전차수 슬라이딩 모드 관측기를 대체하는 축소차수 관측기의 LMI 기반 설계

An LMI-Based Design of Reduced Order Observers Substitutable for Full Order Sliding Mode Observers

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract : This paper presents an LMI-based method to design reduced order observers by which we can substitute full order sliding mode observers for a class of uncertain time-delay systems. We show that a reduced order observer can be constructed as long as the uncertain system satisfies the previous LMI existence conditions of a full order sliding mode observer. And we give explicit formulas of the reduced order observer gain matrices. Finally, we give a simple LMI-based design algorithm, together with a numerical design example.

Keywords : Linear Matrix Inequality(LMI), sliding observer, time-delay system, reduced order observer

I. 서론

최근 여러 저자들에 의하여 슬라이딩 모드 관측기 설계방법이 제안되었다[1-5]. 그리고 [4-5]의 방법을 일반화하여 불확실한 시간 지연 시스템에도 적용 가능한 LMI 기반 슬라이딩 모드 관측기 설계방법이 최근에 [6]에서 제안되었다. [6]에서는 LMI를 사용하여 안정한 슬라이딩 동작을 보장하는 슬라이딩 모드 관측기의 존재조건이 구해졌고 구해진 LMI 존재조건의 해를 사용하여 관측기 이득 행렬의 공식을 제시되었다. [6]의 존재조건은 [4-5]의 존재조건을 포괄하는 형태이다. 본 논문에서는 [1-6]에서 고려된 전차수 슬라이딩 모드 관측기를 대체할 수 있는 축소차수 관측기의 LMI 기반 설계방법을 제시한다. [4-6]에 주어진 LMI 존재 조건을 만족시키기만 하면 항상 축소차수 관측기 설계가 가능함을 보이고 축소차수 관측기 이득 행렬의 공식을 제시한다. 마지막으로 LMI 기반 설계 알고리즘을 설계 예와 함께 제시한다.

II. 문제 설정

우리는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 고려한다[3, 6]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+A_d x_d(t)+Bu(t)+B_d u_d(t)+D\xi(t,x,x_d,u) \\ y(t) &= Cx(t), \quad x_d(t)=x(t-h), \quad u_d(t)=u(t-h) \\ x(t) &= 0, \quad t<0, \ x(0)=x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n, u(t)\in R^m, y(t)\in R^p$ 로 각각 상태, 입력, 출력을 가리킨다. $h>0$으로 시스템의 시간 지연 상수이다. 시스템 (1)은 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $A\in R^{n\times n}$, $A_d\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, $B_d\in R^{n\times m}$, 그리고 $C\in R^{p\times n}$, $D\in R^{n\times q}$ 로 상수 행렬들이다.

A2: $rank(C)=p\geq q=rank(D)$

A3: $\|\xi(t,x,x_d,u)\|\leq r_1\|u\|+\beta(t,y,y_d)$ 를 만족시키는 상수 r_1 과 함수 $\beta(t,y,y_d)$ 가 알려져 있다. 여기에서 $y_d=y(t-h)$이다.

다음의 보조정리는 [6]에 주어진 것으로 주요 결과를 유도할 때 이용될 것이다.

보조정리 [6]: 다음의 관측기를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t)+A_d\hat{x}_d(t)+Bu(t)+B_d u_d(t) \\ &\quad +L(y(t)-\hat{y}(t))+D\nu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

여기에서 $L\in R^{n\times p}$ 로 이득이고 $\hat{x}_d(t)=\hat{x}(t-h)$이다. 불연속적인 벡터 $\nu(t)$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\nu(t)=-\rho(t,y,y_d,u)\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \tag{3}$$

여기에서 $\sigma=F(\hat{y}-y)=F(C\hat{x}-Cx)$ 이고 $F\in R^{m\times q}$ 이다. 스칼라 함수 $\rho(t,y,y_d,y)$는 $r_0>0$에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\rho(t,y,y_d,u)\geq r_0+r_1\|u\|+\beta(t,y,y_d)$$

다음 LMI (4)를 만족시키는 해 (X,Y,K,W) 가 존재한다고 가정하자.

$$\begin{bmatrix} (\Phi X\Phi^T+C^TYC)A-KC+* & * & * \\ A_d^T(\Phi X\Phi^T+C^TYC) & -W & 0 \\ W & 0 & -W \end{bmatrix}<0, \tag{4}$$
$$\Phi X\Phi^T+C^TYC>0, X=X^T, Y=Y^T, W=W^T$$

여기에서 $\Phi\in R^{n\times(n-q)}$는 $\Phi^T D=0$, $\Phi^T\Phi=I$ 를 만족시키는 임의의 행렬이고 $*$는 대칭성에 의해 쉽게 유추할 수

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2007. 10. 15., 채택확정 : 2008. 1. 29.
최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

있는 행렬 블록을 의미한다. 이득행렬 F, L이 (5)와 같이 주어진다고 가정하자.

$$F = D^T C^T Y,\ L = (\Phi X \Phi^T + C^T Y C)^{-1} K \tag{5}$$

그러면 스위칭 평면 $\sigma = FCe = FC(\hat{x} - x) = 0$ 에 구속된 슬라이딩 모드 동역학은 안정하다. ▽▽▽

위의 정리에 주어진 LMI (4)에서 $A_d = 0$으로 놓으면 다음과 같은 형태의 LMI가 되며 이는 [4-5]의 존재 조건식과 동치가 됨에 유의하라.

$$\begin{aligned} &(\Phi X \Phi^T + C^T Y C)A - KC + * < 0, \\ &\Phi X \Phi^T + C^T Y C > 0, X = X^T, Y = Y^T \end{aligned} \tag{6}$$

III. 주요 결과

시스템 (1)을 고려하고 LMI (4)의 해가 존재한다고 하자. 그 해를 이용하여 $P = \Phi X \Phi^T + C^T Y C$ 로 하고 다음의 변환행렬과 벡터를 정의하자.

$$M = \begin{bmatrix} (\Theta^T P \Theta)^{-1} \Theta^T P \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ C \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} = Mx = \begin{bmatrix} \Gamma x \\ Cx \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기에서 $\Theta \in R^{n \times (n-p)}$ 는 $C\Theta = 0, \Theta^T \Theta = I$ 를 만족시키는 행렬이다. 이는 다음이 성립함을 의미한다.

$$\begin{aligned} &M^{-1} = [\Theta, P^{-1} C^T (C P^{-1} C^T)^{-1}] = [\Theta, \Lambda] \\ &x = \Theta w + \Lambda y \end{aligned} \tag{8}$$

이를 이용해 (1)을 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{w} &= A_{11} w + A_{12} y + A_{d11} w_d + A_{d12} y_d + B_1 u + B_{d1} u_d \\ \dot{y} &= A_{21} w + A_{22} y + A_{d21} w_d + A_{d22} y_d + B_2 u + B_{d2} u_d + CD\xi \end{aligned} \tag{9}$$

여기에서 $\Theta^T P D = \Theta^T (\Phi X \Phi^T + C^T Y C) D = 0$이 이용돼서 w의 동역학에 불확실성 ξ이 나타나지 않음에 유의해야 한다. $w_d = w(t-h) \in R^{(n-p)}$이며 행렬 $A_{ij}, A_{dij}, B_i, B_{di}$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} &A_{11} = \Gamma A \Theta,\ A_{12} = \Gamma A \Lambda,\ A_{21} = C A \Theta,\ A_{22} = C A \Lambda \\ &A_{d11} = \Gamma A_d \Theta,\ A_{d12} = \Gamma A_d \Lambda,\ A_{21} = C A_d \Theta,\ A_{22} = C A_d \Lambda \\ &B_1 = \Gamma B,\ B_2 = CB,\ B_{d1} = \Gamma B_d,\ B_{d2} = C B_{d2} \end{aligned} \tag{10}$$

(9)는 $y \in R^p$는 주어진 것이므로 $w \in R^{(n-p)}$를 적절한 수단을 동원해 예측하여 $\hat{w}$를 구하고 (8)을 이용하여 상태의 관측값 $\hat{x}$를 구할 수 있음을 의미한다. 다음과 같은 $(n-p)$차의 축소차수 관측기를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}} &= A_{11} \hat{w} + A_{12} y + A_{d11} \hat{w}_d + A_{d12} y_d + B_1 u + B_{d1} u_d \\ \hat{x} &= \Theta \hat{w} + \Lambda y \end{aligned} \tag{11}$$

여기에서 $\hat{w}_d = \hat{w}(t-h) \in R^{(n-p)}$이다. 그러면 오차벡터는 다음의 동역학처럼 주어진다.

$$\dot{\tilde{w}} = A_{11} \tilde{w} + A_{d11} \tilde{w}_d,\quad e = (\hat{x} - x) = \Gamma \tilde{w} \tag{12}$$

여기에서 $\tilde{w} = \hat{w} - w \in R^{(n-p)}$이다.

정리 1 : 시스템 (1)을 고려하자. 다음 LMI (13)를 만족시키는 해 (X, Y, W) 가 존재한다고 가정하자.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Theta^T \Phi X \Phi^T A \Theta + * & * & * \\ A_d^T \Phi X \Phi^T \Theta & -W & 0 \\ W\Theta & 0 & -W \end{bmatrix} < 0, \\ &\Phi X \Phi^T + C^T Y C > 0,\ X = X^T,\ Y = Y^T,\ W = W^T \end{aligned} \tag{13}$$

(11)의 이득행렬 $A_{11}, A_{12}, A_{d11}, A_{d12}, B_1, B_{d1}$ 이 LMI (13)의 해 X, Y를 (10)에 대입하여 주어지고 Λ가 (8)로 주어진다고 하자. 그러면 오차 동역학 (12)는 안정하다.

증명: (13)의 해가 존재하고 이득이 (10)라고 가정하자. 그러면 $P = \Phi X \Phi^T + C^T Y C > 0$ 이며 $D^T P \Theta = 0$가 성립한다. 또한 (13)은 [7]의 Schur complement 공식을 이용하여 (13)이 성립하면 다음이 항상 성립함을 보일 수 있다.

$$\Theta^T (PA + A^T P + P A_d W^{-1} A_d^T P + W) \Theta < 0 \tag{14}$$

한편 동역학 (12)는 다음의 리아푸노프 함수에 대하여

$$V_r = \tilde{w}^T P_0 \tilde{w} + \int_{t-h}^{t} \tilde{w}^T W_0 \tilde{w} d\tau$$

$\dot{V}_r \le -k_1 \tilde{w}^T \tilde{w}$을 만족하게 하는 $P_0 > 0, W_0 > 0, k_1 > 0$가 존재하면 안정하다. 만약 $W_0 = \Theta^T W \Theta,\ P_0 = \Theta^T P \Theta$라고 하면 $P_0 > 0, W_0 > 0$이다. (10)과 (12)를 사용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_r = 2\tilde{w}^T P_0 (A_{11} \tilde{w} + A_{d11} \tilde{w}_d) + \tilde{w}^T W_0 \tilde{w} - \tilde{w}_{d W_0 \tilde{w}_d}^T \tag{15}$$

부등식 $2x^T y \le x^T H x + y^T H^{-1} y$가 임의의 벡터 x, y와 행렬 $H > 0$에 대하여 성립한다는 사실을 이용하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$2\tilde{w}^T P_0 A_{d11} \tilde{w}_d \le \tilde{w}^T P_0 A_{d11} W_0^{-1} A_{d11}^T P_0 \tilde{w} + \tilde{w}_{d W_0 \tilde{w}_d}^T$$

한편 (13)이 $W > 0$임을 의미하므로 [7]에 주어진 Schur complement 공식을 이용하여 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & I \\ I & W \end{bmatrix} \ge 0$$

이는 다음을 의미하고

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Theta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & I \\ I & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{-1} & \Theta \\ \Theta^T & W_0 \end{bmatrix} \ge 0$$

Schur complement 공식을 이용하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$W^{-1} \ge \Theta W_0^{-1} \Theta^T$$

이는 다음을 의미한다.

$$P_0 A_{d11} W_0^{-1} A_{d11}^T P_0 \le \Theta^T P A_d W^{-1} A_d^T P \Theta$$

결국 (15)는 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_r &\leqq 2\widetilde{w}^T P_0 A_{11}\widetilde{w} + \widetilde{w}^T P_0 A_{d11} W_0^{-1} A_{d11}^T P_0 \widetilde{w} + \widetilde{w}^T W_0 \widetilde{w} \\ &\leqq -\widetilde{w}^T Q \widetilde{w}\end{aligned} \tag{16}$$

여기에서 $Q \in R^{(n-p)\times(n-p)}$는 다음처럼 정의된다.

$$\Theta^T(PA + A^T P + PA_d W^{-1} A_d^T P + W)\Theta = -Q \tag{17}$$

(14)는 $Q>0$임을 의미하고 도함수 $\dot{V}_r \leqq -k_1 \widetilde{w}^T \widetilde{w}$가 $k_1 = \lambda_{\min}(Q) > 0$에 대하여 성립함을 뜻한다. ▽▽▽

주 1: (4)의 첫번째 LMI에 다음의 행렬을 앞과 뒤에 곱함으로써 (13)이 (4)의 필요조건임을 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\Theta^T & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\Theta^T & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}^T$$

이는 (1)을 위한 전차수 관측기 (2)를 설계할 수 있으면 $(n-p)$차의 축소차수 관측기 (11)도 설계가 가능하여 전차수 관측기를 대체할 수 있음을 의미한다.

주 2: $A_d = 0$인 경우에 LMI (13)은 다음처럼 단순화될 수 있다.

$$\begin{aligned}&\Theta^T \Phi X \Phi^T A \Theta + * < 0,\\ &\Phi X \Phi + C^T Y C > 0,\ X = X^T,\ Y = Y^T\end{aligned} \tag{18}$$

[5,10]에 따르면 (18)의 해가 존재할 필요충분조건은 다음 조건을 만족시키는 해 (P, F)가 존재하는 것이다.

$$P > 0, \quad \Theta(PA + A^T P)\Theta^T < 0, \quad D^T P = FC \tag{19}$$

[5,10]에 따르면 (19)의 해가 존재할 필요충분조건은 $rank(CD) = rank(D)$와 $C(sI-A)^{-1}D$가 최소위상이어야 한다. 이는 $C(sI-A)^{-1}D$가 비최소위상이거나 $rank(CD) \neq rank(D)$이면 (1)을 위해 전차수 슬라이딩 모드 관측기 (2)를 공식 (5)을 사용해서 설계할 수 없고 $(n-p)$차의 축소차수 관측기 (11)도 역시 설계할 수 없음을 의미한다.

주 3: 위의 주 2는 [1]-[5]에서 아래 (20)과 같은 시스템을 위하여 제안되었던 (2)와 비슷한 형태의 전차수 슬라이딩 모드 관측기를 (21)과 같은 형태의 $(n-p)$차 축소차수 관측기로 대체할 수 있음을 의미한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t,x,u)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\dot{\hat{w}} = A_{11}\hat{w} + A_{12}y + B_1 u, \quad \hat{x} = \Theta\hat{w} + \Lambda y \tag{21}$$

여기에서 $A_{11}, A_{12}, B_1, \Lambda$는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned}&A_{11} = \Gamma A \Theta,\ A_{12} = \Gamma A \Lambda,\ B_1 = \Gamma B\\ &\Gamma = (\Theta^T P \Theta)^{-1}\Theta^T P,\ \Lambda = P^{-1}C^T(CP^{-1}C^T)^{-1}\end{aligned}$$

그리고 $P = \Phi X \Phi^T + C^T Y C$이고 (X, Y)는 LMI (18)을 만족시키는 해 행렬이다.

주 4: 본 논문의 결과는 다음과 같은 설계 알고리즘으로 요약될 수 있다.

i) $rank(CD) \neq rank(D)$이거나 $C(sI-A)^{-1}D$가 비최소위상인지 확인한다. 둘 중 하나라도 만족되면 설계가 불가능하므로 빠져나온다.
ii) (13)의 해를 LMI 최적화를 통해 구한다.
iii) (10)과 (11)을 이용해 축소차수 관측기를 구한다.

IV. 수치적 예

[6]에서는 다음 F4E 팬텀 전투기 모델을 고려하였다.

$$A = \begin{bmatrix}-0.9896 & 17.4100 & 96.15\\ 0.2648 & -0.8512 & -11.39\\ 0 & 0 & -30\end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix}-97.78\\ 0\\ 30\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered}A_d = 0.3A, \quad B_d = 0, \quad D = B,\\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 1,\\ x(t) = 0, \quad t \in [-h, 0), \quad h = 0.1,\\ \xi(t, x, x_d, u) = 0.1\sin 2\pi t, \quad u = [2.4595, 2.1662]y\end{gathered}$$

그리고 3차의 슬라이딩 모드 관측기를 구하였다. 본 논문에서 제안된 주4의 과정을 따르면 (13)의 해를 다음처럼 얻고 1차의 관측기를 구할 수 있다.

$$X = \begin{bmatrix}1.060 & *\\ 0.039 & 0.191\end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix}1.060 & *\\ -0.012 & 0.017\end{bmatrix}, \quad W = 0.807$$

$$\dot{\hat{w}} = -2.963\hat{w} + [0.663,\ 5.798]y - 0.889\hat{w}_d + [0.199, 1.740]y_d$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\hat{w} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -0.307 & -0.216\end{bmatrix}y$$

그림 1은 실제 상태값 x_3와 관측된 값 $\hat{x}_3$을 보여 준다 ($y_1 = x_1, y_2 = x_2$이므로 나타내지 않았다). [6]의 그림 1처럼 약 1초 후에 실제 상태값 x_3와 관측된 값 $\hat{x}_3$이 거의 완벽하게 일치함을 알 수 있다. 그리고 1차의 축소차수 관측기로도 충분히 상태를 관측할 수 있음을 알 수 있다.

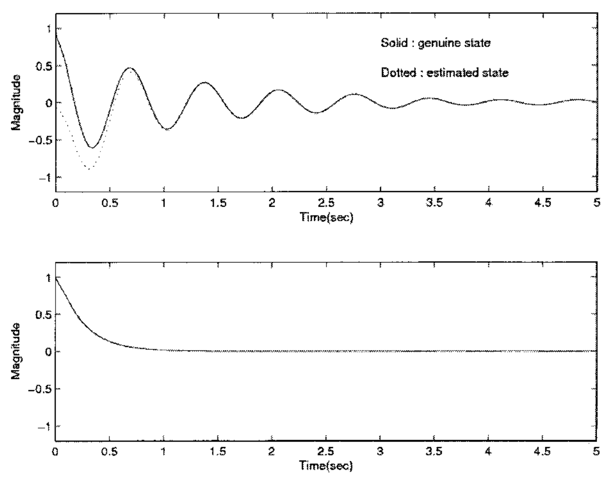

그림 1. 시뮬레이션 결과. (위) x_3. (아래) $e_3 = \hat{x}_3 - x_3$.

Fig. 1. Simulation results. (Top) x_3. (Bottom) $e_3 = \hat{x}_3 - x_3$.

V. 결론

불확실성을 갖는 다변수 시간 지연 시스템을 위한 관측기설계문제를 다루었다. 이전 결과 [1-6]에서 구해진 n차의 전차수 슬라이딩 모드 관측기의 LMI 존재조건이 만족되면 $(n-p)$차의 축소차수 관측기를 설계할 수 있음을 보이고 축소차수 관측기 이득 행렬의 공식과 LMI 기반 설계 알고리즘을 설계예와 함께 제시하였다.

참고문헌

[1] B. L. Walcott and S. H. Zak, "State observation of nonlinear uncertain dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, no. 2, pp. 166-170, 1987.

[2] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "On the development of discontinuous observers," *Int. J. Contr.*, vol. 59, pp. 1211-1229, 1994.

[3] C. Edwards and S. K. Spurgeon, Sliding Mode Control: Theory and Applications, Bristol, PA: Taylor & Francis Ltd, 1998.

[4] C. P. Tan and C. Edwards, "An LMI approach for designing sliding mode observers," *Int. J. Contr.* vol. 74, no. 16, pp. 1559-1568, 2001.

[5] 이재관, 최한호, "$C(sI-A)^{-1}B$가 최소위상이 될 LMI 조건을 이용한 해석과 설계," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제 11 권, 제 11 호, pp. 895-900, 2005.

[6] 최한호, "불확실한 시간 지연 시스템을 위한 LMI 기반 슬라이딩 모드 관측기 설계법," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, 제 12 권, 제 10 호, pp. 1018-1021, 2006.

[7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, Philadelphia, SIAM, 1994.

[8] S. H. Zak, and S. Hui, "On variable structure output feedback controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, pp. 1509-1512.

[9] H. H. Choi, "Variable structure output feedback control design for a class of uncertain dynamic systems," *Automatica*, vol. 38, pp. 335-341, 2002.

[10] H. H. Choi, "Frequency domain interpretations of the invariance condition of the sliding mode control theory," *IET Proc.-Control Theory and Appl.*, vol. 1, no. 4, pp. 869-874, 2007.

최 한 호

제어 로봇 시스템학회 논문지 2007년 제 13 권 제 9 호 참조.