

POGO 억제장치 모델링 및 주요 변수의 정량화

이한주*, 김지훈**, 오승협***

POGO Suppression Device Modeling and Main Parameter Analysis

Han-Ju Lee*, Ji-Hoon Kim**, Seung-Hyub Oh***

Abstract

In this article, a mathematical modeling which is composed of linearized transfer functions on POGO suppression device was executed. The main parameters of PSD model can not be easily determined from the analysis due to the nonlinearity of the parameters. This article deals a method to get the values of the main parameters from the experimental results.

초 록

본 연구에서는 액체 추진기관 시스템의 축방향불안정성을 억제하기 위한 장치인 POGO 억제장치 (PSD)에 대해 선형화된 전달함수 형태로 수학적 모델링을 수행하였다. 또한 각 변수에 대한 값을 결정하는 과정에서 비선형성 때문에 이론적으로 구하기 힘든 주요 변수를 파악하고 이를 실험 결과로부터 구하는 방법을 기술하였다.

키워드 : Longitudinal instability(축방향불안정성),
POGO Suppression Device(POGO 억제장치)

1. 서 론

액체 추진기관 시스템의 축방향불안정성 (POGO) 해석에 관한 연구는 크게 두 가지 방법으로 정리할 수 있는데, 하나는 각 추진기관 구성품들의 구성 방정식을 선형화된 전달함수의 형태로 추진기관 전체의 수학적 모델을 만들어 시스템의 안정성 판단 유무를 해석하는 방법이고, 또 하나는 시간에 따른 유동의 특성식 (characteristics formulation)을 사용하여 추진기

관의 수학적 모델을 만들어 해석하는 방법이다. 이러한 방법들은 모든 요소에 대한 방정식으로부터 시스템의 고유 모드 등을 얻어내는 방법으로 주로 시스템을 디자인하는 단계에서 주로 사용하는 방법들이다.

본 연구에서는 위의 두 방법 중 선형화된 전달함수를 만들어 전체 시스템에 대한 불안정성을 판단하는 방법에 대해, POGO 억제장치에 대한 수학적 모델을 만들고 각 변수에 대한 값을 결정하는 과정에서 이론적으로 구하기 힘든 변수를 파악하고, 이를 실험 결과로부터 구하는 방법을 소개하고자 한다.

접수일(2007년 12월 7일), 수정일(1차 : 2008년 6월 5일, 2차 : 2008년 6월 17일, 게재확정일 : 2008년 7월 1일)

* 추진기관체계팀/leehj@kari.re.kr

** 추진기관체계팀/jhk0622@kari.re.kr

*** 추진기관체계팀/shoh@kari.re.kr

2. POGO 억제장치 (PSD) 모델링

POGO 억제장치가 있는 경우에 단순화된 관 내 비정상 유동 방정식 (simplified unsteady flow equation of fluid transients in a pipeline) [1]을 이용하여 지배 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

모멘텀 방정식

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial t} + \frac{f \dot{Q}^n}{2gDA^n} = 0 \quad (1)$$

연속 방정식

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} + \frac{gA}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

여기서, H 는 수두 (Hydraulic head), $\dot{Q} = vA$ 는 체적유량, a 는 압력과 속도(speed of pressure pulse)를 의미한다.

위의 방정식에서, 유량과 압력에 대한 선형 섭동 방정식(linearized equations for oscillatory flow)을 구하기 위해 다음과 같이 정의한다.

$$H = \bar{H} + h \quad (3)$$

여기서, \bar{H} 와 h 는 각각 평균 압력수두 (average pressure head)와 섭동 압력수두 (oscillatory pressure head)를 의미한다.

$$\dot{Q} = \bar{Q} + \dot{q} \quad (4)$$

여기서, \bar{Q} 와 \dot{q} 는 각각 평균 체적유량 (average flow rate)과 섭동 체적유량 (oscillatory flow rate)을 의미한다.

식 (3) 및 (4)를 식 (1) 과 (2)에 대입하고 ρg 를 곱하면 다음과 같은 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} + I \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + R \dot{m} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x} + C \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

여기서, \dot{m} 은 질량유량 (mass flow rate, kg/s)을 $I = \frac{1}{A}$ 는 이너턴스 (inertance)를, 그리고

$C = \frac{A}{a^2}$ 는 컴플라이언스 (compliance)를 의미한다.

또한 저항 (resistance)은 아래와 같이 정의된다.

$$R = \frac{32\nu}{AD^2} \text{ (층류)}, R = \frac{nf \overline{Q}^{n-1}}{2A^n D} \text{ (난류)}$$

식 (5)에 대해 일정한 단면적의 배관에 대해 다음과 같은 단위 길이당의 방정식을 유도할 수 있다.

$$\Delta p = I \ddot{m} + R \dot{m} \quad (7)$$

위의 식 (6) 및 (7)을 바탕으로 하여, 그림 1과 같은 형태의 POGO 억제장치에 대한 지배 방정식을 유도해 보기로 한다.

식 (7)을 이용하면, POGO 억제장치의 입구를 노드 i 라고 하고, 가스액체가 접하는 표면의 중심 부분을 노드 j 라고 하고 두 노드 사이의 운동 방정식을 유도하면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다. (하첨자 p 는 PSD 시스템을 의미)

$$p_i - p_j = I_p \ddot{m}_i + R_p \dot{m}_i \quad (8)$$

이 때, 노드 j 에 대해 식 (6)을 적용하면,

$$p_j = \frac{1}{C_p} \dot{m}_i \Delta t = K_p \dot{m}_i \quad (9)$$

다시 말해서 기체의 체적 변화에 영향을 주는 압력 p_j 는 POGO 억제장치로 들어가는 유체 중량(weight of fluid, 이때는 기체의 늘어나는 혹은 줄어드는 체적만큼의 액체의 중량)으로 표시할 수 있다.

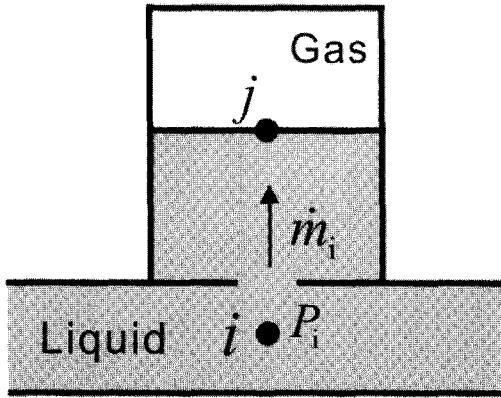


그림 1. Schematic of PSD

따라서 식 (8)과 식 (9)로부터 다음과 같은 POGO 억제장치에 대한 방정식을 유도할 수 있다.

$$I_p \ddot{m}_i + R_p \dot{m}_i + K_p m_i = p_i \quad (10)$$

위의 각 계수를 결정하면 POGO 억제장치의 특성을 알 수 있게 되고, 각 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(1) I_p = \frac{1}{A} \quad (11)$$

(2) R_p (linearized resistance)

저항체(배관)에 대한 총 압력 강하를 다음과 같이 가정한다.

$$\Delta P = R_o \dot{M}^2 \quad (12)$$

이 때, $\dot{M} = \overline{\dot{M}} + \dot{m}$, $\Delta P = \overline{\Delta P} + \Delta p$ 라고 하면, 식 (12)는 아래와 같이 된다.

$$\Delta P = R_o (\overline{\dot{M}} + \dot{m})^2 \cong R_o (\overline{\dot{M}}^2 + 2\overline{\dot{M}}\dot{m}) \quad (13)$$

이 때 섭동이 있는 유동(oscillatory flow)에 대한 섭동압력강하(oscillatory pressure drop)를 식 (14)와 같이 표현한다.

$$\Delta p = R \dot{m}, \quad R = \frac{\Delta p}{\dot{m}} \quad (14)$$

이때의 R 을 선형화된 저항(linearized dynamic resistance)이라 하면, 식 (13), (14)로부터 아래와 같이 저항치(resistance)를 구할 수 있다.

$$\Delta p = R \dot{m} = (2R_o \overline{\dot{M}}) \dot{m}, \quad R = 2R_o \overline{\dot{M}} \quad (15)$$

\dot{m} 가 $\overline{\dot{M}}$ 에 비해 충분히 작다고 하면, $R_o \cong R_s$ (정상 상태에서의 resistance)가 된다. [2] 따라서 Baffle이 있는 POGO 억제장치의 경우는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R_p = 2R_s \overline{\dot{M}} = \frac{2\Delta P}{\overline{\dot{M}}} = \frac{\overline{\dot{Q}}^2 / (\rho C_d^2 A_{baffle}^2) \cdot [1 - (A_{baffle}/A_{PSD})^2]}{\overline{\dot{M}}} \quad (16)$$

여기서,

$$\overline{\dot{Q}} = C_d A_{baffle} \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho [1 - (A_{baffle}/A_{PSD})^2]}}$$

$$\Delta P = \frac{\overline{\dot{Q}}^2 / (2 C_d^2 A_{baffle}^2) \cdot \rho [1 - (A_{baffle}/A_{PSD})^2]}{\overline{\dot{M}}}$$

R 이 유량의 함수 ($R = f(\dot{m})$)로 비선형 거동을 하게 되며 (이는 C_d 의 경우도 마찬가지이다), 위의 식으로부터 바로 구할 수 없다. 따라서 실험으로 위의 값을 구하는 것이 바람직하다.

(3) K_p (compliance C , $K = \frac{1}{C}$)

컴플라이언스관 유동이 있는 배관에서 검사 체적 내의 압력의 증가에 대한 유체중량(weight

of fluid)의 증가를 나타내는 값으로, 강성계수의 역수에 해당한다. 유체의 압축성 계수, 가스의 유무, 배관의 탄성 계수 등이 이 값에 영향을 미친다. 특히 PSD의 경우, 충전된 가스가 압력에 따라 부피를 변화해 가며 강성을 가진 스프링과 같이 작동을 하게 되므로 다음과 같이 섭동이 있는 유동(oscillatory flow)에 대한 K (강성, stiffness)를 정의할 수 있다.

$$p_s = -Kv \quad (17)$$

여기서, p_s 는 섭동기체압력 (oscillatory pressure surrounding the gas volume), v 는 섭동기체체적(oscillatory gas volume)을 의미한다.

가스의 경우, 폴리트로픽 과정이라 가정하면, $PV^\gamma = \text{일정}$ 이므로, $V = \bar{V} + v$, $P = \bar{P} + p$ 로 두고, 식 (17)에 대입하면 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$K \cong \frac{\gamma \bar{P}}{\bar{V}} \quad (18)$$

$Kv = K_p m = K_p \rho v$ 이고, 이를 바탕으로 식 (10)의 K_p 를 구하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$K_p \cong \frac{\gamma \bar{P}}{\rho \bar{V}} \quad (19)$$

위의 지배 방정식(식 (10))을 기반으로 하여, 고유 진동수 및 감쇠비를 유도할 수 있다. 즉, 식 (10)을 Laplace 변환을 하면 아래와 같이 된다.

$$I_p \dot{M} \cdot s + R_p \dot{M} + K_p \dot{M}/s = P_{main} \quad (20)$$

위의 지배 방정식에 대해, 주관의 압력 변화에 대한 PSD 내 유량 변화로서 PSD의 특징을 살펴볼 수 있다.

또한 참고문헌 [2]로부터 유동 어드미턴스

(flow admittance, Y)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\dot{M}}{P_{main}} = \frac{\dot{M}}{I_p \dot{M} \cdot s + R_p \dot{M} + K_p \dot{M}/s} \\ &= \frac{s}{I_p s^2 + R_p s + K_p} = \frac{s}{I_p} [s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2]^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 \dot{M} 은 POGO 억제장치에 유입 또는 유출되는 질량유량을, P_{main} 은 POGO 억제장치 입구의 압력 즉, 주관의 압력을 의미한다.

위의 식 (21)에 대해, $s = i\omega$ 를 대입하여, 복소 주파수 응답을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{s}{I_p} [s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2]^{-1} &= \\ \frac{i\omega}{I_p} [(i\omega)^2 + 2\zeta_p \omega_p (i\omega) + \omega_p^2]^{-1} &= \end{aligned} \quad (22)$$

위의 식의 절대값을 구해 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{M}}{P_{main}}(i\omega) \right| &= \frac{1}{\sqrt{(I_p \omega - K_p/\omega)^2 + R_p^2}} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{K_p/I_p})^2 K_p^2 + R_p^2 \omega^2}} \\ &= \frac{r_p}{\sqrt{(1 - r_p^2)^2 + (2\zeta_p r_p)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{I_p K_p}} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, 고유진동수, 진동수비, 그리고 감쇠비는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{I_p \cdot C_p}} = \sqrt{\frac{K_p}{I_p}} \quad (24)$$

$$r_p = \frac{\omega}{\omega_p} \quad (25)$$

$$\zeta_p = \frac{R_p}{2\omega_p I_p} = \frac{R_p \times \sqrt{K_p/I_p}}{2\sqrt{K_p/I_p} I_p \times \sqrt{K_p/I_p}} = \frac{R_p \omega_p}{2K_p} \quad (26)$$

위의 내용으로부터 POGO 억제장치의 특성을 이론적으로 접근할 수 있다. 또한 POGO와 관련된 각 변수들의 영향을 대략적으로 살펴볼 수도 있다. 즉, Baffle이 없는 경우, 고유 진동수는 POGO 억제장치 내의 가스 부피에 의해서만 결정이 됨을 알 수 있고, 배플이 존재하는 경우, 그것에 의해서도 진동수가 변함을 알 수 있다. 그러나 실제의 경우, 압력이나 유량의 진폭이 크고, 에너지 손실 및 배플이 있을 경우의 저항 계수의 비선형성이 크기 때문에, 위의 식을 바탕으로 실험을 통해 POGO 억제장치와 관련된 변수 (I_p , R_p , K_p)를 밝혀야 한다. 그러나 위의 지배 방정식은 POGO 억제장치 내에서 주관으로 향하는 또는 그 반대의 유량과 주관 압력에 대한 관계를 나타내는 것이다. 따라서 실험을 통해서 그것을 측정하고 위의 값을 제시할 수 있으면, POGO 억제장치의 변수를 정의하는 기본값들을 정리할 수 있다.

위의 이론식(식 (10))으로부터, POGO 억제장치와 관련된 지배 방정식이 질량-스프링-감쇠의 1 자유도계 시스템과 유사함을 알 수 있다. 따라서 실험을 통한 주파수 응답 자료로부터, I_p , R_p , K_p 를 얻거나 실제 스펙트럼으로부터 가장 근접한 I_p , R_p , K_p 의 값을 찾을 수 있다.

3. 주요 변수의 정량화

실험 결과 [3]에 대해 I_p , R_p , K_p 의 값을 구하는 과정을 예와 함께 다음과 같이 나타내었다.

- 1) 주관에서의 압력과 PSD 내의 압력을 실험을 통하여 측정한다.
- 2) 측정된 결과를 바탕으로 PSD에 유입 또는

유출되는 액체의 양을 주관에서의 압력과 PSD 내의 압력차를 이용하여 구한 후 주관 내 압력에 대한 유입(유출) 액체의 양의 비(유동 어드미턴스)를 주파수에 대해 나타낸다. (그림 2)

- 3) 식 (11)을 이용하여 I_p 의 값을 구한다.
- 4) 유동 어드미턴스의 값이 가장 클 때의 주파수를 실험 결과로부터 찾고 식 (24)로부터 K_p 를 구할 수 있다.

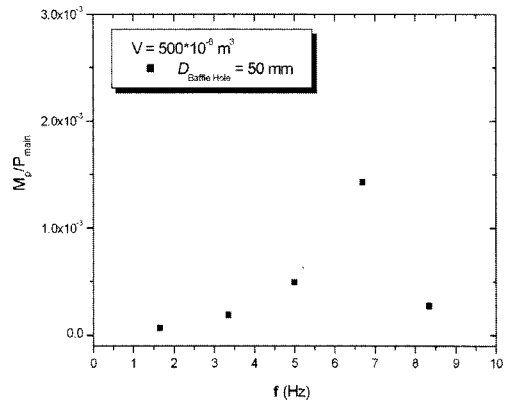


그림 2. Flow admittance with different frequencies.

- 5) 식 (23) 및 (26)을 이용하여, 실험 결과와 비교하여 결과를 가장 잘 나타내는 R_p 의 값을 찾아낸다. (그림 3)

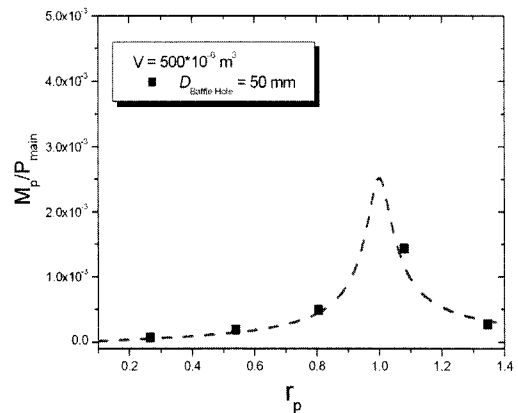


그림 3. Comparison between experiments and theoretical results.

4. 결 론

본 연구에서는 액체 추진기관시스템의 축방향불안 정성을 억제하기 위한 장치인 PSD에 대해 선형화된 전달함수 형태로 수학적 모델링을 수행하였다. 또한 각 변수에 대한 값을 결정하는 과정에서 이론적으로 구하기 힘든 주요 변수를 파악하고 이를 실험 결과로부터 구하는 방법을 기술하였다.

참 고 문 헌

1. E. Benjamin Wylie, Victor L. Streeter and Lisheng Suo, "Fluid Transients in System," Prentice-Hall, 1993.
2. S. Rubin, "Instability Model of Missile Longitudinal Oscillation due to Propulsion Feedback", NASA, 68N86933, 1964.
3. 이한주, 김지훈, 정동호, 오승협, "포고억제장치 설치에 따른 배관계 동특성 변화, 항공우주기술, 제5권 제1호, 2006, pp. 159-165.