따른 비선형 천수변형 그리고 사주 지형 상의 파랑변형 모의를 수행하였고 이로부터 각 모형의 특성과 한계를 검토하였다.

## 2. 지배방정식

### 2.1 MIKE21 BW

MIKE21 BW는 Madsen and Sorensen(1992)의 식을 기본방정식으로 사용한다.

$$\eta_t + P_x + Q_y = 0 \quad (1)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{PQ}{d}\right)_y + gd\eta_x + \psi_1 = 0 \quad (2)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{PQ}{d}\right)_x + gd\eta_y + \psi_2 = 0 \quad (3)$$

그리고

$$\begin{aligned} \psi_1 = & -\left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(P_{xxt} + Q_{xyt}) - Bgh^3(\eta_{xxx} + \eta_{xyy}) \\ & -hh_x\left(\frac{1}{3}P_{xt} + \frac{1}{6}Q_{yt} + 2Bgh\eta_{xx} + Bgh\eta_{yy}\right) \\ & -hh_y\left(\frac{1}{6}Q_{xt} + Bgh\eta_{xy}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & -\left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(Q_{yyt} + P_{xyt}) - Bgh^3(\eta_{yyy} + \eta_{xxy}) \\ & -hh_y\left(\frac{1}{3}Q_{yt} + \frac{1}{6}P_{xt} + 2Bgh\eta_{yy} + Bgh\eta_{xx}\right) \\ & -hh_x\left(\frac{1}{6}Q_{yt} + Bgh\eta_{xy}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$\eta$ : 수면변위

$P$ : 축 방향의 수심적분 유속

$Q$ : 축 방향의 수심적분 유속

$B$ : Boussinesq 분산계수

$d$ : 전 수심(=h+ $\eta$ )

$h$ : 정지수심

$g$ : 중력가속도

### 2.2 FUNWAVE

Wei et al.(1995)의 완전비선형 Boussinesq 방정식에 내부조파를 위한 원천항  $f(x, y, t)$ 와 외점성항  $F_{br}$ ,  $G_{br}$  및 스폰지층에서의 감쇄항  $F_{sp}$ ,  $G_{sp}$ 를 추가한 후 정리하면 다음과 같이 연속방정식과 운동량방정식으로 표현된다.

$$\eta_t = E'(\eta, u, v) \quad (6)$$

$$[U(u)]_t = F'(\eta, u, v) + [F_1(v)]_t \quad (7)$$

$$[V(v)]_t = G'(\eta, u, v) + [G_1(u)]_t \quad (8)$$

여기서

$$E' = E(\eta, u, v) + \gamma E_2(\eta, u, v) + f(x, y, t) \quad (9)$$

$$F' = F(\eta, u, v) + \gamma[F_2(\eta, u, v) + F^t(\eta, u_t, v_t)] + F_{br} + F_{sp} \quad (10)$$

$$G' = G(\eta, u, v) + \gamma[G_2(\eta, u, v) + G^t(\eta, u_t, v_t)] + G_{br} + G_{sp} \quad (11)$$

그리고 함수들은 다음과 같다.

$$U = u + h[b_1 hu_{xx} + b_2(hu)_{xx}] \quad (12)$$

$$V = v + h[b_1 hv_{yy} + b_2(hv)_{yy}] \quad (13)$$

$$E = -\frac{1}{x}[(Au)_x + (Av)_y] - a_1 h^3 (u_{xx} + v_{yy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xx} + (hv)_{xy}]_x - a_1 h^3 (u_{xy} + v_{yy}) + a_2 h^2 [(hu)_{xy} + (hv)_{yy}]_y \quad (14)$$

$$F = -g\eta_x - (uu_x + uv_y) \quad (15)$$

$$G = -g\eta_y - (uv_x + vv_y) \quad (16)$$

$$F_1 = -h[b_1 hv_{xy} + b_2(hv)_{xy}] \quad (17)$$

$$G_1 = -h[b_1 hu_{xy} + b_2(hu)_{xy}] \quad (18)$$

$$E_2 = -\left[ a_1 h^2 \eta + \frac{1}{6} \eta (h^2 - \eta^2) \right] (u_{xx} + v_{yy})_x - \left[ a_2 h \eta - \frac{1}{2} \eta (h + \eta) \right] [(hu)_{xx} + (hv)_{yy}]_x - \left[ a_1 h^2 \eta - \frac{1}{6} \eta (h^2 - \eta^2) \right] (u_{xy} + v_{yy})_y - \left[ a_2 h \eta - \frac{1}{2} \eta (h + \eta) \right] [(hu)_{xy} + (hv)_{xy}]_y \quad (19)$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) [u(u_x + v_y) + v(u_x + v_y)]_x - (z_\alpha - \eta) [u[(hu)_x + (hv)_y]_x + v[(hu)_x + (hv)_y]_x] - [(hu)_x + (hv)_y + \eta(u_x + v_y)]_x^2 \quad (20)$$

$$G_2 = -\frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) [u(u_x + v_y) + v(u_x + v_y)]_y - (z_\alpha - \eta) [u[(hu)_x + (hv)_y]_x + v[(hu)_x + (hv)_y]_x] - \frac{1}{2} [(hu)_x + (hv)_y + \eta(u_x + v_y)]_y^2 \quad (21)$$

$$F^t = \frac{1}{2} \eta^2 [(u_t)_x + (v_t)_y] + \eta [h(u_t)]_x + [h(v_t)]_y \quad (22)$$

$$G^t = \frac{1}{2} \eta^2 [(u_t)_x + (v_t)_y] + \eta [h(u_t)]_x + [h(v_t)]_y \quad (23)$$

여기서  $u, v$ 는 평면유속,  $h$ 는 수심,  $\eta$ 는 수면변위이고  $z_\alpha$ 는 유속이 정의되는 수심이다.  $\gamma$ 가 1일 경우 완전 비선형 Boussinesq 방정식이 되고  $\gamma=0$ 이 되면 Nwogu의 확장형 Boussinesq 방정식이 된다. 그리고  $A = h + \eta$ 이며,  $a, b$ 는 기준수심  $z_\alpha$ 에 따라 정해지는 상수이다.

### 3. 수치기법

MIKE21 BW의 경우 차원에 따라 수치기법을 달리하고 있는데, 일차원 모형의 경우 유한요소법을 그리고 이차원 모형의 경우 Abbot et al.(1978)에 근거한 유한차분법을 사용하고 있다. FUNWAVE의 경우 차분오차가 분산항보다 작아지도록 1계 공간미분항을 4차의 정확도로 차분화 하고 분산항은 2차의 정확도로 차분화 하였으며 시간적분에는 4차의 Adams predictor-corrector 기법을 사용하였다. 두 모형 모두 조파기법의 경우 내부조파기법을 사용하며 경계에서는 스폰지 경계층을 사용하고 있다.

### 4. 수치실험 및 결과

#### 4.1 진폭별 조파실험

Boussinesq 방정식이 가지는 장점은 천해의 파랑변형에서 나타나는 비선형성을 고려할 수 있다는 점이다. 본 실험에서는 이를 확인하기 위해 진폭을 변화시켜 비선형파의 조파 기능을 확인하였다. Fig. 1과 같은 영역에 대해 파를 내부 조파하였다. 연산영역은 길이 50 m, 수심  $h = 0.5$  m 그리고 조파 원천함수의 중심은  $x_s = 25$  m에 위치해 있다. 파의 감쇄를 위한 5 m폭의 스폰지층을 양 경계에 설정하였다. 주기는 0.1초를 사용하였고, 파고는  $H/h = 0.1, 0.2, 0.3$ 으로 달리 하였으며,  $\Delta x = 0.02$  m,  $\Delta t = 0.02$  s이다.

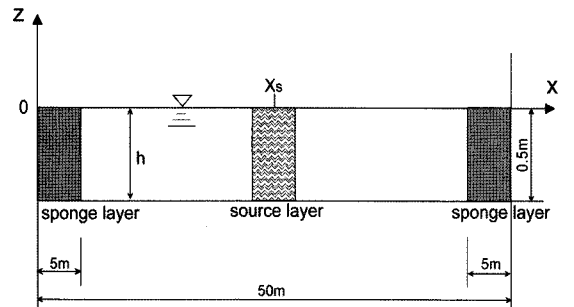


Fig. 1. The computational domain.

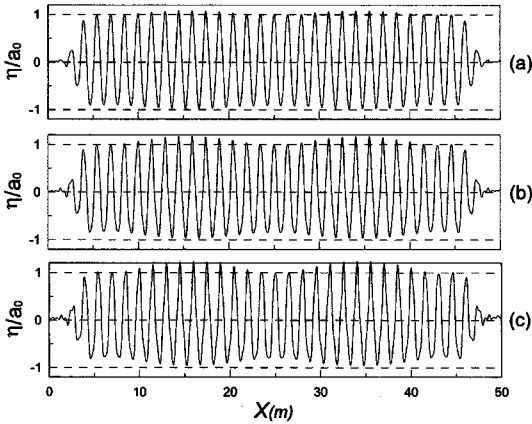


Fig. 2. Snapshots of surface elevation at  $T=1.0$  s. by FUNWAVE. (a)  $a=0.1$ , (b)  $a=0.2$ , (c)  $a=0.3$ .

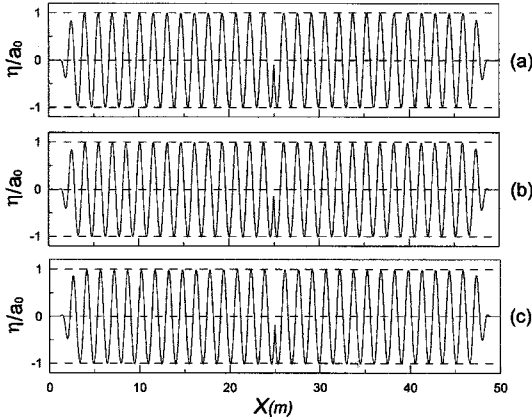


Fig. 3. Snapshots of surface elevation at  $T=1.0$  s. by MIKE21 BW. (a)  $a=0.1$ , (b)  $a=0.2$ , (c)  $a=0.3$ .

FUNWAVE의 계산결과를 보면(Fig. 2) 파봉은  $\eta/a_0=1$  보다 위에 위치하고 파곡은  $\eta/a_0=-1$ 에 못 미치는 값을 보여준다. 또한 파봉은 보다 예리해지고 파곡은 보다 평탄해 지는 비선형파의 특성을 잘 보여주고 있고, 진폭이 커질수록 이러한 효과가 현저하게 나타남을 알 수 있다. 이에 비해 MIKE21 BW의 경우(Fig. 3) 파고 값은 정확히 계산하지만 앞서 언급한 비선형파의 비대칭적 특성은 전혀 나타나지 않고 있다.

#### 4.2 천수실험

파랑이 외해에서 육지로 전파해오며 수심이 알아지면 파고가 커지면서 파동의 비선형성이 중요해지게 된다. 파고의 증가로 나타나는 이러한 천수효과는 상대수심과 심해파형경사의 함수로서 비선형 파랑변형의 하나이다. 경

사 1/30의 해안에 대해 심해파형경사에 따른 천수변형을 계산한 결과를 Fig. 4에 나타내었다. 결과는 대부분의 파형경사에 대해 실험치와 잘 일치하는 것으로 알려진 Shuto(1974)의 식 및 선형이론식과 비교하였다. 두 모형 모두 전체적으로 Shuto의 비선형 천수식과 양호한 일치를 보여주고 있다. 특히 비선형 효과를 고려함으로써 파형경사에 따른 천수계수의 변화가 뚜렷이 구분됨을 확인할 수 있다. 두 모형을 비교하면 FUNWAVE 모형이 MIKE21 BW 모형보다는 일관되게 큰 값을 보여주며, 이러한 차이는 심해파형경사가 커짐에 따라 심해진다. 심해파형경사가 가장 큰 0.02의 경우에는 Shuto의 식을 기준으로 FUNWAVE 모형은 과대산정을, 그리고 MIKE21 BW의 경우 과소산정된 결과를 보여주고 있다. Shuto의 식은 다음과 같다.

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{\tanh kh}}, \quad U_r \leq 30$$

$$Hh^{2/7} = \text{const.}, \quad 30 \leq U_r \leq 50$$

$$Hh^{5/2}(\sqrt{U_r} - 2\sqrt{3}) = \text{const.}, \quad 50 \leq U_r$$

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

$$U_r = gHT^2/h^2 \quad (24)$$

여기서  $H$ 는 파고,  $T$ 는 주기,  $k$ 는 파수이다.

#### 4.3 사주지형 상의 파랑변형 실험

Fig. 5와 같은 사다리꼴 사주지형에 대한 파랑전파를 모의하여 계측치(Beiji and Battjes, 1993)와 비교하였다. 파고계측은 사주지형상의 7개 지점에서 수행되었다. 수심변화에 따른 천수변형 및 고차 조화성분의 발생을 모의하기 위한 실험으로서 입사파의 파고는 2.0 cm, 주기는 2초이며  $\Delta x = 0.05$  m,  $\Delta t = 0.02$  s를 사용하였다. 결과를 보면(Fig. 6) 전체적으로 전방 사면에서의 수심 감소에 따른 파형왜곡(St. 2), 천단부에서의 비대칭 비선형 파형과 고차 조화성분의 발생(St. 3,4), 배후 사면의 수심 증가에 따른 고차 조화성분의 분리(St. 5)등이 잘 구현되고 있다. 전 자료에 걸쳐 파봉의 경우 FUNWAVE 모형이 MIKE21 BW보다 큰 값을 보여주며 St. 5를 제외하고는 두 모형 모두 계측치보다 크게 나타났다. 파곡의 경우 두 모형이 비슷한 값을 보여주며 St. 5를 제외하면 계측치와 잘 일치하고 있다. 조화성분의 발달을 보면 위상 및 크기에 있어 초

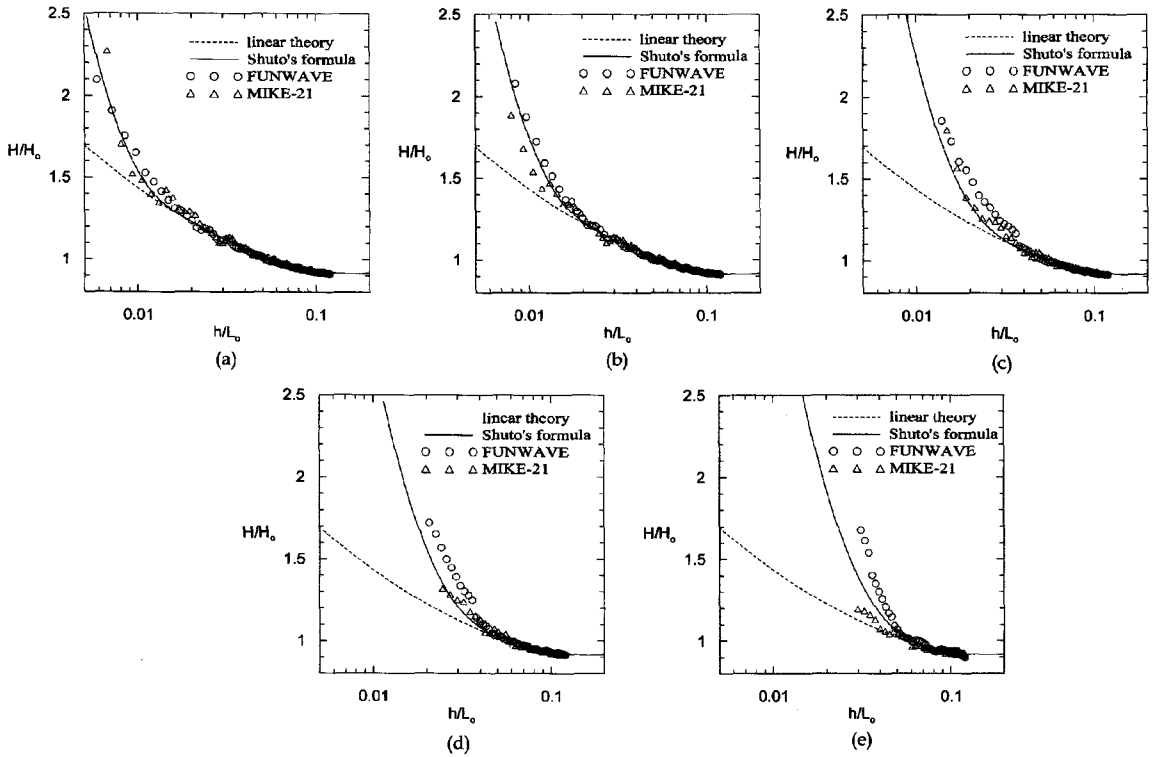


Fig. 4. Shoaling coefficient for (a)  $H_0/L_0=0.001$ , (b)  $H_0/L_0=0.002$ , (c)  $H_0/L_0=0.005$ , (d)  $H_0/L_0=0.01$ , (e)  $H_0/L_0=0.02$ .

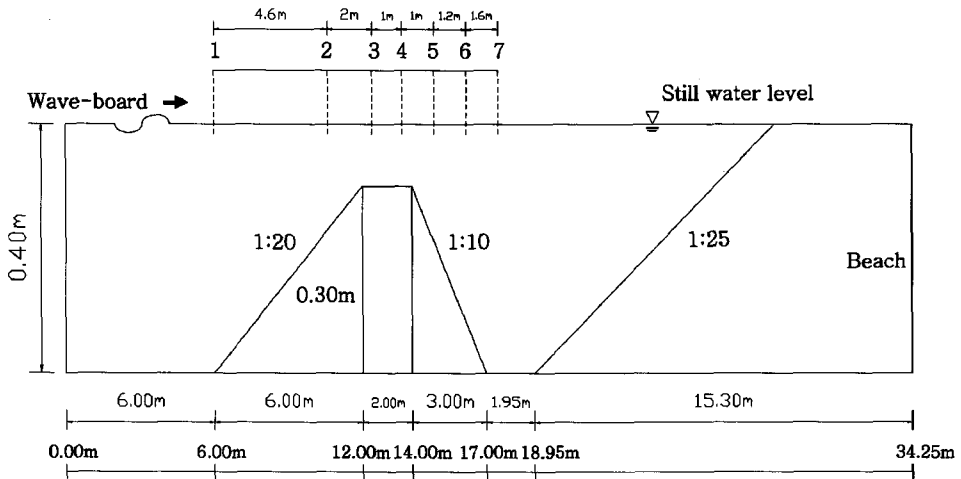


Fig. 5. Longitudinal section of wave flume.

기에는 계측치와 비교적 일치하고 있지만 후방으로 갈수록 오차가 커지는 것을 볼 수 있다. 초기 조화성분의 발달은 FUNWAVE 모형이 보다 정확하게 모의하는 것으로 판단된다.

## 5. 결 론

비선형성의 정도에 따른 Boussinesq 모형의 특성을 비교하기 위해 약비선형 모형인 MIKE21 BW 모듈과 완전

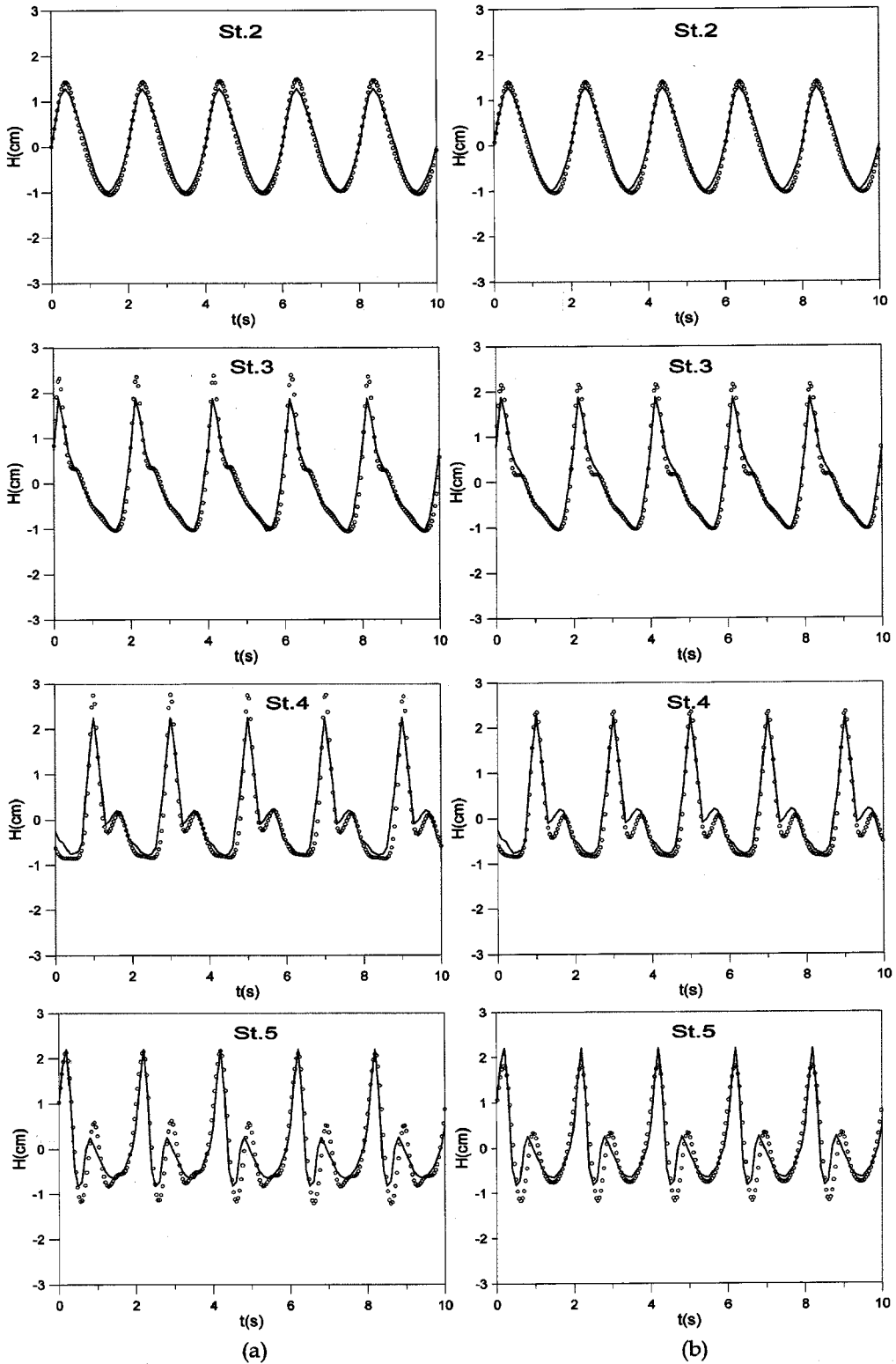


Fig. 6. Surface elevations at several stations. (—) measured, (○) computed; (a) FUNWAVE, (b) MIKE21 BW.

비선형 모형인 FUNWAVE 모형을 이용하여 진폭별 조파 실험, 심해파형별 천수실험 그리고 사주 지형상의 파랑전파 실험을 수행하였다.

진폭별 내부조파 실험에서 FUNWAVE 모형의 경우 파봉은 보다 예리해지고 커지며 파곡은 보다 작고 평탄해지는 비선형파의 특성을 잘 보여주었고, 진폭이 커질수록 이러한 효과가 현저하게 나타났다. 이에 비해 MIKE21 BW의 경우 파고 값은 정확히 계산하지만 비선형파의 비대칭적 특성은 전혀 나타나지 않았다. 심해파형별 천수실험에서 두 모형 모두 전체적으로 Shuto의 비선형 천수식과 양호한 일치율을 보여주었다. FUNWAVE 모형이 MIKE21 BW 모형보다는 일관되게 큰 천수계수 값을 보여주며, 이러한 차이는 심해파형경사가 커짐에 따라 심해졌다. 사다리꼴 사주지형에 대한 파랑전파 모의에서는 전체적으로 전방 사면에서의 수심 감소에 따른 파형왜곡, 천단부에서의 비대칭 비선형 파형과 고차 조화성분의 발생, 배후 사면의 수심증가에 따른 고차 조화성분의 분리 등이 잘 구현되었다. 전 자료에 걸쳐 파봉의 경우 FUNWAVE 모형이 MIKE21 BW보다 큰 값을 보여주며 St. 5를 제외하고는 두 모형 모두 계측치보다 크게 나타났다. 파곡의 경우 두 모형이 비슷한 값을 보여주며 St. 5를 제외하면 계측치와 잘 일치하였다. 조화성분의 발달은 위상 및 크기에 있어 초기에는 계측치와 비교적 일치하고 있지만 후방으로 갈수록 오차가 커졌으며, 초기 조화성분의 발달은 FUNWAVE 모형이 보다 정확하게 모의하였다.

이상의 실험을 통해 비선형성이 부각되는 천해역에서 비선형 모형의 중요성을 확인하였고, 특히 완전비선형 모형이 약비선형 모형에 비해 비대칭 파형의 재현성이 우수하고, 천수현상에 따른 파고의 증가가 상대적으로 크게 나타나는 모형 간 특성을 확인하였다.

## 사 사

이 논문은 2007학년도 경성대학교 학술연구비지원에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

- Abbott, M.B., Petersen, H.M. and Skovgaard, O., 1978. On the numerical modelling of short waves in shallow water. *J Hydr Res.*, 16, pp.173-204.
- Beiji, S. and Battjes, J.A., 1993. Experimental investigation of wave propagation over a bar, *Coastal Engineering*, 19, pp.151-162.
- Elgar, S. and Guza, R.T., 1985. Shoaling gravity waves : Comparisons between field observations, Linear theory and a nonlinear model, *J. Fluid Mech.*, 158, pp.47-70.
- Freilich, M.H. and Guza, R.T., 1984. Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves, *Proc. Roy. Soc. London*, A311, pp.1-41.
- Madsen, P.A., Murray, R. and Sørensen, O.R., 1991. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coast. Engrg.*, 15(4), pp.371-388.
- Madsen P.A. and Sorensen, O.R., 1992. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2: A slowly- varying bathymetry. *Coastal Eng.*, 18, pp.183-204.
- Nwogu, O., 1993. An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, 119(6), pp.618-638.
- Peregrine, D.H., 1967. Long wave on a beach, *J. Fluid Mech.*, 27, pp.815-827.
- Shuto, N., 1974. Nonlinear long waves in a channel of variable section, *Coastal Engineering in Japan, JSCE*. 17, pp.1-12.
- Wei, G. and Kirby, J.T., 1995. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, 121(5), pp.251-261.
- Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T. and Subramanya, R., 1995. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part I: Highly nonlinear unsteady waves, *J. Fluid Mech.*, 294, pp.71-92.

Received February 12, 2008

Accepted February 17, 2008