

이산시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 수정부가변수법*

채경철**† · 이두호*** · 김남기****

On the Modified Supplementary Variable Technique for the Discrete-Time GI/G/1/K Queue*

Kyung-Chul Chae** · Doo-Ho Lee*** · Nam-Ki Kim****

■ Abstract ■

We consider the discrete-time GI/G/1/K queue under the early arrival system. Using a modified supplementary variable technique(SVT), we obtain the distribution of the steady-state queue length. Unlike the conventional SVT, the modified SVT yields transform-free results in such a form that a simple two-moment approximation scheme can be easily established.

Keyword : Queue Length, Finite Queue, Burke's Theorem

1. 서 론

연속시간 대기행렬을 분석하는 여러 가지 방법 중
에 수정부가변수법(modified supplementary varia-
ble technique)이 있다[3]. 그러나 이산시간 대기행

렬에 대해서 수정부가변수법이 사용된 사례는 (저
자가 아는 한) 아직 없었다. 본 논문에서는 수정부
가변수법을 사용하여 이산시간 GI/G/1/K 대기행
렬의 고객수분포를 구한다. 본 논문에서 구한 결과
는 (저자가 아는 한) 새로운 결과이다.

논문접수일 : 2007년 08월 13일 논문게재확정일 : 2008년 02월 18일

* 이 논문은 2006년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2006-312-C00470).

** 한국과학기술원 산업공학과

*** 한국과학기술원 산업공학과

**** 전남대학교 산업공학과

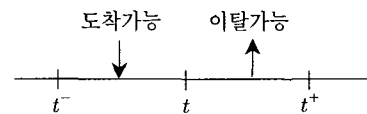
† 교신저자

연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에서 t 시점의 고객 수를 $N(t)$ 라 하고, t 시점의 잔여도착간격(remaining interarrival time)을 $A_R(t)$ 라 하자. 그리고 $N(t) \geq 1$ 인 경우에, t 시점에 진행 중인 서비스의 잔여시간(remaining service time)을 $S_R(t)$ 라 하자. 주 관심사는 $N(t)$ 또는 $N = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ 이다. 그런데 $\{N(t), t \geq 0\}$ 은 마코프과정(Markov process)이 아니므로 분석이 어렵다. 하지만 $A_R(t)$ 와 $S_R(t)$ 를 부가변수(supplementary variable)로 추가하면 $\{N(t), A_R(t), S_R(t); t \geq 0\}$ 은 마코프과정이 된다. 따라서 $(t+dt)$ 시점의 상태(state)에 대한 확률은 t 시점의 상태에 대한 확률만 가지고 표현할 수 있는데, 이를 시스템 방정식이라 부른다[1]. 부가변수법(supplementary variable technique)의 단점은 시스템 방정식을 푸는 계산과정이 길다는 점이다. 그럼에도 불구하고 최근에 부가변수법이 많이 사용되고 있는 이유는 계산과정이 비교적 단순하기 때문이다.

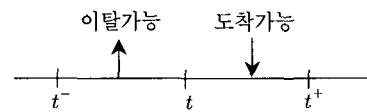
부가변수법과 수정부가변수법의 차이는 다음과 같다(상세한 내용은 제 2장 참조). 부가변수법에서는 시스템 방정식을 변환(transform) 형태로 표현한 다음 이를 풀어서 변환 형태의 해를 얻는다. 반면에, 수정부가변수법은 시스템 방정식을 직접 적분해서 해를 얻는 방법이다. 시스템 방정식을 직접 적분하여 얻는 결과는 변환 형태가 아닌데, 이것이 수정부가변수법의 장점이라 할 수 있다. 구체적으로, 부가변수법으로 얻는 결과는 N 의 분포가 아니라 N 의 확률생성함수(probability generating function)인데, 이 조차도 서비스시간의 라플라스 변환으로 표현된다. 반면에, 수정부가변수법으로 얻는 결과는 N 의 분포 그 자체인데, 이는 조건부 기대치들로 표현된다. 수정부가변수법은 국외에는 소개되었으나[3], 국내에는 아직 정식으로 소개되지 않았다.

최근 디지털 통신시스템으로의 다양한 응용가능성으로 인하여 이산시간 대기행렬에 대한 연구가 증대되고 있다. 이는 비트, 셀, 패킷 단위로 운용되는 디지털 시스템을 이산시간 대기행렬이 보다 잘

묘사할 수 있기 때문이다. 이산시간 대기행렬에서 시간축은 슬롯(slot)이라 불리는 기본단위의 등간격으로 나누어진다. 서비스시간은 이 기본 슬롯의 정수배이며 서비스의 시작과 종료는 슬롯의 경계와 동기화 된다. 고객의 도착 역시 슬롯의 경계에서 발생하는 것으로 가정한다. 이때 고객의 도착이 슬롯의 맨 끝부분(슬롯 경계 직전)에서 발생하는 것으로 가정하는 모형을 LAS(late arrival system)라 하고, 슬롯의 맨 앞부분(슬롯 경계 직후)에서 발생하는 것으로 가정하는 모형을 EAS(early arrival system)라 한다[12]. [그림 1]과 [그림 2]는 각각 LAS와 EAS 가정 하에서 고객의 도착과 이탈이 가능한 곳을 표시한 것이다. 관행대로 슬롯의 길이를 1로 잡는다. 그러면, $t=1, 2, \dots$ 에 대해서 고객의 도착이 가능한 곳은 LAS 하에서는 (t^-, t) 이고 EAS 하에서는 (t, t^+) 이다. 그리고, 고객의 이탈이 가능한 곳은 LAS 하에서는 (t, t^+) 이고 EAS 하에서는 (t^-, t) 이다.



[그림 1] LAS 가정



[그림 2] EAS 가정

본 논문에서는 EAS를 가정하는데 그 이유는 다음과 같다. 고객수가 K 일 때 어느 슬롯의 경계에서 서비스가 끝날 예정이라고 하자. 그리고 동일한 경계에서 새 고객이 도착할 예정이라고 하자. 그러면, EAS 하에서는 새 고객이 시스템에 들어올 수 있다. 반면에, LAS 하에서는 새 고객이 시스템에 들어오는 것을 차단(block)해야 되는지 아니면 허용해야 되는지 불분명하기 때문에 이에 대한 가정이 추가로 필요하다.

이산시간 대기행렬에 대해서 부가변수법이 사용된 사례는 다음과 같다. 처음에는 도착간격이 기하분포를 따르는 모형에 주로 사용되었는데, 이는 1993년 출판된 Takagi[12] 책에 잘 정리되어 있다. 최근에는 서비스시간이 기하분포를 따르는 모형에 주로 사용되고 있는데, 대상 모형의 순서는 GI/Geom/1/K[7], GI^x/Geom/1[4], GI^x/Geom/1/K[5], GI/Geom/c/K[6], GI^x/Geom/c/K[10]이다. 그리고 이산시간 GI/G/1 대기행렬에 부가변수법이 사용된 사례가 하나 있으나[13], 이는 부가변수 두 개를 사용하는 100% 부가변수법이 아니라 부가변수 하나를 사용하는 부분적인 부가변수법에 도착(또는 이탈)시점 내재과정(embedded process) 분석법을 병행한 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 수정부가변수법을 요약해서 소개한다. 제 3장은 본 논문의 본문으로서 이산시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 수정 부가변수법을 다룬다. 그리고 제 4장 결론에서는 본 논문의 결과와 방법에 대한 의의를 논한다.

2. 연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 수정부가변수법

수정부가변수법에 사용할 확률변수, 밀도함수, 안정상태(steady-state) 확률에 대한 정의는 다음과 같다.

A : 고객의 도착간격, $a(x)dx = \Pr\{x < A < x + dx\}$

S : 서비스시간, $s(y)dy = \Pr\{y < S < y + dy\}$

$N(t)$: t 시점에 시스템에 있는 고객수(서비스 중인 고객 포함)

$A_R(t)$: t 시점에 진행중인 도착간격의 잔여시간

$S_R(t)$: t 시점에 진행중인 서비스의 잔여시간(단,

$N(t) \geq 1$ 일 때)

$g_0(t, x)dx = \Pr\{N(t) = 0, x < A_R(t) < x + dx\}$

$g_n(t, x, y)dx dy = \Pr\{N(t) = n, x < A_R(t) < x + dx, y < S_R(t) < y + dy\}, \quad 1 \leq n \leq K$

$$f_0(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} g_0(t, x)$$

$$f_n(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} g_n(t, x, y), \quad 1 \leq n \leq K$$

$$P_0 = \int_0^\infty f_0(x) dx$$

$$P_n = \int_0^\infty \int_0^\infty f_n(x, y) dx dy, \quad 1 \leq n \leq K$$

연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 시스템 방정식은 다음과 같다.

$$g_0(t + dt, x - dt) dt = g_0(t, x) dt + g_1(t, x, 0) dt^2$$

$$g_1(t + dt, x - dt, y - dt) dt^2 = g_1(t, x, y) dt^2 + g_2(t, x, 0)$$

$$dt^2 s(y) dt + g_0(t, 0) dt a(x) dt s(y) dt$$

$$g_n(t + dt, x - dt, y - dt) dt^2 = g_n(t, x, y) dt^2$$

$$+ g_{n+1}(t, x, 0) dt^2 s(y) dt + g_{n-1}(t, 0, y) dt^2 a(x) dt,$$

$$2 \leq n \leq K-1$$

$$g_K(t + dt, x - dt, y - dt) dt^2 = g_K(t, x, y) dt^2$$

$$+ \{g_{K-1}(t, 0, y) dt^2 + g_K(t, 0, y) dt^2\} a(x) dt$$

안정상태 시스템 방정식을 $f_0(x)$ 와 $f_n(x, y)$ 로 표현한 다음, 이를 미분 방정식으로 고치면 다음과 같다.

$$-\frac{d}{dx} f_0(x) = f_1(x, 0) \tag{1a}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) f_1(x, y) = f_2(x, 0) s(y) + f_0(0) a(x) s(y) \tag{1b}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) f_n(x, y) = f_{n+1}(x, 0) s(y) + f_{n-1}(0, y) a(x), \quad 2 \leq n \leq K-1$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) f_K(x, y) = f_{K-1}(0, y) a(x) + f_K(0, y) a(x)$$

부가변수법에서는 식 (1)을 라플라스 변환으로 표현한다. 즉, 식 (1a)의 양변에는 $e^{-\theta x}$ 를 곱한 다음 x 에 대해서 (0에서 ∞ 까지) 적분하고, 식 (1b)의 양변에는 $e^{-\theta x - \theta y}$ 를 곱한 다음 x 와 y 에 대해서 (각각 0에서 ∞ 까지) 적분한다. 반면에, 수정부가변수법에서는 식 (1a)는 두 차례 적분하고, 식 (1b)는

세 차례 적분한다. 구체적으로, 식 (1a)에 대해서는 양변에 1을 곱한 후 x 에 대해 적분하고, 또한 양변에 x 를 곱한 후 x 에 대해 적분한다. 식 (1b)에 대해서는 양변에 1을 곱한 후 x, y 에 대해 적분하고, x 를 곱한 후 x, y 에 대해 적분하며, 또한 y 를 곱한 후 x, y 에 대해 적분한다.

식 (1)의 양변에 1을 곱한 다음 적분한 결과를 간단히 하면 다음과 같다.

$$f_0(0) = \int_0^{\infty} f_1(x, 0) dx \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} f_n(0, y) dy = \int_0^{\infty} f_{n+1}(x, 0) dx, \quad 1 \leq n \leq K-1$$

식 (1)의 양변에 x 를 곱한 다음 적분한 결과를 P_0 와 P_n 으로 표현하면 다음과 같다.

$$P_0 = \int_0^{\infty} x f_1(x, 0) dx \quad (3)$$

$$P_1 + \int_0^{\infty} x f_1(x, 0) dx = \int_0^{\infty} x f_2(x, 0) dx + f_0(0) E[A]$$

$$P_n + \int_0^{\infty} x f_n(x, 0) dx = \int_0^{\infty} x f_{n+1}(x, 0) dx + \int_0^{\infty} f_{n-1}(0, y) dy E[A], \quad 2 \leq n \leq K-1$$

$$P_K + \int_0^{\infty} x f_K(x, 0) dx = \int_0^{\infty} \{f_{K-1}(0, y) + f_K(0, y)\} dy E[A]$$

식 (1b)의 양변에 y 를 곱한 다음 적분한 결과는 다음과 같다.

$$P_1 + \int_0^{\infty} y f_1(0, y) dy = \int_0^{\infty} f_2(x, 0) dx E[S] + f_0(0) E[S] \quad (4)$$

$$P_n + \int_0^{\infty} y f_n(0, y) dy = \int_0^{\infty} f_{n+1}(x, 0) dx E[S] + \int_0^{\infty} y f_{n-1}(0, y) dy, \quad 2 \leq n \leq K-1$$

$$P_K = \int_0^{\infty} y f_{K-1}(0, y) dy$$

식 (3)을 모두 합치면

$$f_0(0) + \sum_{n=1}^K \int_0^{\infty} f_n(0, y) dy = \sum_{n=0}^K P_n / E[A] = \lambda \quad (5)$$

를 얻는데, 이 식의 의미는 다음과 같다. 우변의 λ 는 총도착률로서 단위시간당 도착하는 총고객수의 기대치이다. 좌변의 $f_0(0)$ 는 단위시간당 0명을 보면서 도착하는 고객수의 기대치이고, $\int_0^{\infty} f_n(0, y) dy$ 는 단위시간당 n 명을 보면서 도착하는 고객수의 기대치이다. 물론, $\int_0^{\infty} f_K(0, y) dy$ 는 단위시간당 차단되는 고객수의 기대치이기도 하다.

식 (2), 식 (3), 식 (4)를 의미 있게 표현하기 위해서 다음을 정의한다.

P_n^A : 도착하는 고객 중에서 도착 시에 n 명을 보는 고객의 비율, $0 \leq n \leq K$

P_n^D : 이탈하는 고객 중에서 이탈 시에 n 명을 남기는 고객의 비율, $0 \leq n \leq K$

α_n : $E[n$ 명을 남기고 이탈하는 시점의 잔여도착 간격], $0 \leq n \leq K-1$

σ_n : $E[n$ 명을 보고 도착하는 시점의 잔여서비스 시간], $1 \leq n \leq K-1$

식 (2)를 P_n^A 와 P_n^D 로 표현하면

$$\lambda P_n^A = \lambda P_n^D, \quad 0 \leq n \leq K-1 \quad (6)$$

인데, 이는 Burke의 정리라고 알려진 관계식이다 [1]. 도착 시에 K 명을 보는 고객은 도착 즉시 K 명을 남기고 이탈하므로 $P_K^A = P_K^D$ 이다. 따라서 식 (6)이 유효한 범위는 $0 \leq n \leq K$ 이다.

식 (3)과 식 (4)를 P_n^A , P_n^D , α_n , σ_n 으로 표현하면 다음과 같다.

$$P_0 = \lambda P_0^D \alpha_0 \quad (7)$$

$$P_n = \lambda P_n^D \alpha_n + \lambda P_{n-1}^A E[A] - \lambda P_{n-1}^D \alpha_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq K-1$$

$$P_K = \lambda (P_{K-1}^D + P_K^D) E[A] - \lambda P_{K-1}^D \alpha_{K-1}$$

$$P_1 = \lambda P_1^D E[S] + \lambda P_0^A E[S] - \lambda P_1^A \sigma_1$$

$$P_n = \lambda P_n^D E[S] + \lambda P_{n-1}^A \sigma_{n-1} - \lambda P_n^A \sigma_n, \quad 2 \leq n \leq K-1$$

$$P_K = \lambda P_{K-1}^A \sigma_{K-1}$$

식 (7)에 대한 휴리스틱 해석은 채경철 외 2인 [2]에 있다. 식 (6)과 식 (7)을 연립으로 풀면 P_n , P_n^A , P_n^D 모두 $E[A]$, $E[S]$, α_n , σ_n 만으로 표현할 수 있다. 하지만 일반적으로 α_n 과 σ_n 의 정확한 값을 구하기 어렵다. Kim and Chae[11]는 α_n 과 σ_n 의 근사치로

$$\alpha_n \approx E[A^2]/2E[A], \quad 0 \leq n \leq K-1 \quad (8)$$

$$\sigma_n \approx E[S^2]/2E[S], \quad 1 \leq n \leq K-1$$

를 사용하였다.

3. 이산시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 수정부가변수법

서론에서 언급했듯이 본 논문에서는 EAS를 가정한다. 그러면, 시간축 상에서 고객의 도착이 가능한 곳은 (t, t^+) 인데($t=0, 1, \dots$), 여기서 t^+ 는 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (t + |\Delta t|)$ 를 의미한다. 도착간격을 A 라 하고 질량함수를 $a_i = \Pr\{A=i\}$ 라 하자($i=1, 2, \dots$). (t, t^+) 에서 발생한 도착과 다음 도착 간의 간격이 i 이면 다음 도착은 $((t+i), (t+i)^+)$ 에서 발생한다. EAS 하에서 서비스의 시작이 가능한 시점은 t^+ 이고($t=0, 1, \dots$), 서비스의 종료 가능한 시점은 t^- 인데($t=1, 2, \dots$), 여기서 t^- 는 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (t - |\Delta t|)$ 를 의미한다. 서비스시간을 S 라 하고 질량함수를 $s_j = \Pr\{S=j\}$ 라 하자($j=1, 2, \dots$). t^+ 시점에서 시작된 서비스의 길이가 j 이면 이 서비스가 끝나는 시점은 $(t+j)^-$ 이다. 그리고 이때 서

비스를 받은 고객의 이탈은 $((t+j)^-, (t+j))$ 에서 발생한다. 따라서 서비스를 받은 고객의 이탈이 가능한 곳은 (t^-, t) 이다($t=1, 2, \dots$). 그러나 (t, t^+) 에서 도착한 고객이 차단되어 이탈하는 경우에는 (t^-, t) 에서 이탈하는 것이 아니라 도착 즉시 이탈한다고 가정한다.

본 논문에서는 t^- 시점을 기준으로($t=1, 2, \dots$) 시스템 방정식을 세운다. t^- 시점의 고객수를 $N(t^-)$ 라 하고, t^- 시점의 잔여도착간격을 $A_R(t^-)$ 라 하자. 그리고 $N(t^-) \geq 1$ 인 경우에, t^- 시점에 진행 중인 서비스의 잔여시간을 $S_R(t^-)$ 라 하자. 그러면, $\{N(t^-), A_R(t^-), S_R(t^-); t=1, 2, \dots\}$ 는 마코프연쇄(Markov chain)가 된다. 따라서 $(t+1)^-$ 시점의 상태에 대한 확률은 t^- 시점의 상태에 대한 확률만 가지고 표현할 수 있다.

안정상태 시스템 방정식을

$$P_0(i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{N(t^-) = 0, A_R(t^-) = i\}$$

$$P_n(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{N(t^-) = n, A_R(t^-) = i, S_R(t^-) = j\},$$

$$1 \leq n \leq K$$

로 표현하면 다음과 같다.

$$P_0(i) = P_0(i+1) + P_1(i+1, 0) \quad (9a)$$

$$P_1(i, j) = P_1(i+1, j+1) + P_2(i+1, 0) s_{j+1} + \{P_0(0) + P_1(0, 0)\} a_{i+1} s_{j+1}$$

$$P_n(i, j) = P_n(i+1, j+1) + P_{n+1}(i+1, 0) s_{j+1} + P_{n-1}(0, j+1) a_{i+1} + P_n(0, 0) a_{i+1} s_{j+1}, \quad 2 \leq n \leq K-1 \quad (9b)$$

$$P_K(i, j) = P_K(i+1, j+1) + \{P_{K-1}(0, j+1) + P_K(0, j+1)\} a_{i+1} + P_K(0, 0) a_{i+1} s_{j+1}$$

식 (9)의 좌변은 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $(t+1)^-$ 시점의 상태에 대한 확률이고 우변은 $t \rightarrow \infty$ 일 때 t^- 시점의 상태에 대한 확률이다. 식 (9)는 차등(difference) 방정식으로서 미분(differential) 방정식인 식 (1)에 대응되는 것이다. 식 (9)에서 유의할 점은 우변에

$P_n(0, 0)$ 가 등장한다는 점인데($1 \leq n \leq K$), 이에 대응되는 $f_n(0, 0)$ 는 식 (1)에 등장하지 않는다. $P_n(0, 0)$ 는 $t \rightarrow \infty$ 일 때 다음 세 가지 사건의 결합확률이다. 첫째, $N(t^-) = n$ 이다 ($n=1, 2, \dots, K$). 즉, t^- 시점의 고객수가 n 이다. 둘째, $S_R(t^-) = 0$ 이다. 즉, t^- 시점의 잔여서비스시간이 0이므로 서비스가 끝난 고객 한명의 이탈은 EAS 하에서 (t^-, t)에서 발생한다(비고: t 시점의 고객수는 $n-1$ 이다). 셋째, $A_R(t^-) = 0$ 이다. 즉, t^- 시점의 잔여도착간격이 0이므로 새 고객의 도착은 EAS 하에서 (t, t^+)에서 발생한다(비고: t^+ 시점의 고객수는 n 이다).

식 (9a)는 i 에 대해서 (0부터 ∞ 까지) 합치고, 식 (9b)는 i 와 j 에 대해서 (각각 0부터 ∞ 까지) 합친 결과를 간단히 하면

$$P_0(0) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(i, 0) \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_n(0, j) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{n+1}(i, 0), \quad 1 \leq n \leq K-1$$

를 얻는데, 이는 식 (2)에 대응되는 결과이다.

식 (9)의 양변에 ($i+1$)를 곱한 다음, 식 (9a)는 i 에 대해서 (0부터 ∞ 까지) 합치고 식 (9b)는 i 와 j 에 대해서 (각각 0부터 ∞ 까지) 합친 결과를

$$P_0 = \sum_{i=0}^{\infty} P_0(i)$$

$$P_n = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P_n(i, j), \quad 1 \leq n \leq K$$

로 표현하면 다음과 같이 식 (3)에 대응되는 결과를 얻는다.

$$P_0 = \sum_{i=1}^{\infty} iP_1(i, 0) \quad (11)$$

$$P_1 + \sum_{i=1}^{\infty} iP_1(i, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} iP_2(i, 0) + \{P_0(0) + P_1(0, 0)\}E[A]$$

$$P_n + \sum_{i=1}^{\infty} iP_n(i, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} iP_{n+1}(i, 0)$$

$$+ \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} P_{n-1}(0, j) + P_n(0, 0) \right\} E[A], \quad 2 \leq n \leq K-1$$

$$P_K + \sum_{i=1}^{\infty} iP_K(i, 0) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} P_{K-1}(0, j) + \sum_{j=0}^{\infty} P_K(0, j) \right\} E[A]$$

식 (9b)의 양변에 ($j+1$)를 곱한 다음, i 와 j 에 대해서 (각각 0부터 ∞ 까지) 합친 결과는

$$P_1 + \sum_{j=1}^{\infty} jP_1(0, j) = \sum_{j=0}^{\infty} P_1(0, j)E[S] + P_0(0)E[S] \quad (12)$$

$$P_n + \sum_{j=1}^{\infty} jP_n(0, j) = \sum_{j=0}^{\infty} P_n(0, j)E[S] + \sum_{j=1}^{\infty} jP_{n-1}(0, j), \quad 2 \leq n \leq K-1$$

$$P_K = P_K(0, 0)E[S] + \sum_{j=1}^{\infty} jP_{K-1}(0, j)$$

인데, 이는 식 (4)에 대응되는 결과이다.

식 (11)을 모두 합치면

$$P_0(0) + \sum_{n=1}^K \sum_{j=0}^{\infty} P_n(0, j) = \sum_{n=0}^K P_n/E[A] = \lambda \quad (13)$$

을 얻는데, 이는 식 (5)에 대응되는 결과이다. 식 (13)과 식 (5)간에는 공통점도 있지만 차이점도 있다. 공통점은 λ 가 총도착률로서 단위시간당 도착하는 총고객수의 기대치라는 점이다. 그런데 이산시간 GI/G/1/K 대기행렬에서는 단위시간당 (또는 슬롯당) 도착하는 고객수가 0 또는 1이므로, λ 는 임의 슬롯에 고객 한명이 도착할 확률과 같아진다. 식 (13)에서 유의할 점은 좌변에 대한 해석이 LAS와 EAS에 따라 달라진다는 점이다. 슬롯의 경계에서 도착과 이탈이 모두 발생하는 경우에, LAS 하에서는 도착이 이탈보다 먼저 발생하므로

$$P_0(0) = \lambda P_0^A$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_n(0, j) = \lambda P_n^A, \quad 1 \leq n \leq K$$

가 된다. 그러나 EAS 하에서는 이탈이 도착보다 먼저 발생하므로

$$P_1(0, 0) + P_0(0) = \lambda P_0^A \quad (14)$$

$$P_{n+1}(0, 0) + \sum_{j=1}^{\infty} P_n(0, j) = \lambda P_n^A, \quad 1 \leq n \leq K-1$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_K(0, j) = \lambda P_K^A$$

가 된다. 즉, $P_{n+1}(0, 0)$ 는 (단, $0 \leq n \leq K-1$) LAS 하에서는 $(n+1)$ 명을 보고 도착하는 경우에 포함되지만 EAS 하에서는 n 명을 보고 도착하는 경우에 포함되는 것이다.

반면에, EAS 하에서 P_n^D 의 표현은 P_n^A 의 표현보다 간단하다. 즉,

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_{n+1}(i, 0) = \lambda P_n^D, \quad 0 \leq n \leq K-1 \quad (15)$$

인데, 이는 식 (2)의 $\int_0^{\infty} f_{n+1}(x, 0)dx$ 에 대응되는 것이다. (비고: 이탈 직전에 $(n+1)$ 명 있으면 이탈 직후에는 n 명이 남음.) 따라서 식 (10) 양변에 $P_n(0, 0)$ 를 더하면

$$\lambda P_n^A = \lambda P_n^D, \quad 0 \leq n \leq K-1 \quad (16)$$

가 되는데, 이는 식 (6)과 형태가 같다.

EAS 하에서 P_n^D 의 표현이 P_n^A 의 표현보다 간단한 이유는 슬롯의 경계에서 도착과 이탈이 모두 발생하는 경우에 이탈이 도착보다 먼저 발생하기 때문이다. 이와 같은 이유로 EAS 하에서는 α_n 의 표현이 σ_n 의 표현보다 간단하다. 즉,

$$\sum_{i=0}^{\infty} iP_{n+1}(i, 0) = \lambda P_n^D \alpha_n, \quad 0 \leq n \leq K-1 \quad (17)$$

인데, 이는 연속시간 경우의 $\int_0^{\infty} xf_{n+1}(x, 0)dx = \lambda P_n^A \alpha_n$ 에 대응되는 것이다. 반면에, 연속시간 경우의 $\int_0^{\infty} yf_n(0, y)dy = \lambda P_n^A \sigma_n$ 에 대응되는 것은

$$\sum_{j=1}^{\infty} jP_n(0, j) + P_{n+1}(0, 0)E[S] = \lambda P_n^D \sigma_n, \quad (18)$$

$$1 \leq n \leq K-1$$

인데, 그 이유는 다음과 같다. $P_{n+1}(0, 0)E[S]$ 는 (단, $1 \leq n \leq K-1$) LAS 하에서는 $(n+1)$ 명을 보고 도착하는 경우에 포함되지만 EAS 하에서는 n 명을 보고 도착하는 경우에 포함되는데, 이때 다음 차례 고객의 서비스가 새로 시작되므로 도착시점 기준 잔여서비스시간의 기대치는 $E[S]$ 가 되는 것이다.

마지막으로, 식 (11), 식 (12)를 식 (14)~식 (18)로 정의된 P_n^A , P_n^D , α_n , σ_n 으로 표현하면 결과론적으로 식 (7)의 형태와 완전히 일치한다.

4. 결론 및 추후 연구과제

본 논문에서는 수정부가변수법을 사용하여 (EAS 가정 하에서) 이산시간 GI/G/1/K 대기행렬의 P_n , P_n^A , P_n^D 간에 성립하는 관계식을 얻었다. 본 논문의 부수적인 목적은 수정부가변수법을 정식으로 소개하는 것이다.

수정부가변수법이 잘 알려져 있지 않았던 이유는 다음과 같다. 연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대해서 본 논문에서 부가변수법을 사용하여 얻은 결과인 식 (7)은 이미 다른 방법으로 구해져 있었다[11]. 더욱 일반적인 연속시간 GI/G/c/K 대기행렬의 P_n , P_n^A , P_n^D 간에 성립하는 관계식도 수정부가변수법으로 얻을 수 있으나, 이 결과 역시 다른 방법으로 구해져 있었다[9]. 연속시간 대기행렬 중에서 알려져 있지 않았던 결과를 수정부가변수법으로 구한 사례는 유일하게 GI/G/1/K/Vm 대기행렬인데[3], 여기서 Vm은 복수휴가(multiple vacations)를 의미한다[1].

Kim and Chae[11]는 식 (8)을 사용하여 연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 근사해를 얻었고, Choi et al.[8]은 역시 식 (8)을 사용하여 연속시간 GI/G/c/K 대기행렬에 대한 근사해를 얻었다. 여기서 근사해란 일차적으로는 P_n 과 $P_n^A(=P_n^D)$ 에 대한 근사치를 의미하는데, 이는 식 (6)과 식 (7)을 연립으로 풀은 결과에 식 (8)을 대입하여 얻은 것이다. 이차적으로는 이들 근사치를 사용해서 얻을 수 있는

기타 성능척도의 근사치를 의미하는데, 예를 들어 도착하는 고객이 차단될 확률인 P_K^A 와 평균고객수인 $\sum_{n=1}^{\infty} nP_n$ 등을 꼽을 수 있다. 또한, P_K^A 를 주어진 기준치 이하가 되게 하는 K 값의 최소치에 대한 근사치도 얻을 수 있다[8]. 본 논문에서 이산시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대해서 얻은 결과는 연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 결과인 식 (6), 식 (7)과 형태가 일치한다. 따라서 이산시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 근사해의 형태 역시 연속시간 GI/G/1/K 대기행렬에 대한 근사해와 일치한다. 다만, 근사해에 포함된 P_n^A 와 P_n^D 가 식 (14)와 식 (15)로 정의된 것을 의미할 따름이다. 그리고 이산시간 대기행렬에서는 A 와 S 가 이산 확률변수이므로 EAS 하에서 식 (8)에 대응되는 결과인

$$\alpha_n \approx E[A(A-1)]/2E[A], \quad 0 \leq n \leq K-1 \quad (19)$$

$$\sigma_n \approx 1 + E[S(S-1)]/2E[S], \quad 1 \leq n \leq K-1$$

를 사용하면 된다. 식 (19)에서 유의할 점은 다음과 같다. α_n 에서 n 은 이탈 직후에 남은 고객수인데, $0 \leq n \leq K-1$ 이므로 이 이탈은 차단된 고객의 이탈이 아니라 서비스를 받은 고객의 이탈을 의미한다. 따라서 이 이탈 시점을 기준으로 (EAS 하에서) 잔여도착간격이 가질 수 있는 값은 0, 1, ... 이다. 즉, 이탈 시점의 잔여도착간격이 가질 수 있는 값에 0이 포함된다. 반면에, EAS 하에서 도착 시점의 잔여서비스시간이 가질 수 있는 값은 1, 2, ... 로서 0이 포함되지 않는다.

추후 연구과제는 식 (19)를 사용한 근사해가 어느 정도의 성능을 나타내는지를 다양한 수치적 예제와 시뮬레이션 결과와의 비교를 통해서 알아보는 것이다. 저자가 예견하기로는 연속시간 대기행렬에 대해서 식 (8)을 사용한 근사해의 성능[8, 11]과 대동소이할 것이다. 또한, 수정부가변수법으로 이산시간 GI/G/c/K, GI^x/G/1/K, GI^x/G/c/K 대기행렬들을 분석하고, 아울러 식 (19)를 사용한 근사해의 성능을 테스트하는 것도 추후 연구과제이다.

참고 문헌

- [1] 이호우, 「대기행렬 이론」, 3판, 시그마프레스, 2006.
- [2] 채경철, 김남기, 최대원, “GI/G/c/K 대기행렬의 고객수 분포 방정식에 대한 해석”, 「대한산업공학회지」, 제28권, 제4호(2002), pp.391-397.
- [3] Chae, K.C., N.K. Kim, and B.K. Yoon, “On the Queue Length Distribution for the GI/G/1/K/Vm Queue,” *Stochastic Analysis and Applications*, Vol.22, No.3(2004), pp.647-656.
- [4] Chaudhry, M.L. and U.C. Gupta, “Queue-Length and Waiting-Time Distribution of Discrete-Time GI^x/Geom/1 Queueing Systems with Early and Late Arrivals,” *Queueing Systems*, Vol.25(1997), pp.307-324.
- [5] Chaudhry, M.L. and U.C. Gupta, “Performance Analysis of Discrete-Time Finite-Buffer GI^x/Geom/1/N Queues,” *Discrete Event Dynamic Systems*, Vol.8(1998), pp.55-70.
- [6] Chaudhry, M.L., U.C. Gupta, and V. Goswami, “On Discrete-Time Multiserver Queues with Finite-Buffer : GI/Geom/m/N,” *Computers and Operations Research*, Vol.31(2004), pp.2137-2150.
- [7] Chaudhry, M.L., J.G.C. Templeton, and U. C. Gupta, “Analysis of the Discrete-Time GI/Geom(n)/1/N Queue,” *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.31, No.1 (1996), pp.59-68.
- [8] Choi, D.W., N.K. Kim, and K.C. Chae, “A Two-moment Approximation for the GI/G/c Queue with Finite Capacity,” *INFORMS J. on Computing*, Vol.17, No.1(2005), pp.75-81.
- [9] Franken, P., D. König, U. Arndt, and V. Schmidt, *Queues and Point Processes*, Wiley, New York, 1982.
- [10] Goswami, V. and S.K. Samanta, “Performance

- Analysis of a $GI^x/Geom/m/N$ Queue with Partial-and Total-Batch Rejection," *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.54 (2007), pp.203-219.
- [11] Kim, N.K. and K.C. Chae, "Transform-Free Analysis of the GI/G/1/K Queue Through the Decomposed Little's Formula," *Computers and Operations Research*, Vol.30, No.3(2003), pp.353-365.
- [12] Takagi, H., *Queueing Analysis : Discrete-Time Systems*, North-Holland, Amsterdam, Vol.3(1993).
- [13] Yang, T. and M.L. Chaudhry, "On Steady-State Queue Size Distribution of the Discrete-Time GI/G/1 Queue," *Advances in Applied Probability*, Vol.28(1996), pp.1117-1200.