Journal of the Korean Association for Spatial Structures
Vol. 8, No. 1 (통권 29호), pp. 41~48, February, 2008

호장법을 이용한 평면 트러스 구조의 비탄성 비선형 해석

Inelastic Nonlinear Analysis of Plane Truss Structures Using Arc-Length Method

김 광 중* 백 기 열** 이 재 홍***
Kim, Kwang-Joong Baek, Ki-Youl Lee, Jae-Hong

요 약

대공간 구조물은 3차원적인 힘의 흐름과 면내력에 의해 외부하중에 대한 저항 능력을 극대화 시킨 형태 저항 구조로서, 일반적인 골조와는 달리 부재에 대한 유한 변형을 동반 하므로 정적, 동적 해석에 관계없이 비선형 해석이 요구 된다. 대공간 구조물의 정확한 구조 해석을 수행하기 위해서는 기하학적 비선형 및 재료적 비선형 뿐 아니라 두 효과를 함께 고려한 비선형 해석이 필요하다. 기하학적 비선형 문제가 구조재료의 특성 및 위치에 따른 비선형을 고려하지 못하고, 구조재료의 비선형 문제가 기하학적 형상에 따른 비선형을 고려하지 못한다는 상호간의 단점을 해결하기 위하여, 본 논문에서는 유한요소법으로 기하학적 비선형을 고려한 비선형 평형방정식을 적용하고, 부재의 응력-변형률 관계를 이용하여 재료적 비선형성도 함께 고려하였다. 사용된 수치해석 기법은 불안정 경로의 해를 찾아갈 수 있는 호장법을 적용하여 하중 -변위 곡선을 추적하였다. 본 연구의 수치 해석결과 제시한 평면 트러스의 비탄성 비선형 거동을 정확하고 효율적으로 예측 가능한 것으로 나타났다.

Abstract

Spatial structure is an appropriate shape that resists external force only with in-plane force by reducing the influence of bending moment, and it maximizes the effectiveness of structure system. the spatial structure should be analyzed by nonlinear analysis regardless static and dynamic analysis because it accompanys large deflection for member. To analyze the spatial structure geometrical and material nonlinearity should be considered in the analysis. In this paper, a geometrically nonlinear finite element model for plane truss structures is developed, and material nonlinearity is also included in the analysis. Arc-length method is used to solve the nonlinear finite element model. It is found that the present analysis predicts accurate nonlinear behavior of plane truss.

키워드 : 기하학적 비선형성, 재료적 비선형성, 평면 트러스, 호장법
Keywords : Geometric nonlinearity, Material nonlinearity, Plane Truss, Arc-length method

1. 서 론

대공간 구조는 넓은 공간을 덮을 수 있는 구조 시스템으로 좌굴 하중 및 좌굴 형상에 대한 검토가 필요하고, 일반적인 건축물과 달리 구조물의 내부에 기둥이 없는 공간을 내포하여 축력 및 면내력에 의해 저항 되는 경우가 대부분이다. 이러한 특성상 대공간 구조에는 일반적으로 장스팬이 사용되는 경우가 많으며, 그 결과 일반적인 골조와는 달리 부재에 발생하는 변형도가 작은 경우에도 큰 변형이 발생하는, 즉 대변형 혹은 유한 변형을 동반하므로 정적, 동적 해석에 관계없이 비선형 해석이 요구 된다.

대공간 구조를 형성하기 위한 효율적인 구조시스템인 트러스 구조는 부재의 주된 응력이 축방향력이므로 보와 같은 휨 부재에 비해서 단면의 효율이 높고, 단순하면서도 합리적인 형태로 사용될 수 있어 입체적인 대공간 구조를 형성하는 장점이 있다. 그러나 이러한 트러스 구조는 세장하게 설계 되는 것과 국부좌굴의 영향만을 고려하여 구조물의 안정성을 감소시키는 요인이 된다.

* 세종대학교 건축공학과 석사과정
** 세종대학교 건축공학과 BK21 박사후과정 연구원, 공학박사
*** 교신저자, 정회원 · 세종대학교 건축공학과 교수, 공학박사
Tel : 02-3408-3287 Fax : 02-3408-3671
E-mail : jhlee@sejong.ac.kr

트러스 구조물의 비선형 거동 해석은 과거의 트러스 구조물의 붕괴로 관심이 대두되어졌으며, 트러스 구조 해석시에 구조물의 안정성에 미치는 요인들을 신중히 고려할 것을 요구하고 있다.

트러스 구조물의 붕괴는 취성적인 거동을 나타내고 있어서 선형 탄성 해석은 트러스 구조물의 거동을 예측하는데 부적절하다.

1966년과 1975년 Surrey 대학에서 개최된 국제 심포지엄에서 트러스 구조물의 구조해석과 실험결과의 세부사항을 발표하였고, Makowski[11]는 이중격자형 트러스에 관한 논문에서 트러스 구조물의 실험과 분석예측 사이에는 상당한 편차가 있음을 제시하였다. 여기서 나타나는 주요 편차는 지금까지의 트러스 해석 방법이 안정성 해석에서 고려되어져야 할 주요 원인을 빠뜨린 결과라고 지적하였다. 이러한 주요 원인들은 Davis와 Neal[2]에 의하여 연구되어진 스냅현상(Snap-through)과 부재의 변위가 바뀌는 현상 등을 들 수 있는데, 이러한 원인들은 트러스 구조물의 취성거동을 일으키는 주된 원인이라고 지적하였다.

과거에 있어 트러스의 좌굴해석은 여러 방법으로 다루어졌다. 부재의 기하학적 비선형성과 탄성을 조합한 좌굴 해석이 Berke와 Mallet[5], Mallet과 Schmidt[3]에 의하여 다루어졌으며, 기하학적 비선형성과 재료적 비선형성을 고려한 좌굴 해석 방법은 Wolf[9]와 Schmidt에 의해 연구되었다.

1970년 말부터 트러스 구조의 안정성에 미치는 요인과 스냅현상에 의한 동적 특성에 관한 연구가 본격화 되었다. 기하학적 비선형성과 재료적 비선형성을 고려하여 분기점과 극한점을 해석하는 수치해석 방법이 Cichon과 Corradi[8]에 의하여 고려되어졌다. 극한점을 지나기 위한 수치해석 방법으로 스냅현상과 같은 동적 특성에 근거를 둔 동적이완법이 Papadrakakis[6]에 의하여 적용되었다.

따라서 트러스 구조물의 정확한 구조해석을 수행하기 위해서는 기하학적 비선형성(Geometric nonlinearity)과 재료적 비선형성(Material nonlinearity)을 함께 고려해야 정확한 해를 얻을 수 있다. 본 논문에서는 기하학적 비선형에 대한 수치해석법으로써 호장법(Arc-length method)중 크리스필드법(Crisfield method)를 대상으로 하였으며, 부재의 응력-변형률 관계를 이용한 재료비선형성을 고려하였다. 또한 간단한 트러스 구조물(Toggle truss)에 대한 해석을 통해서 구조물의 형상 및 탄소성해석에 따른 트러스 구조의 비선형적 거동에 관해 고찰하도록 한다.

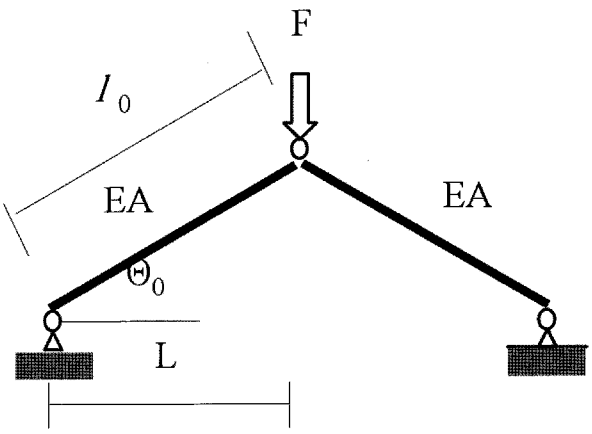
2. 기하학적 비선형성의 수치해석

2.1 증분이론을 사용한 기초식 유도

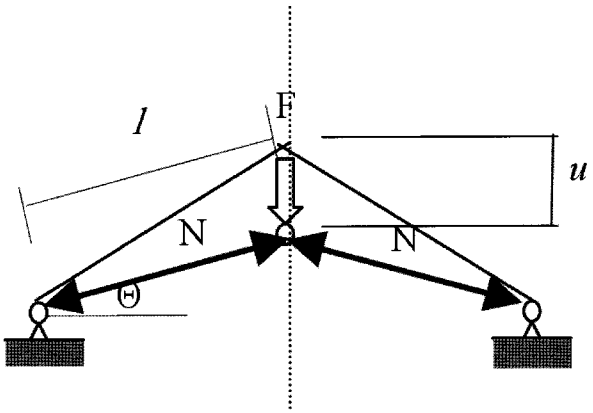
간단한 트러스 구조인 3힌지 모델을 대상으로 기하학적 비선형성에 대해 알아보도록 한다.

먼저 하중점 에서의 연직변위 u를 구하도록 한다. 여기서 트러스 부재의 축강성은 EA 이며, 축력 N 및 트러스 부재의 신축량 Δl 의 관계는 $N = EA/l_0 \cdot \Delta l$ 로서 선형관계인 것으로 한다.

평형 방정식



〈그림 1〉 변형 전



〈그림 2〉 변형 후

$$G=2N\sin\theta-F=0 \tag{1}$$

연직변위 u와 신축량 Δl의 관계

$$u=L(\tan\theta-\tan\theta_0) \tag{2}$$

$$\Delta l=l-l_0=L(1/\cos\theta-1/\cos\theta_0)$$

축력 F와 연직변위 u의 관계

$$F=\frac{2EAL}{l_0}\left\{\frac{u}{L}+\frac{\sin\theta_0-\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{L}+\tan\theta_0\right)\right)}{\cos\theta_0}\right\} \tag{3}$$

여기서, 부재의 축력과 신축량의 관계가 선형관계임에도 불구하고 구조물의 하중-변위 관계는 선형적이지 않음을 알 수 있으며, 이것은 구조체에 하중이 작용해 변형이 일어나면서, 구조물의 강성이 변화하기 때문이며, 이와 같이 변형 후에 있어서 형태변화를 고려한 해석을 기하학적 비선형 해석이라 한다. 쉘 구조와 같이 면내력으로서 외력에 저항하는 구조형식에서는 특히 형태변화의 영향이 크기 때문에 수치해석에 있어 기하학적 비선형성은 반드시 고려해야할 부분이다.

식(1)의 평형방정식의 일반화된 표현은 다음과 같다.

$$G(u,F)=R(u)-F=0 \tag{4}$$

위 식에서 R은 내부응력으로부터 구해지는 절점력 이며, 내력벡타라고 한다. 위의 식을 다자유도표현으로 나타내면,

$$G(u,F)=R(u)-F=0 \tag{5}$$

F, R, u는 하중벡터, 내력벡터 및 변위벡터이다. 또한 하중분포를 의미하는 하중모드벡터 P와 하중의 크기를 나타내는 파라메타 λ을 사용해, $F=\lambda P$로 표기 한다면 식(5)은 다음과 같다.

$$G(u,\lambda)=R(u)-\lambda P=0 \tag{6}$$

선형해석에서는 무변형(초기) 상태를 기본상태로 정해 식(6)을 맥크로린 전개, 그 중 최고차항을 무시함으로서 변위벡터와 하중벡터의 선형적인 관계를 구했다. 이것에 반해, 비선형 해석에서는 증분이론을 적용해, 어느 변위까지 변형이 진행한 단계를 기준 상태(n_step)로 하며, 변형이 더욱 진행한 상태(n+1_step)에서의 제량을 구하는 수법이 많이 채용되고 있다.

기준이 되는 n스텝에서의 평형상태는 이미 충분한 정확성을 가진 값이라고 가정하며, n+1 스텝으로 이행하는 평형방정식을 다음과 같이 선형화 된다. 먼저, 식(6)을 n스텝상태에 대해서 테일러 전개를 하도록 한다.

$$R|_{u={}^{n}u}+\left.\frac{\partial R}{\partial u}\right|_{u={}^{n}u}\Delta u+\cdots-({}^{n}\lambda+\Delta\lambda)P=0 \tag{7}$$

여기서, ${}^{n}(\ )$은 n스텝에서의 제량을 $\Delta(\ )$은 $n\sim n+1$스텝 사이의 증분량을 의미한다. 위 식은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\left.\frac{\partial R}{\partial u}\right|_{u={}^{n}u}\Delta u+\cdots=({}^{n}\lambda+\Delta\lambda)P-R|_{u={}^{n}u} \tag{8}$$

여기서, n 스텝 상태에서는 내력벡터와 하중벡터와의 관계는 평형상태이므로 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$${}^{n}\lambda-R_{u={}^{n}u}=0 \tag{9}$$

위 식을 고려해, 변위증분벡터에 대한 고차항을 무시한다면, 다음과 같은 변위량에 관한 선형 방정식이 얻어진다.

$$K_T\Delta u=\Delta\lambda P,\quad K_T=\left.\frac{\partial R}{\partial u}\right|_{u={}^{n}u} \tag{10}$$

여기서, K_T는 접선강성메트릭스이다. 3힌지 모델의 축력-변위 관계 및 회전-변위 관계는 다음과 같다.

축력-변위관계

$$N=\frac{EA}{l_0}(l-l_0)=\frac{EA}{l_0}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta_0}\right)*L \tag{11}$$

회전-변위관계

$$\Theta = \arctan\left(\frac{u}{L} + \tan\Theta\right) \tag{12}$$

따라서, 접선강성 K_T는,

$$\frac{\partial N}{\partial N} = \frac{\partial N}{\partial \Theta}\frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{EAL}{l_0}\left(\frac{\sin\Theta}{\cos^2\Theta}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial u} \tag{13.1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{1}{L}\frac{1}{(1+(\frac{u}{L}+\tan\theta_0)^2)} \tag{13.2}$$

$$= \frac{1}{L}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)}$$

$$= \frac{1}{L}\frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{L}$$

$$\frac{\partial R}{\partial u} = K_T = \frac{\partial}{\partial u}(2N\sin\theta) \tag{13.3}$$

$$= 2\frac{\partial N}{\partial u}\sin\theta + 2N\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial u}$$

$$= \frac{2EA}{l_0}\sin^2\theta + \frac{2N}{L}\cos^3\theta$$

위 식과 선형강성매트릭스인,

$$K_L = \left.\frac{\partial R}{\partial u}\right|_{u=0} = \left(\frac{2EA}{l_0}\right)\sin^2\Theta \tag{14}$$

식 (14)을 비교하면, $(2N/L)\cos^2\theta$ 의 항이 첨가되어 있는 것을 알 수 있다. 이것은 응력의 변화에 따른 강성의 변화를 의미하며, 기하 강성이라 칭한다.

식 (13.3)은 n스텝에서 n+1스텝상태의 증분간에 있어 제일 근사 값에 대한 평형방정식이다, 비선형이 약한 경우 및 비교적 증분구간이 작은 경우에는,

$$^{n+1}u = {}^{n}u + \Delta u \tag{15}$$

$$^{n+1}\lambda = {}^{n}\lambda + \Delta\lambda$$

$$^{n+1}G = R(^{n+1}u) - \lambda P \cong 0$$

식 (15)의 관계가 성립 하지만, 대부분의 비선형 문제에 있어서는 식 (15)에 대한 반복계산을 행함으로서 정확한 해에 가까운 값을 구하는 경우가 대부분이다.

2.2 호 장 법(Arc-length Method)

호장법은 기하학적 비선형을 표현하기 위한 수치해석법으로서 그림 3에 나타낸 바와 같이 n스텝에서부터 n+1스텝으로 이동할 때 변위벡터의 길이 Δl을 증분 파라메터로 사용하는 것이다. 증분 파라메터는 변위벡터 및 하중 파라메터로 구해진다.

$$\Delta u^t \Delta u + \Delta\lambda^2 = \Delta l^2 \tag{16}$$

위 식을 미소증분 형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$(\Delta u_{(i)} + \delta\Delta u)^T(\Delta u_{(i)} + \delta\Delta u) \tag{17}$$

$$+(\Delta\lambda_{(i)} + \delta\Delta\lambda)^2 = \Delta l^2$$

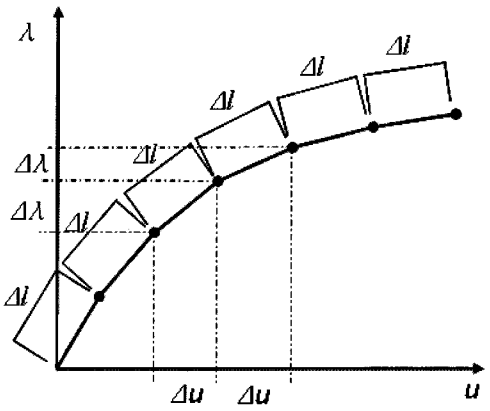
식 (17)을 선형화 하면,

$$2\Delta u_{(i)}^T\delta\Delta u + 2\Delta\lambda_{(i)}\delta\Delta\lambda \tag{18}$$

$$= \Delta l^2 - (\Delta u_{(i)}^T\Delta u_{(i)} + \Delta\lambda_{(i)}^2)$$

다음으로 식 (10)를 미소증분 형식으로 나타낸 평형방정식에 식 (18)를 대입한다.

$$K_{T(i)}\delta\Delta u = \delta\Delta\lambda P - G_{(i)} \tag{19}$$



〈그림 3〉 호장법

$$\begin{bmatrix} K_{T(i)} & -P \\ 2\Delta u_{(i)}^T & 2\Delta\lambda_{(i)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta\Delta u \\ \delta\Delta\lambda \end{Bmatrix} \tag{20}$$

$$= \begin{Bmatrix} G_{(i)} \\ \Delta l^2 - (\Delta u_{(i)}^T \Delta u_{(i)} + \Delta\lambda_{(i)}^2) \end{Bmatrix}$$

식 (20)이 호장법의 기본식이며, 반복계산 과정에 있어서의 식 (19)을 대신해 식 (20)을 사용함으로서 일정의 증분 길이로서 평형경로를 추적하는 것이

가능해 진다.

그러나 이 해법의 문제점은 식 (20)의 좌변의 계수 메트릭스가 대칭 메트릭스가 되지 않는 것이다. 이 문제는 다음과 같이 해결할 수 있다.

$$K_{T(i)}\delta\Delta u=\delta\Delta\lambda P+G_{(i)} \tag{21.1}$$

$$\Delta u^{T}\Delta u+\Delta\lambda^{2}=\Delta l^{2} \tag{21.2}$$

식 (21.1)을 다음과 같이 분할한다.

$$K_{T(i)}\delta\Delta u_1=P\ ,\quad K_{T(i)}\delta\Delta u_2=G_{(i)} \tag{22}$$

여기서, $\delta\Delta u=\delta\Delta\lambda\delta\Delta u_1+\delta\Delta u_2$이며, 식 (21.2)에 변위벡터 및 증분 파라메터는 다음과 같이 증분형태로 나타낸다.

$$\Delta u_{(i+1)}=\Delta u_{(i)}+\delta\Delta u \tag{23.1}$$

$$=\Delta u_{(i)}+\delta\Delta\lambda\delta\Delta u_1+\delta\Delta u_2$$

$$\Delta\lambda_{(i+1)}=\Delta\lambda_{(i)}+\delta\Delta\lambda \tag{23.2}$$

식 (23.1)과 식 (23.2)를 식 (21.2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 $\delta\Delta\lambda$에 대한 2차 방정식이 된다.

$$a\delta\Delta\lambda^{2}+2b\delta\Delta\lambda+c=0 \tag{24.1}$$

$$a=(\delta\Delta u_1^{T}\delta\Delta u_1+1) \tag{24.2}$$

$$b=(\delta\Delta u_1^{T}(\Delta u_{(i)}+\delta\Delta u_2)+\Delta\lambda_{(i)})$$

$$c=(\Delta u_{(i)}+\delta\Delta u_2)^{T}(\Delta u_{(i)}+\delta\Delta u_2)$$

$$+\Delta\lambda_{(i)}^{2}-\Delta l^{2}$$

식 (24) 스칼라 방정식을 풀음으로서 $\delta\Delta\lambda$가 구해진다.

$$\delta\Delta\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-ac}}{a} \tag{25}$$

식 (25)에서 (+), (-) 부호의 결정은 식 (23)에 대입하여 제 $(i+1)$ 근사변위 증분벡터를 결정하고, 이 변위 증분 벡터와 i 번째 근사변위 증분 벡터가 이루는 각θ 를 구한다.

$$\Delta u_{(i+1)}^{(\pm)}=\Delta u_{(i)}+\delta\Delta\lambda^{(\pm)}\delta\Delta u_1+\delta\Delta u_2 \tag{26.1}$$

$$\Theta^{(+)}=\arccos\left(\frac{\Delta u_{(i)}^{T}\Delta u_{(i+1)}^{(+)}}{|\Delta u_{(i)}||\Delta u_{(i+1)}^{(+)}|}\right) \tag{26.2}$$

$$\Theta^{(-)}=\arccos\left(\frac{\Delta u_{(i)}^{T}\Delta u_{(i+1)}^{(-)}}{|\Delta u_{(i)}||\Delta u_{(i+1)}^{(-)}|}\right)$$

이 각도가 작은 쪽의 부호를 채택한다.

3. 재료비선형 모델

구조물의 부재에 좌굴이나 항복이 발생할 수 있는 트러스 구조물을 해석하기 위하여 본 논문에서는 그림 1에 나타낸 것과 같이 탄성모델(Ⅰ), 비탄성모델(Ⅱ) 및 잔류 변형을 고려한 이력모델(Ⅲ) 등 3가지 형태의 응력-변형률 관계를 이용하도록 한다.

전 변형률 ϵ는 탄성변형률 ϵ_e 및 소성변형률 ϵ_p로 분리 가능한 것으로 하며, 이에 따른 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

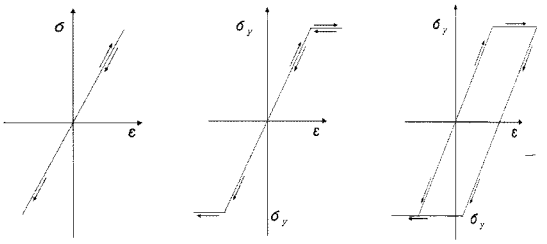
$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_p \tag{27.1}$$

$$\sigma=E\varepsilon_e \tag{27.2}$$

$$f=\sigma-\sigma_y\le 0 \tag{27.3}$$

$$\varepsilon_P=\frac{\partial f}{\partial\sigma}\Delta\lambda \tag{27.4}$$

위 식에서 σ는 부재의 응력, E 는 탄성계수, σ_y는 항복응력, $\Delta\lambda$는 소성파라메타를 의미한다. 식 (24.2)는 탄성구성식, 식 (24.3)은 항복조건식, 식 (24.4)는 관련소성흐름법칙을 의미한다. 본 연구에서 항복응력 σ_y의 값은 임계좌굴 응력 σ_{cr}의 값을 채택하여 해석에 적용하는 것으로 한다.



(a)탄성모델(Ⅰ) (b)비탄성모델(Ⅱ) (c)이력모델(Ⅲ)

〈그림 4〉 응력-변형률 관계

4. 기하학적 비선형 변형률

트러스 요소의 변형률을 고려하기 위한 변형 전 부재의 길이를 ds, 변형 후의 부재 길이를 ds'로 가정하면 ds와 ds'의 관계는 아래의 식으로 쓸 수 있다.

$$(ds')^2 - ds^2 = dx'_i dx'_i - dx_i dx_i \tag{28}$$

여기서 ds'_i는 변형 후의 부재의 길이 이므로 변위 u_i, 변형후의 부재좌표 x'_i와 dx'의 관계식은 식 (29) 과 식 (30)으로 표현 할 수 있다.

$$x'_i = u_i + x_i \tag{29}$$

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij}\right) dx_j \tag{30}$$

식 (30)에서 δ_{ij}는 $(i=j)$일 때 1이고, $(i \neq j)$일 때 0인 크로넥커 델타를 나타낸다. 식 (29), 식 (30)을 식(28)에 대입하면 증분변위는 식 (31)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}(ds')^2 - ds^2 &= (u_{i,k} + \delta_{ij})(u_{j,k} + \delta_{ik}) dx_j dx_k - dx_i dx_i \\ &= (u_{i,k} u_{i,j} + u_{j,k} + u_{k,j}) dx_j dx_k\end{aligned} \tag{31}$$

식 (31)에서 $(u_{i,k}u_{i,j} + u_{j,k} + u_{k,j})$를 $2\epsilon_{jk}$로 가정할 때 변형률은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{i,k}u_{i,j} + u_{j,k} + u_{k,j}) \tag{32}$$

여기서 ϵ_{jk}는 그린 변형률(Green strain)을 나타내며, 트러스 요소의 축방향의 변형률은 다음과 같은 그린 변형률로 유도 된다.

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= u_{x,x} + \frac{1}{2}(u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{33}$$

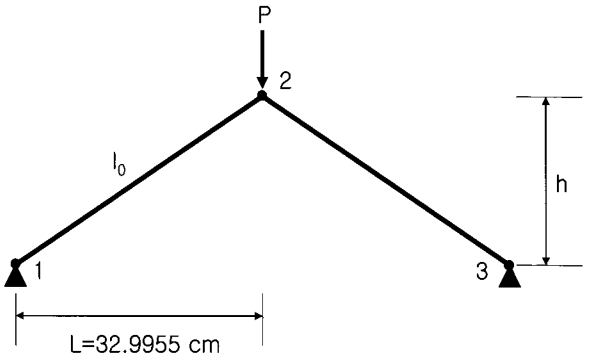
위의 식에서 축방향의 2차항$(\frac{\partial u}{\partial x})^2$을 고려하지 않게 되면 일반적인 공학 변형률(Engineering strain)이 된다. 본 연구에서는 대변형을 대상으로 하므로 축방향의 2차항$(\frac{\partial u}{\partial x})^2$을 고려한 그린 변형률(Green strain)을 해석에 적용하도록 한다. 또한 변형률의 축방향의 2차항$(\frac{\partial u}{\partial x})^2$이 해석 결과에 미치는 영향을 파악하기 위해 수치해석 예제에서 두 변형률을 사용에 따른 구조물의 하중-변위 관계를 비교하도록 한다.

5. 수치해석 및 결과

5.1 해석 모델

트러스 구조의 정확한 구조해석을 하기 위해서는 기하학적 비선형성 및 재료적 비선형성을 함께 고려해야 한다. 해석 모델은 그림 5에 나타내고 있는 기하학적 형상 모델의 절점 2에 수직 하중 P가 작용할 때 <그림 4>의 3가지 형태의 응력-변형률 관계를 이용하여 해석을 수행하였다.

본 논문의 해석 모델인 트러스 구조는 비선형 거동을 파악하는데 있어 많은 연구자들이[1,3,4] 사용하였던 구조물이다.



〈그림 5〉 트러스 해석 모델

비선형 거동을 비교하기 위해 여기서는 깊은 트러스와 얕은 트러스 두 가지를 해석 모델로 사용하였다. 기하학적 형상 및 해석 조건은 <그림 3>과 같다. 트러스 해석 모델의 탄성계수 $E = 68.9\ GPa$ 이다. 깊은 트러스(Deep truss)일 때 $L/h = 1.732$이며,

얕은 트러스(Shallow truss)의 경우 $L/h=3.464$이다. 깊은 트러스의 경우 항복응력 σ_y 값은 $3920MPa$이며, 얕은 트러스의 경우 σ_y 값은 $600MPa$ 로 정하였다.

5.2 해석 및 고찰

간단한 트러스 구조의 비선형적 해석을 통해 다음과 같은 결과를 얻었다.

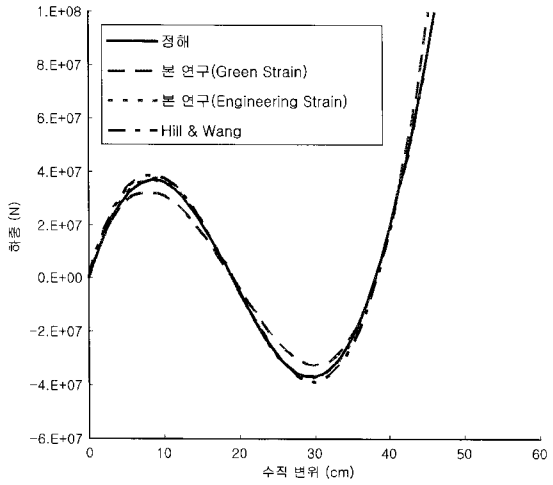
<그림 6>과 <그림 7>은 깊은 트러스(Deep truss)를 해석한 결과 이며, <그림 8>은 얕은 트러스(Shallow truss)를 해석한 결과이며, <그림 6>은 탄성모델에 따른 하중-변위 관계의 해석 결과를 비교 하였다.

<그림 6>은 깊은 트러스에 대해 정해와 Hill[7]의 해석 결과를 본 연구의 탄성재료 모델의 결과와 비교한 것이다. 본 연구의 공학변형률을 이용한 결과는 정해와 Hill[7]의 결과와 매우 잘 일치하고 있는 반면(3.67×10^4KN) 그린 변형률을 이용한 결과는 좌굴하중을 다소 낮게 예측하고 있는데 (3.25×10^4KN) 그 주된 원인으로는 정해와 Hill[7]의 결과에서는 공학변형률을 이용하였는데 그린 변형률은 고차항을 모두 포함함으로써 결과적으로 좌굴하중이 낮아진 것으로 판단된다. 따라서 보다 정확한 해석을 위해서는 그린 변형률을 이용한 해석이 필요하다.

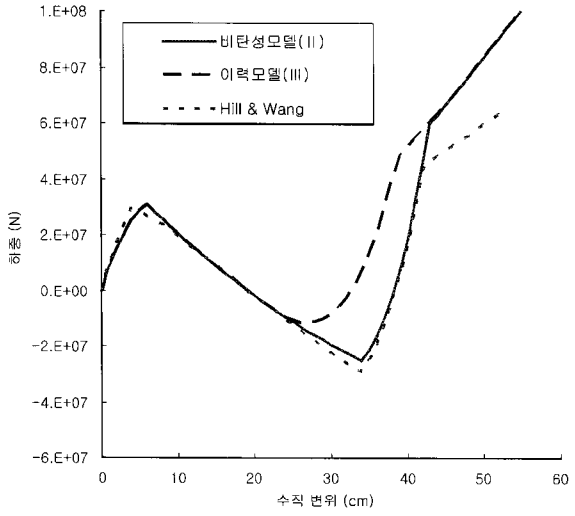
<그림 7>에서는 두 가지 다른 재료비선형모델을 적용하여 해석한 결과가 Hill[7]의 결과와 비교되어있다. 전반적으로 비탄성모델을 사용하면 탄성모델 해석결과 보다는 약 20% 정도의 좌굴하중 감소를 나타내었다. 또한 본 연구의 비탄성모델의 해석 결과는 기존 결과와 전반적으로 매우 잘 일치하였으며 이력모델을 사용하여도 초기 좌굴하중 값은 비탄성모델과 큰 차이가 없으나 후속 좌굴 거동은 소성 변형률로 인해 큰 차이를 나타내었다.

<그림 8>은 얕은 트러스의 해석결과를 보여주고 있다. 깊은 트러스의 경우와 비슷한 비선형 거동을 나타내고 있다. 이때 탄성모델(Ⅰ)을 적용한 경우 부재의 좌굴하중은 5.6×10^3KN이다. 비탄성모델(Ⅱ)과 이력모델(Ⅲ)을 적용한 경우, 부재의 좌굴하중 값은 4.5×10^3KN로 나타났다.

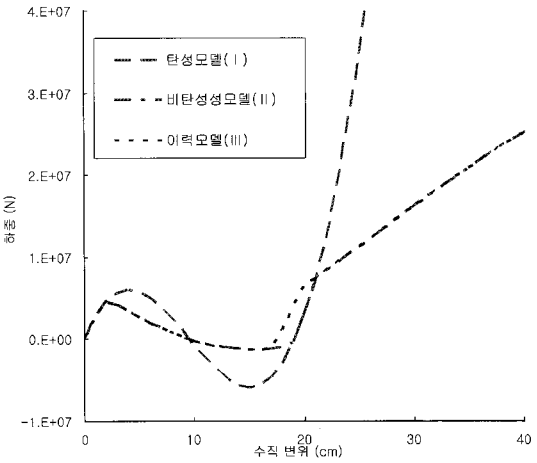
위의 결과로부터 재료비선형성을 고려하는 경우, 탄성모델(Ⅰ) 해석 결과의 좌굴하중에 도달하기 이전에 좌굴이 발생함을 알 수 있다.



〈그림 6〉 깊은 트러스 탄성모델 비교



〈그림 7〉 깊은 트러스 비탄성모델 비교



〈그림 8〉 얕은 트러스 탄소성 해석

6. 결 론

본 논문에서는 기하학적 비선형에 대한 수치해석법으로서 호장법 중 크리스필드법을 대상으로 하였으며, 부재의 응력-변형률 관계를 이용한 재료비선형성을 고려하였다. 간단한 트러스 구조물에 대한 해석을 통해서 구조물의 형상 및 탄소성해석에 따른 트러스 구조의 비선형적 거동에 관해 다음과 같은 결론을 내렸다.

(1) 호장법은 안정경로 뿐 아니라 불안정 경로까지 구조물의 기하 비선형성을 잘 추적할 수 있다는 것을 알 수 있다.
(2) 재료적 비선형성을 고려한 결과 좌굴하중이 감소함을 알 수 있다.
(3) 위의 수치 해석 결과로부터 알 수 있듯이 기하학적 비선형성과 재료적 비선형성을 함께 고려 할 때 극한하중 및 임계좌굴하중, 구조물의 거동을 정확히 파악할 수 있을 것이라 사료된다.
(4) 또한, 구조물의 전체 좌굴 이후의 경로는 재료적 비선형 모델의 응력-변형률 관계에 따라 매우 민감한 거동을 보여주고 있다. 따라서 트러스의 정확한 안정해석을 위하여 부재의 실제 거동과 가깝게 모델링 되어야 한다고 사료된다.

본 논문은 간단한 트러스 구조물을 대상으로 기하학적 비선형성과 재료적 비선형성에 의한 해석에 국한 되었으나, 실제 다절점 구조물을 대상으로 탄소성 후좌굴 거동 및 동적 거동의 연구에 대해서도 추가적으로 발표할 예정이다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 첨단도시개발사업의 연구비 지원(과제번호#'06 R&D B03)에 의해 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

1. M. A. Crisfield, Non-linear element analysis of solids and structure, Vol.1, Jhon Wiley & Sons, 1991
2. G. Davis and B. G. Neal, "The Dynamical Behavior of a Struct in a Truss Frame Work", Proceedings of the Royal Society, A253, 1959, pp. 542-562
3. R. H. Mallet and L. A. Schmit, "Nonlinear Structural Analysis by Energy Sense", J. Struct. Division, ASCE, Vol. 93, No. ST6, June, 1967, pp. 221-234
4. L. C. Schmit and B. M. Gergg, "A Method for Space Truss Analysis in the Post-buckling Range", J. Struct. Division, ASCE, Vol. 102, No. ST7, June, 1976, pp. 237-247
5. L. Berke and R. H. Mallet, "Automated Large Deflection and Stability Analysis of Three-Dimensional Structures", Structures Technology for Large radio and Radar Telescope System, I. Mar and H. Leibowitz. eds., MIT Press, Huntisville, Ala., 1969, pp343-381
6. M. Papadrakakis, "Inelastic Post-Buckling Analysis of Trusses", J. Struct. Division, ASCE, Vol. 109, No. 9, Sept. 1983, pp 2129-2147
7. Hill, C.D., Blandford G.E., Wang S.T., "Poat-buckling Analysis of steel Space Trusses",J. Struct. ASCE, Vol. 115, No. 4, Sept. 1983, pp 2129-2147
8. C. Cichon and L. Corradi, "Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Trusses with Unstable Bars", Engrg. Struct., Vol. 3, oct., 1981, pp 210-218
9. J. P. Wolf, "Post-buckled Strength of Large Space Trusses", J. Struct. Division, ASCE, Vol. 99, 1973, pp. 1708-1721
10. Guideline for Numerical Analysis of Spatial Structures, 日本建築學會, 2001
11. Z. S. Makowski, Analysis Design and Construction of Double Layer Grids, Halsted Press, Jhon Wiley and Sons, N. Y. 1981