

다자유도 곡선맞춤법을 이용한 감쇠보 모델의 실험 진동해석

민천홍* · 박한일** · 배수룡***

*한국해양대학교 대학원

**한국해양대학교 해양개발공학부

***국방과학연구소

Experimental Vibration Analysis of Damped Beam Model Using Multi-degree Curve Fitting Method

CHEON-HONG MIN*, HAN-IL PARK** AND SOO-RYONG BAE***

*Graduate School of Korea Maritime University, Busan, Korea

**Division of Ocean Development Engineering, Korea Maritime University, Busan, Korea

***Agency for Defence Development, Korea

KEY WORDS: Curve fitting method 곡선맞춤법, Experimental modal analysis 실험모드해석, Damped beam model 감쇠 보 모델, Modal parameter 모드변수, Modal identification 모드추출

ABSTRACT: It is important to reduce the vibration and noise of submarines and ships. For the purpose of noise reduction, various researches are actively being conducted on the employment of complex structures. However, in the case of numerical analysis for complex structures with damping materials, substantial errors can be generated by the absence of an exact damping model. Thus experimental model analysis is necessary for the verification of a numerical analysis for complex structures. In this research, vibration experiments are conducted in order to ascertain the vibration properties of cantilever beam attached damping materials. First, an initial value is obtained by using a direct linear method. Next, based on this initial value, the exact modal parameters of the cantilever beam are obtained by using the Newton-Raphson method.

1. 서 론

현재 잠수함이나 유람선 등을 설계하고 제작할 때 기계에 의한 진동이나 소음을 줄여주기 위해 많은 연구가 수행되고 있다. 그 중 감쇠재를 구조물의 겉 표면에 부착하는 방법이 널리 사용되고 있다. 감쇠재를 부착한 복합 구조물의 구조해석 시 상용 유한요소 프로그램의 감쇠모델링 미비로 인해 오차가 크게 발생할 수 있다. 그러므로 실험모드해석을 이용한 구조해석을 병행하여 검토하는 것이 필요하다(박한일 등, 2007).

실험모드해석(Experiment modal analysis)은 전달함수나 응답의 측정 데이터에 포함된 오차를 제거하여 대상물의 모드 특성치를 결정하기 위한 방법이다(민천홍 등, 2007). 주파수 전달함수는 고유진동수와 모드감쇠비의 비선형항과 등가강성 등의 선형항의 조합으로 표현되어진다. 비선형 문제를 풀기 위해서는 보다 좋은 초기치로부터 출발해야 빠른 시간에 정확도가 높은 해를 구할 수 있다.

감쇠재가 부착된 모델의 감쇠항은 일반적으로 비례점성으로 가정할 수 없다. 그러므로 일반점성 감쇠모델로 정의하여야

한다.

일반점성 감쇠모델의 곡선맞춤법으로 제시된 사례는 다음과 같다. Van Loon의 방법은 실험데이터를 전달함수로 표현하는데 필요한 미지수를 통합하여 초기치로 표현하고 초기치로 테일러 전개하여 반복 계산하는 방법이다(Van Loon, 1974). 이 방법은 주파수영역 다자유도법 중에서는 가장 자주 사용된다. 그러나 이 방법은 초기치에 따라 발산할 가능성이 있고 계산시간도 오래 걸리는 단점이 있다. 다음으로 Mergeay의 방법은 시간영역의 전달함수 데이터를 이용하는 방법이다(Mergeay, 1982). 계산시간이 짧은 장점이 있으나 고유모드의 정확도가 떨어지는 단점이 있다. Ibrahim의 방법은 시간영역에서 고유치 해석에 의해 비선형항을 구하는 방법이다(Ibrahim and Mikulcik, 1977). 이 방법 역시 고유모드의 정확도가 떨어지는 단점이 있다.

본 논문에서는 주파수영역에서 전달함수 데이터를 그래프로 표현하여 직관적으로 일자유도 곡선맞춤을 수행한 후 임의의 감쇠비와 공진주파수를 선택하여 선형직접법으로 임의의 모드 특성치를 구하였다. 이 결과를 Newton-Raphson법의 초기치로 사용함으로써 발산 가능성을 제거하고 빠른 시간에 정확한 곡선맞춤을 수행하였다.

교신저자 박한일: 부산광역시 영도구 동삼 2동

051-410-4326 hipark@hhu.ac.kr

2. 일반점성 감쇠계

감쇠가 큰 시스템의 경우 감쇠행렬은 일반적으로 비례감쇠로 가정하여 이용할 수 없다. 일반점성 감쇠의 경우에는 비감쇠 고유모드에 의한 운동 방정식을 비연성화 할 수 없으며 그것을 모드 좌표로써 이용할 수 없다. 이와 같은 경우의 모드 좌표는 아래의 방법으로 정의하는 것이 일반적이다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

$[M]$ 은 질량행렬, $[C]$ 는 감쇠행렬, $[K]$ 는 강성행렬이며, $\{x\}$ 는 변위벡터, $\{f\}$ 는 힘벡터이다.

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\} \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)를 조합하면,

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$[Q]\{\dot{y}\} + [R]\{y\} = \{p\} \quad (4)$$

이 조작에 의해 운동방정식은 n자유도계의 2계 미분방정식으로부터 2n자유도의 1계 미분 방정식으로 변한다. 식 (4)는 일반고유치 문제가 된다. 이것은 고유모드가 행렬 $[Q]$ 와 $[R]$ 의 양쪽에 관해 직교성을 가지고 있는 것을 나타낸다. 일반점성계의 경우에는 비감쇠계나 비례점성계의 경우와 달리 고유모드가 질량행렬과 강성행렬에 관하여 직교성을 갖지 않는다. 식 (4)를 모드좌표로 변환하고 직교성을 적용하면 다음과 같이 표현된다(Nagamatsu, 1985).

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r + jV_r}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{U_r - jV_r}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} \quad (5)$$

여기서 $\sigma_r = \omega_{nr}\zeta_r$, ω_{nr} 은 고유진동수, ζ_r 은 모드 감쇠비, $U_r + jV_r = \frac{\Phi_{ri}\Phi_{rl}}{d_r}$, Φ 는 고유벡터이다.

대상주파수를 한정하여 잉여질량(Residual mass) S와 잉여강성(Residual stiffness) Z를 고려한 진폭응답 전달함수(Compliance transfer function)는 다음과 같이 표현된다.

$$G(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{U_r + jV_r}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{U_r - jV_r}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} - \frac{C + jD}{\omega^2} + E + jF \quad (6)$$

일반적으로 잉여질량과 잉여강성은 복소수로 표현된다. 그리고 가속도응답 전달함수(Accelerance transfer function)는 다음과 같다.

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-\omega^2(U_r + jV_r)}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2(U_r - jV_r)}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} + \frac{1}{S} - \frac{\omega^2}{Z} \quad (7)$$

3. 곡선맞춤법 (Curve Fitting Method)

3.1 Newton-Raphson법

식 (7)에서 S와 Z는 일반적으로 복소수가 되므로 이것을 아래와 같이 표현한다.

$$L(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{-\omega^2(U_r + jV_r)}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2(U_r - jV_r)}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \right\} + C + jD - \omega^2E - j\omega^2F \quad (8)$$

진동실험에 의해 주어지는 전달함수의 실험데이터를 식 (8)의 형태로 표현하기 위해서는 식 (8)중의 $4n+4$ 개의 미지수 즉, ω_{dr} , σ_r , U_r , V_r , C , D , E , F 가 필요하다. 이것들을 통합하여 γ_h ($h=1 \sim 4n+4$)로 하고 이들의 초기치를 γ_{hs} 라 하면 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\gamma_h = \gamma_{hs} + \Delta\gamma_h \quad (9)$$

식 (8)를 $\Delta\gamma_h$ 에 관해 테일러 전개하고 근사적으로 1차항까지 취하면 다음과 같다.

$$L(\omega, \gamma_h) \cong L(\omega, \gamma_{hs}) + \sum_{h=1}^{4n+4} \frac{\partial L}{\partial \gamma_h}(\omega, \gamma_{hs}) \cdot \Delta\gamma_h = A_{Re} + jA_{Im} \quad (10)$$

여기서 $\frac{\partial L}{\partial \gamma_h}$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}} &= \frac{-j\omega^2(U_r + V_r)}{\{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} + \frac{j\omega^2(U_r - V_r)}{\{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_r} &= \frac{\omega^2(U_r + jV_r)}{\{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} + \frac{\omega^2(U_r - jV_r)}{\{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r\}^2} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial U_r} &= \frac{-\omega^2}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{-\omega^2}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial V_r} &= \frac{-j\omega^2}{j(\omega - \omega_{dr}) + \sigma_r} + \frac{j\omega^2}{j(\omega + \omega_{dr}) + \sigma_r} \quad (r=1 \sim n) \\ \frac{\partial L}{\partial C} &= 1, \quad \frac{\partial L}{\partial D} = j, \quad \frac{\partial L}{\partial E} = -\omega^2, \quad \frac{\partial L}{\partial F} = -j\omega^2 \end{aligned} \quad (11)$$

m개의 각진동수 ω 에 대해, 실험에 의해 Accelerance의 실수부 $L_{Rei} = L_{Re}$ ($\omega = \omega_i$), 허수부 $L_{Imi} = L_{Im}$ ($\omega = \omega_i$)가 데이터로서 얻어진다고 하자. 또 근사식의 실수부와 허수부를

각각 A_{Rei} , A_{Imi} 로 하자. 이때의 오차함수는 실수부와 허수부 오차의 자승화로서 정의할 수 있으므로 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \left\{ (L_{Rei} - A_{Rei})^2 + (L_{Imi} - A_{Imi})^2 \right\} \quad (12)$$

λ 를 $\Delta \gamma_h$ 로 미분하고 0으로 두면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Delta \gamma_h} = 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial A_{Rei}}{\partial \Delta \omega_{dr}} (A_{Rei} - L_{Rei}) + \frac{\partial A_{Imi}}{\partial \Delta \omega_{dr}} (A_{Imi} - L_{Imi}) \right\} = 0 \quad (13)$$

각 변수에 대해 실수부만 고려하고, $\Delta \omega_{dr}$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Delta \omega_{dr}} = 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial A_{Rei}}{\partial \Delta \omega_{dr}} (A_{Rei} - L_{Rei}) \right\} = 0 \quad (14)$$

$$\text{여기서, } \frac{\partial A_{Rei}}{\partial \Delta \omega_{dr}} = \frac{\partial L_{Rei}}{\partial \omega_{dr}}$$

$$A_{Re} = Re \left[\frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}} \frac{\partial L}{\partial \sigma_r} \frac{\partial L}{\partial U_r} \frac{\partial L}{\partial V_r} \right] \begin{Bmatrix} \Delta \omega_{dr} \\ \Delta \sigma_r \\ \Delta U_r \\ \Delta V_r \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$L_{Rei} = L_{Rei+1} - A_{Rei0} \quad (16)$$

$i = 1$ 일때,

$$Re \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_{dr}} \cdot \Delta \omega_{dr} + \frac{\partial L}{\partial \sigma_r} \cdot \Delta \sigma_r + \frac{\partial L}{\partial U_r} \cdot \Delta U_r + \frac{\partial L}{\partial V_r} \cdot \Delta V_r - L \right) \quad (17)$$

최종적으로 다음과 같이 정리 된다.

$$\sum_{i=1}^m A_i \Delta \omega_{dr} + \sum_{i=1}^m B_i \Delta \sigma_r + \sum_{i=1}^m C_i \Delta U_r + \sum_{i=1}^m D_i \Delta V_r - \sum_{i=1}^m E_i G_i = 0 \quad (18)$$

여기서, A, B, C, D, 그리고 E는 다음과 같이 정의 하였다.

$$A = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}} \right)^2, B = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}} \right) \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \sigma_r} \right), C = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}} \right) \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial U_r} \right) \\ D = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}} \right) \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial V_r} \right), E = \left(\frac{\partial L_{Re}}{\partial \omega_{dr}} \right) \quad (19)$$

허수부도 이와 같이 정리 된다. 이 방정식을 풀면 초기치 값에 대한 변수의 값을 구할 수 있다. 이를 반복적으로 구하면 원하는 값에 수렴하게 된다.

3.2 선형직접법

앞에서 설명한 식 (8)의 미지수는 두 종류로 크게 나눌 수 있다. 우선 감쇠고유진동수 ω_{dr} 과 모드 감쇠율 σ_r 은 진동계 전체를 지배하는 전체량이 되고 원리적으로는 변화하지 않는 상수 값이 된다. 이것에 비해 U_r , V_r , C , D , E , F 는 고유모드에 의해 결정되며 가진점이나 응답점의 이동에 의해 변화하는 국부치가 된다. 만약 ω_{dr} 과 σ_r 이 어떤 방법으로 이미 구해져 있는 경우에는 초기치를 필요로 하지 않고, 또 반복하지 않는 1회의 계산에 의해 나머지 미지수를 결정할 수 있다. 이 경우 계산과정은 Newton-Raphson법과 동일하다.

4. 외팔보의 실험 및 곡선맞춤

4.1 실험장치 구성 및 실험방법

실험에 사용된 시편의 형상은 기초층의 경우 강철을 사용하고 고정부 부분을 고려하여 제작되었다. 판의 두께는 3mm, 폭은 30mm, 길이는 390mm로 실제 고정부를 제외한 보의 길이는 350mm가 된다. 기초층의 한쪽면에 감쇠재를 부착했으며, 감쇠재의 경우 국내의 A사에서 생산된 두께 3mm, 질량 밀도 2000kg/m³인 제진성 방진 시트를 사용하였다(민천홍 등, 2006).

실험 방법은 Fig. 1과 같이 충격해머로 고정점 근방의 한 점을 고정하여 가진하고 가속도계 센서를 1번 점에서부터 7번 점까지 이동시켜가며 실험을 수행하였다. 실험에 사용된 FFT 분석기는 B&K사의 2채널 3560B를 사용하였다.

4.2 곡선맞춤 순서

곡선맞춤의 첫 단계는 실험에 의해 측정된 각 점들의 전달함수를 겹쳐 그린 후 채용 모드수를 결정하는 것이다(민천홍 등, 2007). 채용 모드수에 따라 계산시간과 결과의 정도가 크게 달라지므로 채용 모드수의 결정은 중요하다.

모드수를 결정하면 각 차수의 공진주파수를 임의의 고유주파수로 설정하고 일자유도 곡선맞춤을 수행하여 임의의 모드 감쇠비를 구한다.

다음으로 임의로 선정한 고유주파수와 감쇠비를 사용하여 선형직접법으로 해석을 수행한다. 그 결과 임의의 변수들이 결정된다. 이 변수들은 다음 단계에서 Newton-Raphson법의 초기치로 사용된다.

마지막으로 Newton-Raphson법을 사용하여 곡선맞춤한다. 이상의 곡선맞춤의 순서이다.

이상의 과정을 거쳐 1600Hz 내에서 6개의 모드를 선정하였다. Table 1은 채용된 6개의 임의의 고유주파수와 임의의 감쇠비를 나타낸다.

4.3 곡선맞춤

Fig. 2는 선형직접법에 의해 곡선맞춤된 그림이다. 임의의 고유주파수와 임의의 감쇠비를 이용하였기 때문에 곡선맞춤의 결과에 오차가 크게 나타난다. 감쇠가 큰 시스템의 경우 1 자유도 곡선맞춤을 통한 고유 주파수와 감쇠비의 선정은 오류가 크기 때문이다. 그래프의 위쪽은 전달함수의 실수부를 나타내고 아래쪽은 허수부를 나타낸다. 선형직접법으로 구해진 임의의 모드 특성치들은 Newton-Raphson법의 초기치로 사용된다.

Fig. 3은 Newton-Raphson법에 의해 곡선맞춤된 그림이다. 반복횟수는 70번으로 평균계산시간은 250초였다. 계산시간은 채용모드수와 데이터의 양에 따라 달라질 수 있다.

초기치에 따른 수렴속도를 비교하기 위해 임의의 초기치를 설정하였다. 초기치중 고유주파수와 감쇠비는 Table 1과 동일하다. Fig. 3(d)는 고유주파수와 감쇠비를 제외한 나머지 미지수에 1을 입력하고 70번 반복하여 곡선맞춤한 결과이다. Fig. 3(a)와 비교해보면 초기치의 차이에 따라 반복횟수 및 곡선맞춤의 정확도에 차이가 많음을 알 수 있다.

Table 2는 Newton-Raphson법으로 곡선맞춤하여 구한 고유주파수 및 모드 감쇠비이다.

Table 1 Natural frequency and modal damping ratio selected

Mode	Natural frequency	Modal damping ratio
1	17.5	0.0178
2	110.5	0.0104
3	308.5	0.0099
4	602.5	0.0074
5	993.5	0.0081
6	1483	0.0087

Table 2 Natural frequency and modal damping ratio

Mode	Natural frequency	Modal damping ratio
1	18	0.022
2	112.1	0.0161
3	311.6	0.0141
4	608	0.0118
5	1003.3	0.0133
6	1469.7	0.0123

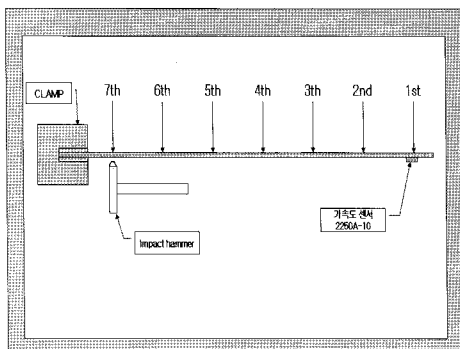


Fig. 1 Experimental set-up

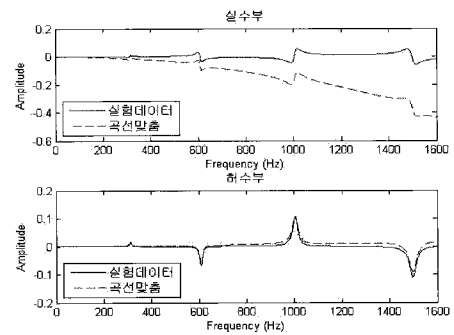
5. 결론 및 고찰

본 논문에서는 감쇠재가 부착된 철제시편의 진동특성을 해석하기 위하여 실험모드 해석법을 수행하였다.

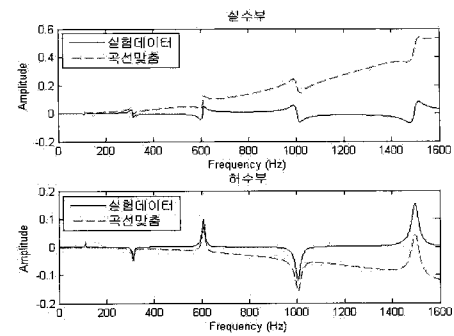
일반감쇠 모델의 경우 일자유도 곡선맞춤으로 구해진 고유주파수와 모드 감쇠비를 이용하여 선형직접법으로 곡선맞춤할 경우 오차가 크게 나타났다.

다자유도 곡선맞춤 방법인 Newton-Raphson법의 경우 오차가 있는 선형직접법의 해석 결과를 초기치로 사용한다면 적은 횟수의 반복만으로도 정확한 곡선맞춤을 수행할 수 있다.

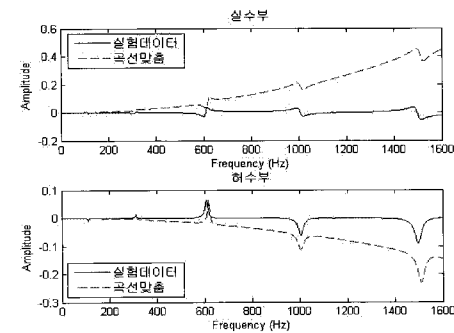
해석자가 공진주파수와 모드 감쇠비만을 입력하는 간단한



(a) 1st point

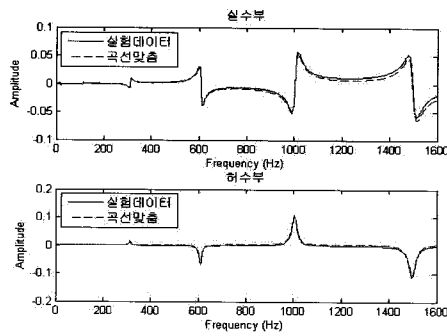


(b) 2nd point

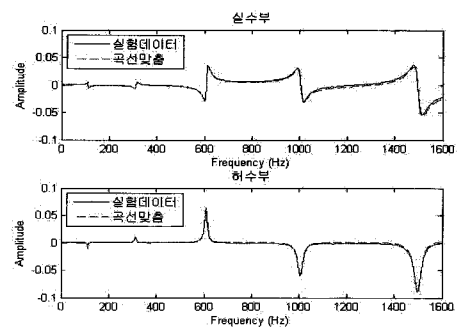


(c) 3th point

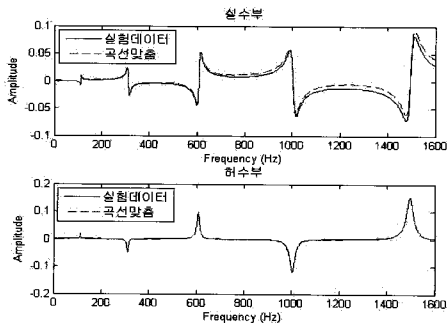
Fig. 2 Measured and curve-fitted accelerance by liner-direct method



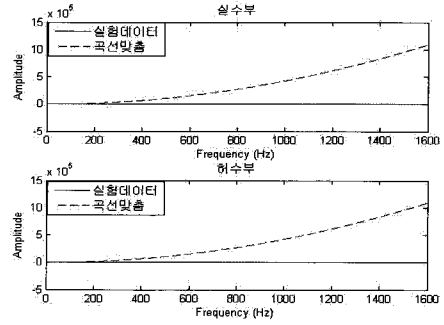
(a) 1st point



(c) 3th point



(b) 2nd point



(d) 1st point

조작으로 일반점성 모델의 다자유도 곡선맞춤을 수행할 수 있는 Newton-Raphson법 프로그램을 MATLAB을 이용하여 개발하였다.

앞으로 감쇠가 매우 크게 작용하는 모델의 경우에 대한 곡선맞춤을 수행하고 반복 횟수를 줄이기 위한 연구가 보완되어야겠다.

후 기

본 연구는 국방부가 지원한 수중운동체 특화연구센터(UVRC)의 지원에 의해 수행되었습니다.

민천홍, 박한일, 배수룡 (2007). "다자유도 곡선맞춤법을 이용한 일반점성 감쇠모델의 진동해석", 2007년도 한국해양과학기술협의회 공동학술대회논문집, pp 1686-1689.

민천홍, 손재근, 박한일, 배수룡 (2006). "점탄성 복합재의 온도 변화에 따른 모드 형상 비교", 한국해양공학회 2006년도 추계학술대회 논문집, pp 150-153.

참 고 문 헌

박한일, 손재근, 민천홍, 배수룡 (2007). "복합재의 탄성 및 감

Fig. 3 Measured and curve-fitted accelerance by Newton-Raphson method

쇠계수 측정을 위한 실험연구", 대한조선학회논문집, 제44권, 제1호, pp 26-31.

Ibrahim, S.R. and Mikulcik, E.C. (1977). "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the free Response", The Shock and Vibration Bulletin, Vol 47, Part 4, pp 183.

Mergeay, M. (1982). "Multi Degree of Freedom Parameter Estimation Methods for Modal Analysis", Annals of the CIRP, Vol 31, pp 269.

Nagamatsu, A. (1985). Modal Analysis.

Van Loon, P. (1974). Modal Parameters of Mechanical Structures, Ph. Doctor dissertation, Katholieke Univ., Leuven.

2007년 8월 27일 원고 접수

2008년 1월 7일 최종 수정본 채택