한국측량학회지, 제 26권 제 1호, pp. 85~91(2008년 2월 29일)

# 대규모 측지망 조정을 위한 희소 행렬의 효율적인 재배열 방법에 대한 비교 연구

# A Comparative Study on the Efficient Reordering Methods of Sparse Matrix Problem for Large-scale Surveying Network Adjustment

우선규[1] · 허 준[2] · 윤공현[3]

Woo, Sun Kyu · Heo, Joon · Yun, Kong Hyun

**Abstract**

When a large sparse matrix is calculated for a horizontal geodetic network adjustment, it needs to go through the process of matrix reordering for the efficiency of time and space. In this study, several reordering methods for sparse matrix were tested, using Sparse Matrix Manipulation System (SMMS) program, total processing time and Fill-in number produced in factorization process were measured and compared. As a result, Minimum Degree (MD) and Mutiple Minimum Degree (MMD), which are based on Minimum Degree are better than Gibbs-Poole-Stockmeyer (GPS) and Reverse Cuthill-Mckee (RCM), which are based on Minimum Bandwidth. However, the method of the best efficiency can be changed dependent on distribution of non-zero elements in a matrix. This finding could be applied to heighten the efficiency of time and storage space for national datum readjustment and other large geodetic network adjustment.

Keywords : Sparse matrix, Reordering, Minimum Degree, Minimum Bandwidth, Fill-in, SMMS

**초 록**

수평조정망과 같이 커다란 희소행렬(sparse matrix)을 계산할 때, 시간적 효율 및 공간적 효율을 높이기 위해서 재배열(reordering) 과정을 거치게 된다. 본 연구에서는 SMMS(Sparse Matrix Manip ulation System) 프로그램을 이용해서 희소행렬의 원소를 각각의 재배열 방법으로 재배열 한 후, 전체 계산에 걸리는 시간과 치환배열을 구해 해를 구하는 과정시 발생하는 Fill-in의 개수를 계산해서 각 방법의 효율성을 비교하였다. 그 결과, Minimum Bandwidth 기반의 GPS(Gibbs-Poole-Stockmeyer), RCM(Reverse Cuthill-Mckee) 방법보다 최소 차수(Minimum Degree) 기반의 MD(Minimum Degree), MMD(Mutiple Minimum Degree) 방법이 더 효율적인 모습을 보여주었다. 하지만, 행렬의 원소 분포에 따라서 최적의 성능을 보이는 재배열 방법은 달라질 수 있다는 것을 알 수 있었다. 이러한 연구 결과는 향후 전국 기준점의 좌표값 재조정 시, 또는 대규모 측지망 조정 등에서 구성 요소 계산에 필요한 시간, 저장 공간 등의 효율을 높일 수 있는 효과를 기대할 수 있을 것이라 사료된다.

핵심어 : 희소 행렬, 재배열, 최소차수, Minimum bandwidth, Fill-in, SMMS

## 1. 서 론

현장에서 정확한 측량을 실행하기 위해서는 해당 프로젝트에 사용할 수 있는 기준점들의 정확도가 보장되어야 한다. 정확하고 일관된 좌표계는 국가 공간 활용에 기준이 되고, 교통, 도시개발, 군사작전 등 다른 분야에서도

1) 연세대학교 공과대학 사회환경시스템공학부 석사과정(E-mail:wsk0419@yonsei.ac.kr)
2) 연결저자·정회원·연세대학교 공과대학 사회환경시스템공학부 조교수(E-mail:jheo@yonsei.ac.kr)
3) 정회원·연세대학교 건설공학연구소 연구원(E-mail:ykh1207@yonsei.ac.kr)

활용가능하다.

미국의 경우, 1933년 이후로 NAD83이라는 수평조정망을 구축하면서, 좌표의 정확도를 향상시키기 위해 각 주마다 국가공간기준계 역할을 하기위한 고정밀도기준망(HARN)을 구축했다. 이 고정밀 데이터의 이용은 HARN 망에 대한 지역적인 GPS 추가 측량으로 인한 국가공간기준계의 괄목할만한 증가와 더불어, 모든 관측값을 이용한 국가적인 동시망조정의 필요성이 대두되었다(Schwarz, 1989). 우리나라에서도 GPS 관측값과 기타 측지측량 관측값의 동시조정에 대한 필요성이 대두되고 있으나 최근의 연구(이영진 등, 2007) 에서와 같이 전체 관측치의 동시 조정은 수행되지 못하고 지구별로 지역적인 조정만이 수행되고 있는 현실이다.

NAD83의 경우 기지점의 개수만 258,982개 이고, 미지점의 개수가 928,735개에 달하는 아주 큰 규모의 희소행렬로 구성되어 있으며 그 계산시간만 하더라도 940시간(CPU time)에 달했다(Schwarz, 1989). 컴퓨터의 성능이 발전함에 따라 해석 시간은 줄어들고 응용분야는 확대되고 있지만, 국가 차원의 대형 관측망의 계산에서는 여전히 계산의 효율성이 중요한 문제가 된다(Heo and Rho, 2000).

희소행렬(sparse matrix)은 0인 원소의 수가 0이 아닌 원소보다 많은 행렬을 말한다. 이러한 특징은 행렬을 계산할 때 저장 공간의 낭비와 불필요한 계산 횟수의 문제를 발생 시킨다. 예를 들어 일반적인 이차 행렬의 경우 저장 공간은 $n^2$ 만큼 필요하고, 계산을 위한 공간은 $n^3$ 만큼 필요하다(Alvardo et al., 1991).

하지만 실제로 희소행렬을 계산할 경우 0이라는 원소는 결과에 영향을 미치지 않는다. 이러한 불필요한 계산을 없애기 위해 재배열(Re-ordering) 이라는 단계를 거치게 된다. 원소를 재배열한 후 치환배열을 구해 해를 구하는 과정(permutation)을 거치면 처리 속도 면에서나 컴퓨터 메모리 사용 면에서 큰 장점을 가진다(Tinney & Walker, 1967).

효과적인 재배열 방법을 찾기 위한 기존 방법으로는 단일 그래프 조작에 기반한 발견적 재배열 방법(Betancourt, 1988)이나, chordal 그래프의 clique 트리를 이용한 평행배열 방법을 이용하는 방법(Lewis et al., 1989), 반복병렬 알고리즘(최수환 & 이진, 1989), 행렬의 bandwidth을 줄이는 알고리즘(김길창 & 유기영, 1977) 등이 제안되었다. 기존 연구의 경우, 희소행렬의 수학적 해석 방법을 통해 그 효율성을 증명하였을 뿐, 실제 측량망에서 생성된 희소행렬에 이러한 재배열 방법들을 실질적으로 적용하여 비교 평가한 국내 연구 사례는 없었다.

본 연구에서는 실제 측지측량에서 생성 되는 희소행렬을 대상으로 여러 개의 재배열 기법을 이용해서 처리할 때의 처리시간과 생성되는 Fill-in의 개수를 비교하여 각 방법의 실제 효율성을 비교, 평가해 보고자 한다. 이를 통해 향후 우리나라 측지망의 동시조정에서 요청될 정규행렬의 재배열에 대한 이론적인 배경을 제시하고자 한다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 Cholesky 분해법(Wolf, 1997)

n개 방정식의 선형계인 Ax=b를 풀려고 할때, n×n 크기의 행렬 A가 하부삼각행렬(lower triangle matrix) L과 상부삼각행렬(upper triangle matrix) U의 곱 A=LU 의 형태로 factorization되었다고 하자. 다음 과정을 거쳐서 선형계 Ax=b를 풀 수 있다.

(1단계) Ax=b (A=LU)
LUx = b
(2단계) Ux = y로 정의하고, Ly=b라고 쓴다.
(1단계 이용)
(3단계) 선형계 Ly=b를 미지수 y에 관하여 푼다.
(4단계) 이제 구한 벡터 y를 (3단계)에 대입하여 x에 관하여 푼다.

이 과정을 LU-분해법 방법이라고 한다. 이 내용을 바탕으로 양정치(Positive definite) 대칭행렬 A가 다음과 같은 삼각 행렬(triangle matrix)로 정의되는 경우를 Cholesky 분해법이라고 한다.

$$A = LU = LL^T = U^T U \tag{1}$$

L은 다음과 같은 하삼각행렬(lower triangle matrix) 형태를 가진다.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

정규행렬을 삼각행렬 형태로 나눌 경우의 장점은 역행

렬을 구할 필요 없이 행렬의 값을 구할 수 있다는 점이다.

$$(A^T WA)X = NX = \mathrm{LUX} = \mathrm{LL^T X}$$
$$= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = C \tag{3}$$

앞에서의 $LY = C$ ($L^T X = Y$) 라는 식으로부터 다음과 같이 전진 대입법(forward substitution) 과정을 통해 값을 구한다.

(1단계) $y_1$에 대하여 풀면

$$y_1 = \frac{c_1}{l_{11}} \tag{4}$$

(2단계) 이것을 이용해 다른 미지수를 풀면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$y_i = \frac{c_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}} \tag{5}$$

이것은 $L^T X = Y$ 에서도 다음과 같이 이용할 수 있다.

$$x_k = \frac{y_k - \sum_{j=k+1}^{n} l_{kj} x_j}{l_{kk}} \tag{6}$$

Cholesky 분해법 의 경우 전통적인 가우스소거법에 비해 처리 시간에 있어 효율적일 뿐 아니라 정규행렬의 하삼각행렬(lower triangular matrix)에 해당하는 메모리만으로 모든 최소 제곱해와 그 표준오차를 구할 수 있다는 장점을 갖는다.

## 2.2 재배열 알고리즘

측지망 조정에 이용되는 최소제곱법의 정규행렬은 양정치 대칭행렬이므로 Cholesky 분해법을 통해 일반적으로 최소 제곱해를 얻는다. 그러나 대규모의 희소행렬의 경우 Cholesky 분해법은 분해(factorizaton) 이전에 0이었던 행렬요소가 0이 아닌 값으로 바뀌는 경향을 가지며, 이로 인해 희소행렬처리의 효율성을 잃게 되는 문제점을 갖는다. 이와 같은 현상을 Fill-in 이라고 하며, Fill-in 의 현상을 최소화 하는 방식으로 행렬의 순서를 바꾸어 주는 과정을 재배열(Reordering)이라 한다. 대규모의 희소행렬로 구성된 대규모 측지측량망의 정규방정식의 경우에도 그 효율적인 계산을 위해 필수적인 거쳐야 하는 과정이다.

재배열 방법은 크게 2가지로 구분할 수 있는데, 최소의 차수를 가지는 점을 삭제하는 방법인 최소차수(Minimum Degree) 기반의 방법과 행렬의 대각부분의 bandwidth를 줄이는 Minimum Bandwidth 기반의 방법으로 구분할 수 있다.

최소차수 기반의 재배열 방법은 Markowitz 배열 방법(Markowitz, 1957)을 대칭행렬에 적용한 것으로 Fill-in의 수를 최소화시키기 위해 사용되는 방법이다. 이 방법은 그림 1과 같은 과정을 통해 대상 행렬의 원소를 소거한다.

이와는 다르게 Minimum bandwidth 기반의 재배열 방법은, 행렬의 bandwidth를 최소화시키는 방법으로, Fill-in 이 생기는 영역을 밀집화 시킴으로서 실제 계산시 계산횟수를 감소시키기 위한 방법이다. $N \times N$ 크기의 양정치 행렬 A의 i행 j열의 원소를 $a_{ij}$라고 할 때, 행렬 A의 bandwidth $\beta$는 다음과 같이 정의된다.

$$f_i(A) \ : \ a_{ij} \neq 0 \text{인 원소의 j값 중의 최소값}$$
$$\beta_i(A) = i - f_i(A) \tag{7}$$

위의 식 (7)로부터 A 행렬의 bandwidth $\beta$는 전체 $\beta_i(A)$ 중에서 최대값, 즉 $|i-j|$이 최대인 값으로 정의된다(Cuthill

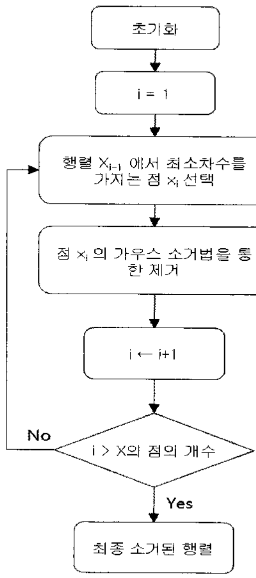


그림 1. 최소차수 방법에 의한 재배열 과정

and McKee, 1969).

본 연구에서는 최소차수 기반의 방법 중에서 하나의 최소차수 점을 소거해나가는 MD(Minimum Degree) 재배열방법(George and Liu, 1981)과 동시에 여러개의 최소차수 점을 소거하는 MMD(Multiple Minimum Degree) 재배열 방법(Liu, 1985)을 이용하였고, Minimum Bandwidth 기반의 방법 중에서는 시작점을 선택 후 주변의 순서가 정해지지 않은 점들에 대해 순차적으로 번호를 할당하는 RCM(Reverse Cuthill-McKee) 재배열 방법(Gibbs et al., 1976)과 RCM방법과 유사하나 순서화 이전에 시작점의 level 폭을 최소화 시키는 GPS(Gibbs-Poole-Stockmeyer) 재배열 방법(Gibbs et al., 1976)을 선택하였다.

## 3. 자료처리 및 결과

본 연구에서는 실제 희소행렬을 각각의 재배열 방법들을 이용해서 0이 아닌 값들을 재배치하고 Cholesky 분해법을 이용해 미지값을 구하는 과정까지의 시간과 Fill-in의 수를 비교하였다. 대상 희소행렬은 미국표준기술연구소(NIST)에서 제공하는 희소행렬 중 측지측량 자료로부터 구성된 ILLC1850 행렬과 ILLC1033 행렬을 이용하였다. 각 행렬의 제원은 표 1과 표 2와 같다.

실제 희소행렬의 계산은 Wisconsin Madison 대학에서 개발한 SMMS(The Sparse Matrix Manipulation System) (Alvarado, 1993) 프로그램을 이용하였으며, 사용된 컴퓨터의 사양은 표 3과 같다.

그림 2와 3은 본 연구에서 이용된 행렬을 정규 행렬로 변환한 경우에 데이터 분포를 나타낸 모습이다. 그림에서 검은 점은 데이터가 존재하는 부분이고 나머지 부분은 값이 0인 지점이다.

그림 4, 5번의 재배열 결과를 가지고 치환배열을 구하는 과정 중의 Fill-in을 표시하면 그림 6, 7과 같은 모습을 볼 수 있다.

각 작업간의 시간과 Fill-in 분포는 표 4, 표 5와 같다. 표 4과 표 5의 결과에서 나타난 것처럼 각 단계에서 재배열을 하는 시간은 방법에 따른 차이가 거의 없었다. 하지만, 치환배열을 구하는 단계에서 시간과 Fill-in의 개수가 차이를 보이는 것을 알 수 있다.

표 1. 행렬 A 제원(ILLC1850)

| | |
|---|---|
| 크기 | 1850×712 |
| 형태 | real unsymmetric |
| Nonzeros | 8636 |
| 출처 | Michael Saunders, SOL, Stanford University. |
| 분야 | Surveying |
| 취득시기 | Summer 1979 |

표 2. 행렬 B 제원(ILLC1030)

| | |
|---|---|
| 크기 | 1033×320 |
| 형태 | real unsymmetric |
| Nonzeros | 4719 |
| 출처 | Michael Saunders, SOL, Stanford University. |
| 분야 | Surveying |
| 취득시기 | Summer 1979 |

표 3. 사용된 Computer 사양

| | |
|---|---|
| CPU | Intel Core2 duo 1.86 GHz |
| RAM | DDR2 2 GB |
| HDD | 160 GB |
| OS | Ubuntu 7.04 |

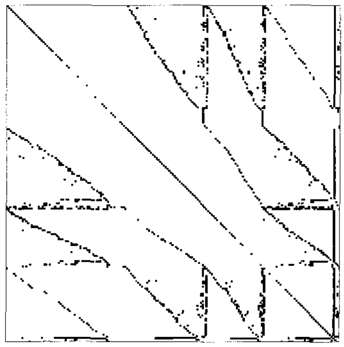


그림 2. 정규행렬(행렬 A)

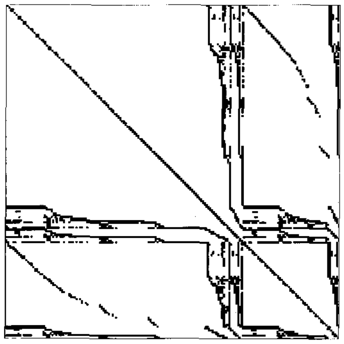
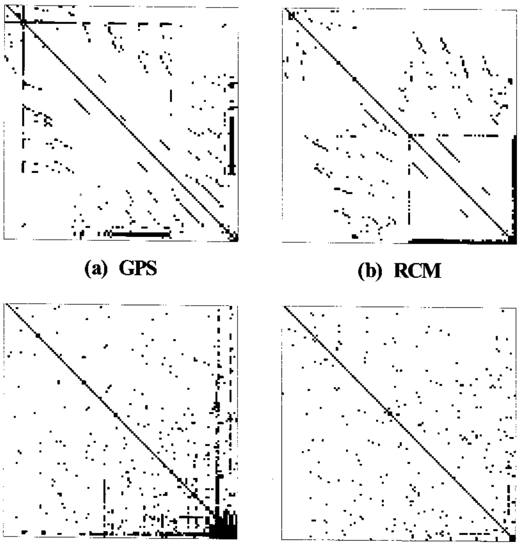


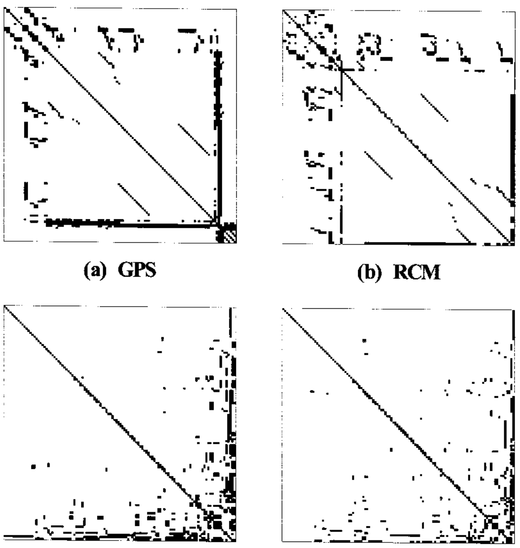
그림 3. 정규행렬(행렬 B)



(a) GPS (b) RCM

(c) MD (d) MMD

그림 4. 재배열 결과(행렬 A)



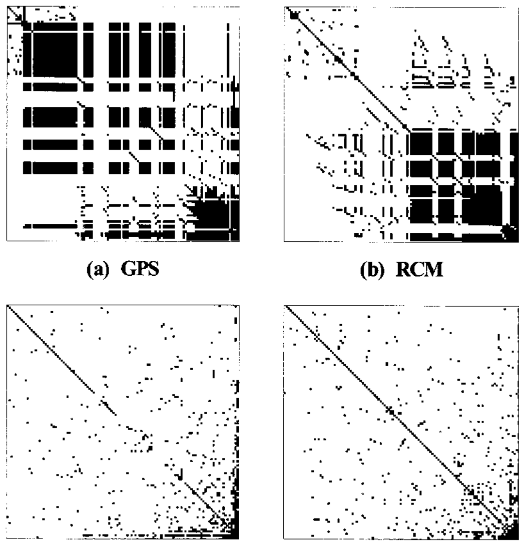
(a) GPS (b) RCM

(c) MD (d) MMD

그림 5. 재배열 결과(행렬 B)

표 4. 행렬 A의 계산 결과

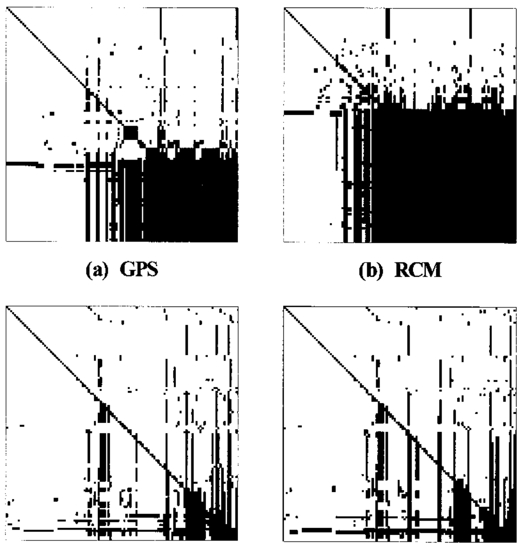
| | Reordering | Solution | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|
| | time(s) | time(s) | Fill-in | time(s) | Fill-in |
| GPS | 0.171 | 7.798 | 129590 | 7.920 | 129590 |
| RCM | 0.140 | 8.343 | 73655 | 8.483 | 73655 |
| MMD | 0.146 | 0.594 | 8437 | 0.740 | 8437 |
| MD | 0.195 | 0.608 | 8460 | 0.803 | 8460 |



(a) GPS (b) RCM

(c) MD (d) MMD

그림 6. 치환 결과(행렬 A)



(a) GPS (b) RCM

(c) MD (d) MMD

그림 7. 치환 결과(행렬 B)

표 5. 행렬 B의 계산 결과

| | Reordering | Solution | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|
| | time(s) | time(s) | Fill-in | time(s) | Fill-in |
| GPS | 0.085 | 0.834 | 18408 | 0.919 | 18408 |
| RCM | 0.062 | 1.882 | 39014 | 1.944 | 39014 |
| MMD | 0.081 | 0.274 | 5409 | 0.355 | 5409 |
| MD | 0.078 | 0.248 | 4114 | 0.326 | 4114 |

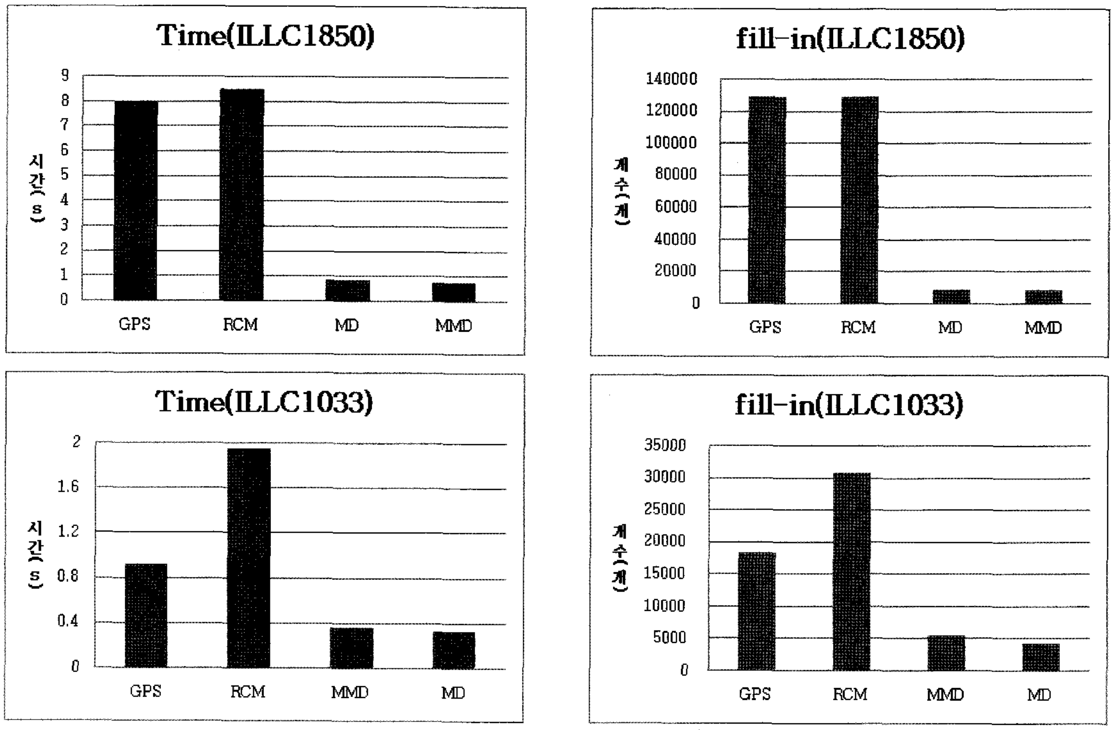



**그림 8. 각 재배열 방법별 소요시간 및 Fill-in 수**

각 재배열 방법으로 희소행렬 데이터를 처리한 결과인 그림 8을 보면 시간과 Fill-in 항목에서 두 행렬 모두 Minimum Bandwidth 기반의 GPS, RCM 방법보다는 최소차수 기반의 MMD, MD 방법이 더욱 효율적이라는 것을 알 수 가 있다. 정규행렬의 규모가 행렬 A의 경우 712×712, 행렬 B의 경우 320×320로 소규모이기는 하지만 그 차이가 행렬 A에서 좀 더 크게 나타나고 있다. 큰 행렬인 A의 경우가 재배열의 효과가 더 크게 나타났으며, 이를 확증하기 위해서는 좀 더 다양한 행렬의 실험이 필요하다. 이와 같은 계산 효율의 차이는 수천 개 이상의 기준점으로 구성된 대규모 측지망 조정시 더욱 극명하게 나타날 것으로 예상되며 정규행렬 재배열의 중요성을 뒷받침하는 근거라 하겠다.

위의 실험결과를 통해 같은 그룹의 재배열 방법 중에서도 배열의 원소분포에 따라 성능이 차이가 나는 것을 알 수 있었다. 행렬 A의 경우 MMD방법이 가장 적은 시간과 적은 Fill-in 개수를 보였으나, 행렬 B의 경우 MD방법이 더욱 좋은 성능을 보였다. 또한 행렬 A에서는 GPS와 RCM 방법이 비슷한 결과를 보였으나 행렬 B에서는 GPS 방법이 더 좋은 성능을 보였다. 이것은 초기 행렬의 원소가 어떻게 배치되어 있는 가에 따라서 각 계산과정의 효율성에 영향을 미친 것이라고 할 수 있다.

## 4. 결 론

본 연구는 컴퓨터를 이용한 대형 측량망 계산 시에 필요한 희소행렬의 효율적인 계산을 위해, 재배열 방법들의 효율성을 비교하였다. 이를 위해 NIST에서 제공하는 측량과 관련된 샘플 행렬을 가지고 SMMS 프로그램을 이용해서 재배열과 치환배열을 구하는 과정을 통해 해를 구하였다. 이 과정에서 걸리는 시간과 발생하는 Fill-in의 수를 계산하였고, 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, Minimum Bandwidth기반의 GPS, RCM 방법보다는 최소차수 기반의 MMD, MD 방법이 재배열 후의 계산에 있어서 더욱 효과적이다.

둘째, 같은 기반의 재배열 방법이라고 하더라도 해당 행렬의 원소들의 배치 상태에 따라 그 성능이 바뀔 수 있다.

향후 연구 내용으로는 측량분야에서 일반적으로 사용되어 온 Snay의 재배열 알고리즘(Snay, 1976)과 심도있는 비교 평가를 통해 최적의 재배열 방법을 찾는 것이 필요하다. 그리고 본 연구의 계산 실험에 사용된 소규모의 해외 자료가 아닌 실제 국내의 측지망에서 생성된 대규모의 정규행렬을 이용했을 때 좀 더 의미 있는 연구결과가 도출 될 것으로 기대된다. 이러한 연구 결과는 차후 국가기준점 재조정 사업등과 같이 대형 측량망의 조정 작업시 계산의 효율성을 증대시킬 수 있는 이론적 배경으로 사용할 수 있을 것이라고 사료된다.

## 참고문헌


김길창, 유기영 (1977), Sparse Matrix의 Bandwidth에 관한 연구, **한국정보과학회 학술발표논문지**, 한국정보과학회, 제 4권, 제 2호, pp. 24-28.

이영진, 정광호, 이흥규, 권찬오, 송준호, 조준래, 남기범, 차상헌 (2007), GPS망조정에 의한 3등 측지기준점의 세계측지계 성과산정, **한국측량학회지**, 제 25권 5호, pp. 437-449.

채수환, 이진 (1989), 대형 Sparse 선형시스템 방정식을 풀기위한 효과적인 병렬 알고리즘, **한국통신학회논문지**, 한국통신학회, 제 14권, 4호, pp. 388-397.

Alvarado, F. L. (1993), Sparse matrix manipulation system, *University of Wisconsin-Madison.*

Alvarado, F. L., Tinney, F. L. and Enns, M. K. (1991), Sparsity in large-scale network computation, *Advances in electric Power and Energy Conversion System Dynamics and Control*, Academic Press.

Betancout, R. (1988), An efficient heuristic ordering algorithm for partial matrix refactorization, *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(3), pp. 1181-1187.

Cuthill, E. and McKee, J. (1969), Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. *In 24th National Conference of the Association for Computing Machinery*, pp. 157-172, New Jersey.

George, A. and Liu, J. W. H. (1981), *Computer Solution of Large Sparse Positive Denite Systems*, PrenticeHall.

George, A. and Liu, J. W. H. (1989), The Evolution of The Minimum Degree Ordering Algorithm, *SIAM Review*, Vol. 31, No. 1, pp. 1-19.

Gibbs, N. E., Poole, W. G. and Stockmeyer, P. K. (1976), An algorithm for reducing the bandwidth and prole of a sparse matrix, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 13, pp. 236-250.

Heo, J. and Rho, Y. (2000), Parallel Partitioned Inverse Method for Least-Squares Adjustment, *Journal of Surveying Engineering*, November 2000, pp. 163-176.

Lewis, J. G., Peyton, B. W., and Alex Pothen (1989), A fast algorithm for reordering sparse matrices for parallel factorization, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 10(6), pp. 1146-1173.

Liu, J. W. H. (1985), Modification of the minimum degree algorithm by multiple elimination, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 11, pp. 141-153.

Markowitz, H. M. (1957), The elimination form of the inverse and its application to linear programming, *Management Science*, 3, pp. 255-269.

Schwarz, C. R. (1989), The North American Datum of 1983, *NOAA Professional Paper NOS 2.*

Snay, R. (1976). Reducing the profile of sparse symmetric matrices, *NOAA Technical Memorandum NOS NGS-4.*

Tinney, W. F. and Walker, J. W. (1967), Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization, *Proceedings of the IEEE*, 55(11), pp. 1801-1809.

Wolf, P. R. (1997), *Adjustment Computations : Statistics and Least Squares in Surveying and GIS*, John Wiley & Sons Inc., New York.


(접수일 2008. 1. 23, 심사일 2008. 2. 11, 심사완료일 2008. 2. 29)